DET
KONGELIGE DANSKE
VIDENSKABERNES SELSKABS SKRIFTER.

FEMTE RÆKKE.

NATURVIDENSKABELIG OG MATHEMATISK

AFDELING.

TIENDE BIND.

MED TRE OG TYVE TAVLER.

KJÖBENHAVN.

TRYKT I BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI.

1875.

FORTEGNELSE

OVER

DET KONGELIGE DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS

MEDLEMMER.

AUGUST 1875.

Protektor:

Hans Majestæt Kongen.

Præsident:

J. N. Madvig.

Sekretær: *J. J. S. Steenstrup.*
Redaktør: *J. L. Ussing.*
Kasserer: *J. Th. Reinhardt.*

Kasse-Kommissionen.

N. L. Westergaard. *C. L. Müller.* *J. J. A. Worsaae.* *A. Steen.*

Revisorer.

L. A. Colding. *H. P. J. Julius Thomsen.*

Ordbogs-Kommissionen.

N. L. Westergaard. *S. Grundtvig.*

Kommissionen for Udgivelsen af et dansk Diplomatarium og Regesta diplomatica.

P. G. Thorsen. *F. E. A. Schiern.* *H. F. Rørdam.*

Indenlandske Medlemmer.

Lund, Peter Wilhelm, Dr. phil., Professor, Kommandør af Danebrog.

Clausen, Henrik Nicolai, Dr. theol., Professor emer. i Theologien ved Kjøbenhavns Universitet, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand.

Madvig, Johan Nicolai, Dr. phil., Konferentsraad, Professor i den klassiske Filologi ved Kjøbenhavns Universitet, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af Nordstjernen og af St. Olafsordenen, Ridder af den preussiske Orden pour le mérite og af den nederlandske Løveorden, Selskabets Præsident.

Bendz, Henrik Carl Bang, Dr. med., Etatsraad, Lektor ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af Nordstjernen og af St. Olafsordenen.

Martensen, Hans Lassen, Dr. theol., Biskop over Sjællands Stift, Ordensbiskop, Kongelig Konfessionarius, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af Nordstjernen og af den græske Frelsersorden.

Steenstrup, Johannes Japetus Smith, Dr. phil. & med., Etatsraad, Professor i Zoologien ved Kjøbenhavns Universitet, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af Nordstjernen, Kommandør af Isabella den Katholskes Orden og af den italienske Kroneorden, Selskabets Sekretær.

Wegener, Caspar Frederik, Dr. phil., Konferentsraad, Geheimearkivar, Kgl. Historiograf og Ordenshistoriograf, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af den græske Frelsersorden og af den russiske St. Anna-Orden, Kommandør af Nordstjernen og St. Olafsordenen.

Paludan-Müller, Caspar Peter, Dr. phil., Professor i Historie ved Kjøbenhavns Universitet, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af Nordstjernen.

Schiodte, Jørgen Christian, Professor, extr. Docent i Zoologien ved Kjøbenhavns Universitet og Inspektør ved dets zoologiske Museum, Ridder af Danebrog.

Scharling, Carl Emil, Dr. theol. et phil., Professor i Theologien ved Kjøbenhavns Universitet, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand.

Engelstoft, Christian Thorning, Dr. theol., Biskop over Fyns Stift, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand.

Westergaard, Niels Ludvig, Dr. phil., Etatsraad, Professor i de indisk-orientalske Sprog ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af Nordstjernen.

Ussing, Johan Louis, Dr. phil., Professor i den klassiske Filologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog, Officier af den græske Frelsersorden, Selskabets Redaktør.

Worsaae, Jens Jacob Asmussen, Kammerherre, Direktør for Museet for nordiske Oldsager og for det ethnografiske Museum, Direktør for de antikvariske Mindesmærkers Bevaring, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af Nordstjernen, Ridder af Stanislausordenens 2den Klasse og St. Annaordenens 3die Klasse, af Brasiliansk Rosa Ordens 5te Klasse, Meklenborgsk Medaille for Videnskab og Kunst 1ste Klasse, Kommandør af Isabella den Katholskes Orden, Storofficier af den italienske Kroneorden.

Hannover, Adolph, Dr. med., Professor, Ridder af Danebrog.

Andræ, Carl Christopher Georg, Geheime-Etatsraad, Direktør for Gradmaalingen, Storkors af Danebrog og af Frants den Førstes Orden.

Gislason, Konrad, Dr. phil., Professor i de nordiske Sprog ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Reinhardt, Johannes Theodor, Professor, extr. Docent i Zoologien ved Kjøbenhavns Universitet og Inspektør ved dets zoologiske Museum, Ridder af Danebrog, Selskabets Kasserer.

Colding, Ludvig August, L. L. D., Professor, Stadsingeniør i Kjøbenhavn, Ridder af Danebrog.

Müller, Carl Ludvig, Lic. theol., Dr. phil., Etatsraad, Direktør for den kongelige Mønt-Samling, Antiksamlingen og Thorvaldsens Museum, Ridder af Danebrog, Kommandør af St. Olafsordenens 2den Klasse, Ridder af Stanislausordenens anden Klasse samt af Nordstjernen og af St. Annaordenens 3die Klasse.

Panum, Peter Ludvig, Dr. med., Professor i Fysiologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Schiern, Frederik Eginhardt Amadæus, Dr. phil., Professor i Historie ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog, af Nordstjernen og af den belgiske Leopoldsorden.

Holten, Carl Valentin, Professor i Fysik ved Kjøbenhavns Universitet, Direktør for den polytekniske Læreanstalt, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af St. Olafsordenen og af Nordstjernen.

Thomsen, Hans Peter Jürgen Julius, Professor i Kemi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Steen, Adolph, Dr. phil., Professor i Mathematik ved Kjøbenhavns Universitet og den polytekniske Læreanstalt, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand.

Thorsen, Peter Godt, Professor, Universitetsbibliothekar, Ridder af Danebrog, af St. Olafsordenen og af Nordstjernen.

Rink, Hinrich Johannes, Dr. phil., Justitsraad, Direktør for den Kgl. Grønlandske Handel, Ridder af Danebrog og af Nordstjernen.

Johnstrup, Johannes Frederik, Professor i Mineralogi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Barfoed, Christen Thomsen, Professor, Lektor i Kemi og Farmaci ved den Kgl. Landbohøjskole, Ridder af Danebrog og af St. Olafsordenen.

Lange, Johan Martin Christian, Professor, Docent i Botanik ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, Ridder af Danebrog og af den italienske Kroneorden.

Lorenz, Louis, Lærer ved Officerskolen, Ridder af Danebrog.

Mehren, August Michael Ferdinand van, Dr. phil., Professor i semitisk-orientalsk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog og af Stanislausordenens anden Klasse.

Holm, Peter Edvard, Dr. phil., Professor i Historie ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Lund, Frederik Vilhelm, Dr. phil., Professor, Rektor ved Aarhus Kathedralskole, Ridder af Danebrog.

Grundtvig, Svend, Professor i de nordiske Sprog ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Lütken, Christian Fredrik, Dr. phil., Assistent ved Universitetets zoologiske Museum.

Rørdam, Holger Frederik, Dr. phil., Sognepræst til Svogerslev og Kornerup i Sjælland.

Zeuthen, Hieronymus Georg, Dr. phil., Docent i Mathematik ved Kjøbenhavns Universitet.

Schjellerup, Hans Carl Frederik Christian, Professor, Dr. phil., Observator ved Kjøbenhavns Universitets Astronomiske Observatorium, Ridder af Danebrog.

Jørgensen, Sofus Mads, Dr. phil., Lektor i Kemi ved Kjøbenhavns Universitet.

Schmidt, Frederik Theodor, Dr. med., Professor i Anatomien ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Oppermann, Ludvig Henrik Ferdinand, Professor, Lektor i tysk Sprog og Litteratur ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Udenlandske Medlemmer.

Twesten, August Detlew, Professor i Theologien i Berlin, Ridder af Danebrog.

Chevreul, Michel-Eugène, Medlem af det franske Institut, Ridder af Danebrog.

Ehrenberg, Christian Gottfried, Professor i Zoologien ved Universitetet i Berlin.

Weber, Wilhelm, Dr. phil., Professor i Fysik ved Universitetet i Leipzig.

Baer, Karl Ernst v, Dr. phil. et med., Æresmedlem af Akademiet i St. Petersborg.

Airy, George Biddel, Kongl. Astronom ved Observatoriet i Greenwich.

Dumas, Jean-Baptiste, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, Kommandør af Danebrog.

Fries, Elias, Professor emer. i Botaniken ved Universitetet i Upsala, En af de Atten i det Svenske Akademi, Kommandør af Danebrog.

Gottsche, C. M., Dr. med., i Altona.

Olshausen, Justus, Professor, Regeringsraad i Berlin.

Hildebrand, Bror Emil, Kgl. svensk Rigsantikvar og En af de Atten i det svenske Akademi i Stockholm, Ridder af Danebrog.

Lassen, Christian, Professor i orientalsk Filologi i Bonn.

Nilsson, Sven, Professor emer. i Zoologien i Lund, Storkors af Danebrog.

Wöhler, Friedrich, Professor i Kemien i Göttingen.

Milne-Edwards, Henri, Medlem af det franske Institut.

Behn, Wilhelm Friedrich, Dr. med., forhen Professor i Anatomi og Zoologi i Kiel, Præsident for Die Kaiserliche Leopoldino-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher i Dresden.

Peters, Christian August Friedrich, Dr. phil., Professor, Direktør for det astronomiske Observatorium i Kiel, Ridder af Danebrog.

Bunsen, Robert Wilhelm, Professor i Kemien i Heidelberg, Ridder af Danebrog.

Regnault, Henri-Victor, Professor, Direktør for Porcelænsfabriken i Sèvres ved Paris.

Owen, Richard, Superintendent over British Museum og Medlem af det Kongl. Videnskabernes Selskab i London.

Sabine, Edward, Generalmajor, fh. Præsident for det Kgl. Videnskabernes Selskab i London.

Daubrée, A., Professor i Mineralogi ved Jardin des Plantes, Medlem af det franske Institut, i Paris.

Carlson, Frederik Ferdinand, Dr. phil., forhen Professor i Historien ved Upsala Universitet, Chef for Ekklesiastik-Departementet i Stockholm, En af de Atten i det Svenske Akademi, Ridder af Danebrog.

Styffe, Carl Gustav, Dr. phil., Bibliothekar ved Universitetsbibliotheket i Upsala.

Vibe, Frederik Ludvig, forhen Professor i Græsk ved Kristiania Universitet og Rektor ved Kathedralskolen i Kristiania.

Chasles, Michel, Medlem af det franske Institut.

Liouville, Joseph, Medlem af det franske Institut.

Malmsten, Carl Johan, forhen Professor i Mathematik i Upsala, Landshøvding i Skaraborgs Lehn, Kommandør af Danebrog.

Broch, Ole Jacob, Dr. phil., Professor i Mathematik i Kristiania, forhen Chef for det Kgl. Norske Marine-Departement.

Bernard, Claude, Medlem af det franske Institut.

Edlund, Erik, Dr. phil., Professor i Fysik ved det Kongelige Svenske Videnskabernes Akademi i Stockholm.

Svanberg, Lars Frederik, Professor i Kemi i Upsala.

Hooker, Joseph Dalton, Dr. phil., Direktør for den Kongelige Botaniske Have i Kew, Præsident for det Kongelige Videnskabernes Selskab i London.

Rossi, Giambattista de, Commendatore, i Rom.

Rawlinson, Sir *Henry C.,* Generalmajor, bestandig Direktør for det Asiatiske Selskab i London.

Tassy, Garcin de, Medlem af det franske Institut.

Böhtlingk, Otto, Dr. phil., Akademiker i St. Petersborg.

Tornberg, Carl Johan, Professor i Arabisk ved Lunds Universitet.

Mignet, Auguste-Marie, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences morales et politiques de l'Institut de France.

Martin, Bon-Louis-Henri, Medlem af det franske Institut, Ridder af Danebrog.

Boeck, Christian Peter Bianco, Dr. phil., Professor i Fysiologi ved Kristiania Universitet.

Le Verrier, Urbain-J.-J., Medlem af det franske Institut, Direktør for det astronomiske Observatorium i Paris, Ridder af Danebrog.

Bugge, Sofus, Professor i Kristiania.

Amari, Michele, italiensk Senator, i Firenze.

Cobet, Carl Gabriel, Professor i Leyden.

Dozy, Reinhart, Professor i Leyden.

Koehne, Bernhard von, Friherre, keiserlig-russisk Statsraad, i St. Petersborg.

Stephani, Ludolph, keiserlig-russisk Statsraad, i St. Petersborg.

Lovén, Sven, Professor i Stockholm, Ridder af Danebrog.

Kjerulf, Theodor, Professor i Kristiania.

De Candolle, Alphonse, fh. Professor ved Akademiet i Genève.

Lubbock, Sir *John,* Baronet, Vice-Chancellor of the University of London.

Agardh, Jacob Georg, Dr. phil., Professor i Botanik ved Lunds Universitet.

Huggins, William, Dr. phil., fysisk Astronom, i London.

Joule, James Prescott, Dr. phil., Fysiker i Manchester.

Cayley, Arthur, Professor i Mathematik ved Universitetet i Cambridge.

Haan, David Bierens de, Professor i Mathematik ved Universitetet i Leyden.

Ranke, Leopold von, Geheimeregeringsraad, Professor i Historie ved Universitet i Berlin.

INDHOLD.

Side

Fortegnelse over Selskabets Medlemmer . . . . V.

1. **Eug. Warming:** Forgreningsforhold hos Fanerogamerne, betragtede med særligt Hensyn til Kløvning af Væxtpunktet, med 11 Tavler. Résumé en français . . . . 1.

2. **Jul. Thomsen:** Thermochemiske Undersøgelser. XI. Affiniteten mellem Brint og Metalloiderne, med 1 Tavle . . . . 175.

3. **Chr. Fr. Lütken:** Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten Cyamus Latr. eller Hvallusene; med 4 Tavler. Résumé en français . . . . 229.

4. **H. G. Zeuthen:** Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, med Anvendelse af Karakteristikerne i de elementære Systemer af fjerde Orden. Med 5 Tavler. Résumé en français . . . . 285.

5. **Jul. Thomsen:** Thermochemiske Undersøgelser. XII. Undersøgelser over Iltnings og Reductionsmidler . . . . 395.

6. **P. C. V. Hansen:** En Sætning om den Eulerske Faktor svarende til Differentialligningen $M + N\frac{dy}{dx} = 0$, hvor M og N ere algebraiske Functioner af x og y . . . . . 437.

7. **J. Steenstrup:** Hemisepius, en ny Slægt af Sepia-Blæksprutternes Familie, med Bemærkninger om Sepia Formerne i Almindelighed. Med 2 Tavler. Résumé en français . . . . 465.

8. **L. Lorenz:** Experimentale og theoretiske Undersøgelser om Legemernes Brydningsforhold. (Anden Afdeling) . . . . 483.

9. **A. Steen:** Om Muligheden af et Par lineære Differentialligningers Integration ved endelige explicite Functioner . . . . 519.

Forgreningsforhold hos Fanerogamerne,

betragtede med særligt Hensyn til

Kløvning af Vækstpunktet.

Af

Eug. Warming.
Dr. phil.

Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10 B. I.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

1872.

Det kongelige danske Videnskabernes Selskab udsatte for Aaret 1870 følgende naturhistoriske Prisopgave.

«Med Hensyn til de forskjellige Maader, hvorpaa Forgrening kan finde Sted, hvilket staar i nøje Forbindelse med Spørgsmaalet om Knoppernes første Oprindelse, hersker der endnu en Del Usikkerhed og Tvivl.

Hos Blomsterplanterne er det almindelig antaget, at Forgreningen foregaar paa den Maade, at der i Hjørnet af de umiddelbart under Vækstspidsen stillede Blade dannes selvstændige Vækstpunkter, medens det derimod for Karsporeplanternes (navnlig Ulvefodsplanternes og Bregnernes) Vedkommende gjælder som Regel, at Forgreningen sker ved en Kløvning af Vækstspidsen. Der foreligger imidlertid Iagttagelser, som synes at tyde paa, at en lignende Forgreningsmaade ogsaa gjør sig gjældende hos nogle Blomsterplanter, og at herved dels afvigende Forhold i Axernes Stilling (hos *Vitis*), dels Forskydninger (hos *Solaneerne*), dels Mangelen af Dækblade (hos *Bryonia*, *Cyclanthera* og flere *Asperifoliæ*) kunne finde deres Forklaring.

Ligeledes savnes endnu tilstrækkelige Oplysninger med Hensyn til Knoppernes Anlæg og Forgreningsmaaden hos visse hæmmede Blomsterstande. Det vil især være af Viglighed at lære disse Forhold nærmere at kjende hos Vortemælkens Blomsterkop (*Cyamium*), da de hidtil anstillede Undersøgelser over dennes Udviklingshistorie ikke lade sig bringe i Samklang med dens af andre Grunde nu almindelig anerkjendte Betydning som Blomsterstand.

Da det vil være af ikke ringe morfologisk Interesse, at faa de ovenfor antydede Tvivl fjernede, udsætter Selskabet sin Guldmedaille som Belønning for en fyldestgjørende Besvarelse af det Spørgsmaal, om Vækstspidsens Kløvning overhovedet spiller nogen Rolle ved Forgreningen hos Blomsterplanterne, og da hvilken, hvortil ønskes knyttet en Fremstilling af Blomsterkoppens Udvikling hos Vortemælken.

Besvarelsen maa være ledsaget af de til Oplysning af det Fremstillede fornødne Tegninger og Præparater.» (Oversigt over det kgl. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1870, S. 21).

Som Forsøg til en Besvarelse indsendte jeg den 30te Oktober 1871 en Afhandling, der fandtes værdig til Selskabets Guldmedaille. (Se Oversigterne over Selskabets Forhandlinger, 1872, S. 16). Denne Afhandling forelægges her Offentligheden. Den fremtræder med væsenlig samme Indhold og Form som oprindelig. I enkelte Henseender er den forkortet, hvilket er bemærket paa

de specielle Steder, og navnlig har Reduktionen af det oprindelige store Antal Tavler gjennemgaaende medført en Forkortning og Forandring i Henvisninger, ligesom ogsaa alle Beskrivelser og Bemærkninger, der havde Hensyn til de hoslagte Præparater, have maattet stryges. I andre Henseender er den forøget, navnlig i Slutningen, idet jeg har indskudt nogle Iagttagelser af Ægenes Udvikling, af Kløvnings-Forgrening hos Blade, af accessoriske Knopper i Bladakslerne, m. m., der passende slutte sig til det behandlede Thema, og taget Hensyn til nogle Undersøgelser over Vortemælks-Koppens Natur, der ere blevne publicerede efter Indsendelsen af min Afhandling.

Eug. Warming.

I.

Indledning.

Vækstpunktets Begreb og Begrænsning. Vækstpunktklovningens Begreb og Forekomst.

To Spørgsmaal fremstille sig straks for os til Besvarelse, naar vi mere indtrængende ville beskæftige os med Forgreningen hos Fanerogamerne og særligt med Forgrening ved Kløvning af Vækstpunktet. Det ene er, hvad der bør forstaas ved Vækstpunktet hos disse, og det andet, hvad ved Kløvning af samme. Det turde ikke være overflødigt at begynde med en kort Betragtning af disse Begreber; thi hverken er Vækstpunktet hidtil i Regelen blevet begrænset saa skarpt og bestemt, som det efter min Mening bør, ej heller opfattes Vækstpunktklövningen paa samme Maade af alle.

Vækstpunktets Begreb i Almindelighed. Kun faa, maaske ingen, Planter eller Plantedele vokse til enhver Tid af deres Liv ligelig overalt og i alle Retninger, det vil sige, mangle Vækstpunkt [1]). I Almindelighed foregaar Væksten paa enkelte Steder og i enkelte Retninger med större Intensitet end i andre, om den end ikke begrænses til disse alene, og derved fremkomme Vækstpunkter. Hyferne af *Bryopsis* og *Vaucheria* vokse vel ved Intussusception over en stor Del af deres Vægge, men Stofoptagelsen sker dog fortrinsvis paa visse Steder, i Spidsen af dem, hvor Cellevæggen er tyndere og af en anden Beskaffenhed [2]); her ere deres «puncta vegetationis». Hos de flercellede Planter foregaar Væksten i anden Instans ved Celledeling; denne kan foregaa samtidig overalt i Planten eller Plante-

[1]) Naar Nägeli siger t. Ex. om Palmellaceerne (Die neuern Algensysteme, S. 123): «Die Zelle besitzt bloss allseitiges Wachsthum und in Folge dessen ein immer bestimmtes Verhältniss der verschiedenen Durchmesser, und somit eine bestimmte Gestalt», turde det maaske dog ikke gjælde de i Deling værende Celler.

[2]) Nägeli, Die neuern Algensysteme, S. 171.

delen, men der er næppe noget Organ, i hvilket den ikke idetmindste til en eller anden Tid af dets Liv foregaar med større Kraft paa bestemte Steder end paa andre, og paa hvilke Steder Cellerne ikke have noget andet Maal for deres Arbejde end det at tilføre Organet nye Celler. Den eller de Celler, som arbejde med dette Maal for Øje, udgjøre Organets Vækstpunkt. Fordringerne, som man maa stille til et Vækstpunkts Celler, ere derfor disse: de maa være ensartede med Hensyn til deres specielle Arbejde, Organets Vækst, og den dermed følgende Bygning og Form, og ved disse Forhold træde i en mere eller mindre tydeligt udtalt Modsætning til de andre Organet sammensættende Celler.

Idet de fleste Vækstpunkter ere beliggende i den voksende Plantes eller Plantedels Overflade og arbejde i en bestemt Retning, ordnes de Planten opbyggende Elementer om en bestemt Længdeaxe, hvis Top indtages af Vækstpunktet (apikalt Vækstpunkt). Men der forekommer ogsaa, om end sjeldnere, Vækstpunkter, som under deres Arbejde stadigt indskyde de nye tilførte Elementer mellem ældre, der begrænse dem til Siderne; saadanne Vækstpunkter, der kunne kaldes «interkalerende», have t. Ex. Karkryptogamernes og Fanerogamernes Rødder. Ogsaa hos saadanne ordnes de tilførte Dele i Forhold til en bestemt Længdeakse.

Vækstpunktets Bygning og Begrænsning. Da det ikke er min Agt her at give andet end nogle indledende Bemærkninger om min Opfattelse af Vækstpunktet, skal jeg kun fremsætte nogle faa Betragtninger af mere almindelig Natur, der nærmest gjælde det topstillede (apikale) Vækstpunkt.

Hos de encellede Alger vil det, saa vidt de foreliggende Iagttagelser antyde, være umuligt skarpt at omskrive Vækstpunktet. Cellehinden hos t. Ex. *Bryopsis* gaar jævnt over i den helt uddannede Væg; Vækstpunktet har et Centrum, fra hvilket Intensiteten i Stofoptagelsen jævnt aftager udad og nedad; en bestemt Grænse er derved umulig.

Hos Flertallet af Kryptogamer indtages den voksende Plantedels Top af en enkelt Celle, Topcellen. Dennes Væsen ligger mindre deri, at den indtager Organets Top, end i at den har en for hver Art bestemt Form, deler sig paa streng lovbestemt Maade, og i at alle Organets Celler staa i et bestemt Anordnings- og Nedstamningsforhold til den, hvorfor den ogsaa t. Ex. af Pringsheim er bleven kaldt Vækstcellen[1]. Det specielle Maal for dens Arbejde er Tilførslen af nye Celler til Organet, eller dettes Vækst. Den udgjør derfor disse Planters Vækstpunkt. Heri er jeg imidlertid i Uoverensstemmelse med Flertallet af Botanikere. Disse regne ikke blot denne, men en Mængde andre i Organets Spidse beliggende Celler med til Vækstpunktet, hvilket jeg straks nedenfor skal omtale.

---

[1]) Den Oversigt over Topcellens Form og Arbejdsmaade, jeg oprindelig havde indskudt her, udelades nu, da Knys Afhandling siden den Tid er udkommen, hvor en lignende Sammenstilling findes: «Sitzungsberichte der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin», 16de Jan. 1872.

Homologe med det encellede Vækstpunkt hos Flertallet af Kryptogamerne er det flercellede hos den anden Del af dem med de forskjellige Modifikationer, under hvilke det kan optræde: med Cellerne ordnede efter en Linie, en «Vækstkant», (s. Ex. *Pellia*, *Halyseris*, *Padina*), i en Flade (Ex. Fucus), eller i en Gruppe efter Rummets tre Retninger, hvorunder endelig ogsaa maa henføres Vækstpunktet med adskilte Meristemer, som vi have det hos Fanerogamernes Kaulomer.

Da det i denne Afhandling nærmest er disses Forgrening, der er Gjenstand for Undersøgelse, bør vi ogsaa skænke deres Vækstpunkt en særlig Opmærksomhed.

Det er paa Fanerogamernes Kaulomer, at Benævnelsen Vækstpunkt først fandt Anvendelse. Hvad C. F. Wolff[1]) forstod ved sit «punctum vegetationis» eller «superficies vegetationis» see vi af § 43 og 46 i «Theoria generationis» (2den Udg. 1774); det er «extremitas axeos», eller den Del af Stængelen, der ligger ovenfor de yngste Blade, der er konvex af Form (hos *Brassica* og *Castanea*), der aldrig er dækket af «epidermis et cortex vel alia pars solida sicca», der, som den nøgne Ende af «axis medullaris», er meget lidt forskjellig fra denne og derfor er «humida, succis gravida, pellucida, vitrea». — Wolffs «punctum vegetationis» er identisk med de fleste senere Botanikeres «Vækstspids», «Vækstkegle», «Vegetationskegle», «Kambiumkegle», «Axespids», o. s. v., det er altsaa den nøgne i Regelen kegledannede Stængelspids, regnet ned omtrent til den første udvendig synlige Sidedannelse (som man i Regelen antog for et Blad[2]).

Det var en ren ydre Grænse, som man saaledes afpælede, og den manglede det faste nødvendige Grundlag, som først et nøje Kjendskab til Bygningen i det Indre kunde give; men den fik en Art Berettigelse, idet den støttedes af den gængse Anskuelse om «Vækstkeglens» histologiske Bygning, thi med Hensyn hertil var det lige til den nyeste Tid en almindelig Antagelse, at hele «punctum vegetationis», Stængelspidsen, omfattede et «Chaos» (Schleiden) af «smaa runde Celler af indbyrdes samme Værdi», «et Urparenchym» (Schacht), «Kambium» (Schleiden) eller «Meristem» (Nägeli), som var i den livligste Celleformering ved Deling i alle Retninger og ikke engang havde en udpræget Overhud. Uden at det maaske er blevet bestemt udtalt, se vi altsaa dog den Fordring stillet, at Vækstpunktet skal være dannet af ensartede Elementer, og først hvor Væv af en anden Natur findes udprægede, maa man sætte Grænsen; dette, antog man, fandt Sted omtrent ved den øverste Sidedannelse, og man havde maaske ogsaa

---

1) Theoria generationis; 1759; 2den Udg. 1774 (her citeret).

2) Jeg maa foreslaa Benævnelsen «Vækstpunkt» i Stedet for «Vækstspids», «Vækstkegle» og andre, og det af følgende Grunde. For det første er Navnet «punctum vegetationis» det ældste, det, der blev til samtidig med, at Begrebet overhovedet opkom. For det andet er «Vækstpunkt» et almindeligt Begreb, og bør derfor ikke belægges med et Navn, der dels betegner en speciel Modifikation, dels i mange eller endog i alle Tilfælde vil være urigtigt eller upassende. For det tredie anvendes det nu almindeligt af mange Botanikere som Hofmeister, Hanstein o. fl., om ikke med den specielle Begrænsning, som jeg giver det.

i enkelte Tilfælde fundet det saaledes; denne blev derfor ogsaa en bekvem og tilsyneladende naturlig Grænse; men iøvrigt ere Angivelserne om dette Punkt — Vækstpunktets Begrænsning — højst ufuldstændige og vage, en naturlig Følge af vore Kundskabers Standpunkt, der atter havde sin Grund i Vækstpunktcellernes Lidenhed og Undersøgelsesmethodernes Ufuldkommenhed. Endnu for tre Aar siden se vi Nägeli og Leitgeb[1]) angive, at der i Spidsen af Blomsterplanternes Rødder altid er et «scheinbar ungeordnetes Meristem», hvorfor deres talrige Bestræbelser for at følge Væksten Skridt for Skridt ikke førte dem til noget Resultat.

I nyere Tid rettede navnlig Hofmeister[2]) og Müller[3]) deres Undersøgelser hen paa at finde en Topcelle som Kryptogamernes, og saaledes finde en Enhed i Vækstmaaden gjennem hele Planteriget, som for den filosofiske Naturbetragtning vilde have noget meget Tilfredsstillende. I nogle Tilfælde angive de ogsaa at have fundet en saadan. Men Urigtigheden heraf er imidlertid paa uimodsigelig Maade paavist af Hanstein.

Efterat nemlig allerede Naudin[4]), Caspary[5]) og Sanio[6]) havde givet nogle faa Antydninger af det rigtige Forhold, var det Hanstein, som i 1868 først lærte os den virkelige Bygning af Blomsterplanternes «punctum vegetationis» at kjende ved Undersøgelser, der vare udstrakte til de forskjelligste Familier[7]). Det tilsyneladende Chaos i Stængelspidsen klaredes og viste sig ordnet paa den smukkeste Maade i tre selvstændige Cellevæv, for hvilke Hanstein dannede Navnene Dermatogenet, Periblemet og Pleromet, hvilke allerede ere gaaede over i den almindelige Bevidsthed.

Da Hansteins Undersøgelser omfattede Planter af de forskjelligste Familier, var det at antage, at hans Resultater vilde have almen Gyldighed. Det blev rigtignok af Pringsheim paastaaet[8]), at *Utricularias* Stængler vokse som visse Lønbloplanters ved en kileformet Topcelle, men Hanstein har gjendrevet dette[9]), og andre Botanikere saasom Pfitzer[10]), Schmitz[11]) og Reinke[12]) have bekræftet Rigtigheden af hans Undersøgelser i Almindelighed. Endelig har han ved sit nyeste Arbejde[13]) paavist, at den første Udprægning af disse Væv finder Sted allerede ved de første Celledelinger i Forkimens Endecelle,

[1]) Nägelis Beitr. z. wissensch. Bot. IV, 1868, S. 138.
[2]) Beitr. z. Kenntn. d. Gefässkrypt. II., i Abhandl. d. sächs. Ges. d. Wissensch. V., 1857. S. 643 og Handb. I, S. 136 og S. 513.
[3]) Pringsheim, Jahrb. V., S. 147.
[4]) Ann. d. sc. nat., Ser. III., t. 1, 1844, S. 162.
[5]) Bot. Ztg. 1859. S. 133.
[6]) Bot. Ztg. 1864, S. 223 og 1865, S. 165.
[7]) «Die Scheitelzellgruppe im Vegetationspunkt der Phanerogamen», Bonn 1868.
[8]) Monatsber. d. Berlin. Akad. 1859.
[9]) Botan. Ztg. 1870, S. 23.
[10]) Pringsheims Jahrb. VIII, og Monatsber. d. Niederrhein. Gesellsch. 1870.
[11]) Bot. Ztg. 1870, S. 37. [12]) ibd. S. 55.
[13]) «Die Entwickelung des Keimes der Monokotylen und Dikotylen», Bonn 1870.

og at navnlig Dermatogenet anlægges tidligt og selvstændigt; derved er Muligheden af en Topcelles Forekomst (med en Væsensbestemmelse som Kryptogamernes Topcellers) fuldstændig umuliggjort; Hofmeisters, Müllers og Pringsheims forefundne Topceller reduceres til øverste Celler i Dermatogenet, og kun de nærmest Lønbloplanterne staaende Blomsterplanter synes paa deres første Ungdomstrin ikke ganske at kunne frigjøre sig fra hines Vækstmaade[1]).

Efter at vi saaledes have erhvervet os en ny Opfattelse af Stængelspidsens Bygning, vil ogsaa Spørgsmaalet om Vækstpunktets Begrænsning stille sig anderledes. Fordringen til det er naturligvis den samme som tidligere, at det skal have histologisk og funktionel Ensartethed. Spørge vi nemlig nu om, hvad vi ifølge disse Undersøgelser maa betegne som «Vækstpunkt» for Fanerogamernes Kaulomer, da maa jeg henvise til de Celler, som Hanstein kalder «Initialerne». Hver Afdeling af det meristematiske Væv i Stængelspidsen ender i en enkelt eller i en Gruppe af nogle faa Celler, som indlede Celleformeringen, som skride foran ved Væksten, og som have denne til eneste Formaal. Disse opfylde altsaa den Betingelse, som man maa stille til et Vækstpunkt. Rigtignok er der den Vanskelighed ved at opfatte dem som saadant, at de tre Initialgrupper ifølge Hanstein ere uafhængige af hverandre, altsaa ikke danne nogen Enhed i strængeste Forstand; men dog gaa de op i den højere Enhed, nemlig i alle at arbejde paa den hele Axes Længdevækst og alene paa denne; det er ved dem, at Stængelen fortrinsvis vokser; og alle en Stængels Celler nedstamme derfor i nærmere eller fjernere Slægtled fra dem.

Af de tre Initialgrupper er det iøvrigt lettest at paapege Plerominitialerne[2]), fordi de ved deres alsidige Celledelinger danne en lille Gruppe af uordnet Meristem, der netop derved udpræger sig fra de regelmæssige Peromrækker nedenfor og de kappeformede Periblemlag ovenfor og til Siderne. I Periblemet og Dermatogenet er det derimod vanskeligt eller i de fleste Tilfælde umuligt at paapege en enkelt Initialcelle eller en Gruppe af saadanne, der træde frem blandt de øvrige som disses Anførere. Det er egenlig kun muligt at bestemme disse to Vævs Initialer relativt, nemlig i Forhold til Pleromimitialerne; de ere de lodret over disse, i Skuddets Midtaxe liggende Celler, i hvilke Celledelingen maa antages livligere end længere nede; kun i Dermatogenet kan man undertiden paavise en bestemt tilsyneladende foranskridende Celle, uden at det dog er lykkedes hidtil at paavise en Norm for dens Celledeling i Lighed med Kryptogamernes Topcellers. Hvad der endvidere giver Pleromet en større Betydning fremfor de andre Afdelinger er, at det er fra det, at hele Marv- og Karstrængsystemet, altsaa Axens Hovedmasse og det egentlig blivende i den, ned-

[1]) Pfitzers «Untersuchungen über die Entwickelung des Embryo der Coniferen», Monatsber. d. Niederrhein. Gesellsch. Bonn. 1871; cfr. Bot. Ztg. 1871, S. 893.

[2]) Hanstein, L. c. S. 115—116.

stammer. Ikke uden Grund siger Hanstein derfor ogsaa, at Plerom-Initialerne have mere Krav paa at ansees som Ækvivalent for den kryptogame Topcelle end Dermatogen-Initialerne. Vil man hos Blomsterplanterne søge Topceller, maa man for Eftertiden søge dem under Dermatogenet, og virkelig mener Sanio ogsaa at have fundet saadanne, der delte sig med vekselsvis hældende Vægge, hos *Hippuris*, *Elodea* og maaske nogle andre Vandplanter[1]), en Angivelse som dog næppe er rigtig, hvad Celledelings-Maaden angaar.

Endskjøndt Hanstein betitler sin Afhandling: «Die Scheitelzellgruppe im Vegetationspunkt», og i Overensstemmelse med Wolff synes at benytte det sidste Ord som Benævnelse for den nøgne Stængelspids[2]), vil han dog efter sin egen Fremstilling af «Scheitelzellgruppens» (de samtlige Initialers) Betydning være enig med mig i, at den er det egentlige Vækstpunkt, og derfor bør den efter min Mening have dette Navn.

Ligeledes forholder det sig med Sachs. Denne siger nemlig[3]) ligefrem: Spidsen af Stænglerne (Bladene, Rødderne) indtages af et Urmeristem, «aus welchem nach und nach durch verschiedene Ausbildung (Differenzirung) die verschiedenen Formen des Dauergewebes hervorgehen»; den af Urmeristem bestaaende Stængelspids kaldes «Vegetationspunktet»; men Urmeristemet opstaar og regenereres «von den am Scheitel des Vegetationspunktes liegenden Zellen», som han i det følgende nærmere betegner som Topcellen hos Kryptogamerne og den Hansteinske «Scheitelzellgruppe» hos Fanerogamerne. Denne Celle eller Cellegruppe er jo da aabenbart det egenlige Vækstpunkt og bør have dette Navn.

Jeg vil her end videre fremhæve, at der hos Sachs kun er Tale om en histologisk Begrænsning af Vækstpunktet, hvilket ogsaa ligger i Sagens Natur, da «Vækstpunkt» er et fysiologisk-histologisk Begreb, og at der intet Hensyn tages til Sideorganerne; naar man tidligere satte «Vækstkeglens», altsaa Vækstpunktets Grænse ved det yngste Blad, da var det vel nærmest, fordi man i al Fald der ogsaa maatte antage en histologisk Grænse, og antog, at Anlæggelsen af Kambium og andre blivende Væv allerede begyndte ved det yngste Blads Grund. Kun for saa vidt som der ogsaa virkelig findes en væsenlig histologisk Grænse paa dette Punkt, kunde det maaske spille denne Rolle. Finder man da der en saadan Grænse? Naar det i Bedømmelsen af denne Afhandling[4]) udtales, at dette er Tilfældet, maa jeg benægte det og skal senere i den specielle Del nærmere bevise det. De alleröverste Sideorganer og den Del af Stænglen, som de sidde paa, befinde sig nemlig ofte i den samme meristematiske Tilstand, og deres Celler have ofte en Form, der væsenlig er den samme som de Cellers, der findes i selve Stængelspidsen. Enten maa da Grænsen for Vækstpunktet sættes lig hele Urmeristemets, saaledes som Sachs synes tilbøjelig til at gjøre, og maa saa falde ubestemt[5]) ofte

---

[1]) Bot. Ztg. 1865, S. 184, 186 og 191. [2]) se t. Ex. Bot. Ztg. 1870, S. 23. [3]) Lehrb. der Botanik. 1870. S. 113—14. [4]) Oversigt over det Kgl. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1872. S. 22. [5]) cfr. Sachs, l. c., S. 113, Noten, og Hansteins «Scheitelzellgruppe», S. 125.

nedenfor flere af de yngste Sideorganer, eller man maa tage Hensyn til den allerede i Urmeristemet selv forekommende Udprægning af de enkelte Celler til forskjelligt Arbejde, der ganske vist er af en finere Art, men ikke desto mindre er tydelig paavislig. Der er da ingen Grund til at tilskrive de Udprægninger større Betydninger, der sigte til Anlæggelsen af Sideorganer, end dem, der have Organets egen indre Bygning til Maal; det eneste Hensyn, der tages bør, er, om en Udprægning til forskjelligt Arbejde finder Sted eller ikke. Men i saa Tilfælde maa Topcellen og Topcellegruppen blive Vækstpunktet. De videnskabelige Fremskridt i Planteanatomien og Morfologien afhænge navnlig af den skarpere Sondring mellem Organerne eller mellem de dem sammensættende Dele, og det er en Fordring, som bør stilles til enhver videnskabelig Undersøgelse, at uensartede Ting ikke sammenfattes under samme Benævnelse. Hvad der funktionelt er forskjelligt, bør ogsaa adskilles og benævnes med forskjellige og adækvate Navne, selv om de med den forskjellige Funktion følgende Forskjelligheder i Form og Bygning ere mindre iøjnefaldende. Nu finder der ganske vist ikke blot i Urmeristemet, men langt nedenfor dette, Celledelinger Sted, ved hvilke Organet faktisk tager til i Volumen, d. e. vokser; men naar undtages det egenlige Vækstpunkts Celler, have disse Celledelinger alle et specielt Maal, der ikke er Væksten, men den indre og ydre Udformning og Udprægning af Organet og af Vævene. Disse Celler have derfor intet med det egenlige Vækstpunkt at gjøre[1]).

Skulde nogen have Betænkelighed ved, at give Topcellegruppen hos Fanerogamerne Navn af Vækstpunkt, fordi vi ikke kunne skarpt omskrive den, men lades i Tvivl om, hvorvidt en paa Grænsen liggende Celle skal regnes med til den eller ikke, da vil denne Betænkelighed kunne opstaa hos ham ved enhver som helst anden Begrænsning, han vil forsøge at give.

Hvor løs Forbindelsen er mellem Vækstpunktet for det hele Organ og de først fremtrædende Sidedannelser, sees ogsaa af følgende. At Bladstillingen ikke er afhængig af Vækstpunktets Bygning, er velbekjendt; *Pillularia* og *Marsilia* have tetraedrisk Topcelle, men toradede Blade, *Salvinia* har omvendt en tvesidet kileformet Topcelle, men en treradet Bladstilling. Hos flere Alger er Topcellen den eneste Celle i det hele Thallom eller Thallomgren, der overhovedet deler sig (*Coleochæte*, *Oedogonium*, *Calithamnion*, *Antithamnion*

[1]) I enkelte Tilfælde er det vel ikke lykkedes at paapege den specielle Betydning, som allerede de første uden for Vækstpunktet (i snævrere Forstand) forekommende Celledelinger have; i andre er dette derimod sket paa den smukkeste Maade. Jeg skal saaledes blot minde om Knys Undersøgelser af Væksten hos *Metzgeria furcata* (Jahrb. f. wiss. Botanik IV og V, cfr. ogsaa Figurerne i Sachs's Lehrb. 1870, S. 116); Brauns og Pringsheims af *Chara* (Jahrbücher III Bd., 1863; Sachs l. c. 269), Leitgebs af Mosserne (se Botan. Ztg. 1868, S. 573), Reess's af *Equisetaceerne* (Pringsheims Jahrbücher, VI, 1867, S. 209), Pfeffers af *Selaginella* (»Die Entwickelung des Keimes der Gattung *Selaginella*«, i Hansteins »Botanische Abhandlungen«, Bonn, 1871). Erindres kan det ogsaa her, at der hos *Utricularia* findes udviklede Trichomer ovenfor de yngste Phyllomer og Kaulomer.

o. fl.[1]); der kan ingen Meningsforskjel være om, at den udgjør det hele Vækstpunkt. Naar Sidegrene opstaa, fremkomme de imidlertid hos nogle først af den 2den, 3die, o. s. v. Segmentcelle, men forøvrigt som ellers i akropetal Følge; naar man vilde regne Vækstpunktet ned til den første Sidegren, fik man Celler op i Vækstpunktet, der ikke længer ere i den meristematiske Tilstand. Hos *Bryopsis* er Vækstpunktets Beliggenhed tydelig, om end ikke skarpt begrænset; den første Sidegren opstaar imidlertid tydeligt langt nedenfor det.

Da der altsaa ikke i Stængelen findes en naturlig Grænse for Vækstpunktet ved den yngste Sidedannelse, da det ikke er muligt at henføre det hele Urmeristem i et Kaulom eller den hele «Vækstkegle», «Vækstspids» hos de ældre Botanikere under Begrebet Vækstpunkt, uden deri at indbefatte Celler, som have andre specielle Opgaver end den, at sørge for Væksten, da den stræng videnskabelige Forskning fordrer en skarp Adskillelse af alt, hvad der naturligen fremtræder forskjelligt, da der endelig i Stængelspidsen af de fanerogame Planter findes en Celle eller Cellegruppe, der kan paavises at opfylde den Fordring, som maa stilles til et «Vækstpunkt», maa jeg anse denne Celle eller Cellegruppe — Topcellen eller Topcellegruppen — for det egenlige Vækstpunkt og betegne den som saadan. Den nøgne Ende af Stængelen, den ovenfor den yngste Sidedannelse liggende Del, vil jeg benævne Stængelspidsen.

Det andet Spørgsmaal, som vi maa besvare, er dette: Hvad skal der forstaas ved en Forgrening ved Vækstpunktkløvning?

Jeg omtalte ovenfor, at idet det apikale Vækstpunkt, som er det, hvormed vi nærmest have at gjøre, arbejder i en bestemt Retning, ordnes Delene i Forhold til en bestemt Længdeaxe. En Forgrening finder nu Sted, naar nye Vækstpunkter fremtræde, men vel at mærke Vækstpunkter for Organer, der ere ensartede med det, paa hvilket de opstaa; det er en Forgrening, naar Vækstpunktet for et Trichom, Kaulom, etc., opstaar henholdsvist paa et andet Trichom, Kaulom etc., men ikke, naar et Trichomvækstpunkt danner sig paa et Phyllom, et Phyllomvækstpunkt paa et Kaulom etc. De nye Vækstpunkter fremtræde som Vækstpunkter af en højere Orden i Forhold til det gamle.

Der er to væsenlige Modifikationer af Forgrening, der staa som de to Yderpunkter: den ægte Sideforgrening og Forgrening ved Vækstpunktets Kløvning. Hvorledes disse skulle bestemmes og begrænses, er det her først vor Opgave at undersøge[2]).

Som første Moment maa følgende fremhæves. En Forgrening, ved hvilken det

[1]) Nägeli, Die neuern Algensysteme, S. 198, ff.

[2]) Nyere Arbejder, der gaa særligt ind paa Spørgsmaalet om Kløvningen, ere Rohrbachs: Beiträge zur Kenntniss einiger Hydrochorideen, 1871, og Knys Meddelelser i «Sitzungsberichte der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin», 1871, 19de Dec., og 1872, 16de Jan., til dels aftrykte i Botan. Zeitg. 1872, S. 341.

nye Vækstpunkt anlægges helt til Siden for eller nedenfor det gamle, saaledes at dette aldeles ikke berøres af hints Dannelse, men uforstyrret fortsætter sit Arbejde, er en ægte Sideforgrening. Ved Vækstpunktkløvningen maa derimod nødvendigvis selve Vækstpunktet direkte paavirkes, og undergaa en væsenlig Forandring med Hensyn til sit Arbejde; det nye Vækstpunkt maa opstaa indenfor dets Omraade. Nogle Exempler ville bedre belyse dette.

Holde vi os først til Lønboplanterne med encellet Vækstpunkt, da kan der kun være Tale om ægte Vækstpunktkløvning, naar de nye Vækstpunkter opstaa umiddelbart af selve Topcellen; opstaar en Knop i en Segmentcelle, selv om det var den aller yngste, er det en Sideknop; og bliver Hovedaxen under sin senere Vækst trængt af Knoppen ud af sin Retning, saa at de begge ligemeget divergere fra den gamle Vækstretning, da dannes der en Pseudodichotomi. Saaledes er Forholdet t. Ex. hos *Metzgeria furcata*, i al Fald i enkelte Tilfælde[1]), og saaledes benævnes dens Forgrening ogsaa af dens Opdager, Kny[2]).

Heri ere imidlertid ikke alle enige med Kny og mig. Sachs[3]) t. Ex. finder det tænkeligt, at «en ægte Dichotomi» kunde komme i Stand hos Lønboplanterne med Topcelle uden Længdedeling af denne, derved at den gamle Topcelle straks efter Dannelsen af en ny ved Siderne af sig forandrer sin Vækstretning; «die alte Scheitelzelle repräsentirt dann den Scheitel einer neuen Wachsthumsrichtung und darauf scheint es mir bei der Unterscheidung von Dichotomie und Monopodium vorwiegend anzukommen». Til Sachs slutter Pfeffer sig[4]), og som det synes ogsaa Hofmeister efter en Udtalelse i «Handbuch», I, S. 412.

Denne Opfattelse kan jeg aldeles ikke gaa ind paa; skal Vækstretningen sættes som det vigtigste Kriterium ved Bedømmelsen af en Forgrenings Natur, bliver Følgen, at mangen en Forgrening, ved hvilken Knoppen opstaar langt nedenfor Vækstpunktet, bliver, skjøndt ægte Sideforgrening, tydet som Kløvning og omvendt. Hvad det her kommer an paa, er den første Grundlæggelse af Organerne, men denne er *en* Ting, deres senere Uddannelse en anden, der vel bør holdes ude fra hin. Grundlægges det ene Vækstpunkt i en Celle, der ikke er fremkommen ved Deling af den gamle Topcelle paa en Maade, som er forskjellig fra den, paa hvilken denne tidligere delte sig, har Topcellen ikke undergaaet nogen væsenlig Forandring i sit Arbeide, selv om der muligvis indtræder en Forandring i Vækstretning. Men denne Forandring i Topcellens Delingsmaade er for mig det første Punkt, der bør tages Hensyn til i denne Sag[5]).

Naar Nägeli og Leitgeb[6]) fordre, at de to Grene skulle være «gleichwerthig in ihrem Ursprunge», da er det, som man vil se af det Følgende, en af de Fordringer, som

---

[1]) jfr. Hofmeister, Handb. I, 413. [2]) Pringsheims Jahrb. IV, 72. [3]) Lehrb., 2det Opl., S. 154, Anm.
[4]) Die Entwickelung des Keimes der Gattung *Selaginella*, S. 47, 56, o. s. v.
[5]) Hvad jeg her har udtalt, findes sagt med næsten de samme Ord i den efter min Nedskrivning publicerede Afhandling af Kny i «Sitzungsberichte etc.», 19de Dec. 1871. Cfr. Botan. Ztg. 1872, S. 341 ff. [6]) Nägeli, Beitr. IV, S. 126, og Sitzungsber. d. bayr. Akad. 1866, 2, S. 553.

ogsaa jeg stiller til en Vækstpunktkløvning; men naar de ikke blot anse den Forgrening for ægte Dichotomi, ved hvilken de to Grene anlægges i Topcellen, men ogsaa den, ved hvilken de anlægges i de to sidste Segmentceller, saaledes at Topcellen mellem disse bliver undertrykt i sit Arbejde, da maa jeg vel erklære dette for en Dichotomi, men for en lige saa uægte som Sachs's nylig omtalte og som den Dichotomi, der findes paa en Syringagren, hvis Endeknop er fejlslaaet; det er en Forgrening, der fuldstændig modsvarer det af Sachs[1] givne Skema for en falsk Dichotomi, ikke blot deri, at begge Skud faktisk ere Sideakser, men endog deri, at den ene af dem nødvendigvis maa staa højere end den anden og rimeligvis ogsaa være yngre end den. Vækstpunktet er her vel blevet hæmmet i sin Udvikling, men ikke delt.

Som første Fordring maa jeg altsaa fastholde, at alle Kløvningsknopper nødvendigvis maa have deres Oprindelse fra Vækstpunktet. Men dermed er ikke sagt, at enhver Knop, som direkte udvikles fra dette, er en Kløvningsknop. Af Sphacelarierne gives der nogle Slægter, hvis Grene udvikle sig af de øverste sekundære Celler, Segmentcellerne, medens de hos andre (*Stypocaulon* o. s. v.) udvikles af selve Topcellen[2]. Hine ere ægte Sidegrene, men disse sidste ere det ogsaa, thi Spidsen af Topcellen fortsætter sin Længdevækst i samme Retning upaavirket af Grendannelsen, der foregaar langt nede paa Cellens Side. Her kan Forholdet dog maaske rigtigst opfattes saaledes, at ikke den hele Topcelle kan antages at repræsentere Vækstpunktet, men kun den øverste Spids af den, i Lighed med Hyfernes hos t. Ex. *Bryopsis*. Det nye Vækstpunkt har da i Virkeligheden dannet sig udenfor og nedenfor det gamle.

Men selv hvor en saadan speciel Udprægning indenfor Topcellens lille Omraade ikke kan paavises, og den hele Væg i lige Grad deltager i Arbejdet ved Optagelsen af nyt Stof, bliver en Knopdannelse fra den ikke straks at opfatte som Kløvning. En saadan kan foregaa paa flere Maader, idet Topcellen dog altid maa opgive sin hidtidige Delingsmaade. Den kan saaledes dele sig ved en lodret, d. e. en i Stængelens Midtlinie liggende Væg i to Halvdele af lige Størrelse og Værdi; dette er Tilfældet t. Ex. med den af Sachs (efter Nägelis neuere Algensyst., Tab. V, Fig. 12—16) i Lehrb. 2det Opl., Fig. 125 opførte *Dictyota dichotoma* og angives af Hofmeister for mange af de højere Lønboplanter[3]. Eller den kan dele sig som hos *Coleochæte soluta*[4], eller *Udotea*[5]. Vækstcellens Spids bliver flad og faar derefter en Indsænkning paa sin Midte, idet der til Siden for denne dannes to Udkrængninger, der senere hos den første ved Cellevægges Uddannelse afgrænses fra Modercellen, hos den sidste vedbliver at staa i Forbindelse med denne, men i begge Tilfælde ere Vækstpunkter af lige Værdi.

---

[1]) Lehrb. 2det Opl. Fig. 127. [2]) Geyler, zur Kenntniss der Sphacelarien, Pringsheims Jahrb. IV, 479. [3]) Vergl. Untersuchungen t. Ex. S. 115 o. s. v. [4]) Pringsheim i Jahrb. II, S. 7. [5]) Nägeli, l. c. 177, Tab. II. Fig. 27.

Hvad der er fælles for disse Delingsmaader af Vækstpunktet og maa sættes som den anden Fordring til den ægte Kløvning, er, at Væksten i det gamle Vækstpunkts Centrum standses overfor de to (— flere) ud til Siderne for det fremkommende nye Vækstpunkter, der tillige helst maa anlægges samtidigt, og derfor kunne modsvare Navnet Tvilling-Vækstpunkter. Længdevæksten i Retning af den gamle Axe hører derved nødvendigvis op, og nye Axer opstaa, som støde sammen i hins Midtlinie, og hvis Vækstretning ialfald i Begyndelsen vist altid divergerer en Smule fra den gamles; hvor længe de beholde deres ligelige Udvikling, om de fremdeles skulle udvikle sig gaffelformigt eller den ene ved Magtran vil komme til at danne et Pseudomonopodium i Forbindelse med Moderaxen, er en anden, men for os her uvæsenlig Omstændighed.

En Betragtning af Kløvningsfænomenerne, som de vise sig hos de med et flercellet Vækstpunkt forsynede Thallusplanter, vil væsentlig lette os Forstaaelsen af Kløvningen hos Blomsterplanterne.

Smukkest ere Knys Undersøgelser af *Pellia epiphylla* og *Riccia*[1]. Thallomgrenene af disse Planter vokse ved en Række af tæt til hverandre sluttende Celler, som indtage Løvets organiske Spidse og alle ere af samme Værdi. Kløvningen finder Sted derved, at Længdevæksten hæmmes i de i Midten liggende af disse Celler, men fortsættes i de til Siderne liggende, hvorved to Grene opstaa, hvis Vækstretning i al Fald i Begyndelsen divergerer fra Moderaxens. Jeg maa kalde dette en ægte Kløvning af Vækstpunktet, men det vilde være det i endnu højere Grad, hvis der ingen Celler lodes tilbage i Midtlinien, men de to Cellegrupper, der danne de nye Vækstpunkter, stødte umiddelbart op til hinanden netop i Midtlinien. Dette vilde være en ligesaa ren og ægte Kløvning, som naar Topcellen deler sig ved en lodret Væg[2].

Overføres det, som vi have lært af Lønboplanterne, paa Blomsterplanterne, bliver den første theoretiske Fordring altsaa denne: Kløvningen maa foregaa ved Celledelingsprocesser i Vækstpunktet.

Jeg har ovenfor vist, at Initialerne for de meristematiske Væv («Topcellegruppen») i Stængelspidsen tilsammentagne maa betragtes som Vækstpunkt, der fuldstændigt modsvarer Lønboplanternes Topcelle eller Komplex af jævnbyrdige Topceller; jeg kan derfor aldeles ikke forstaa, at Rohrbach[3] kan sige, at Lønboplanter og Blomsterplanter ere saa forskjellige, «dass sich schwerlich ein für beide Klassen des Pflanzenreichs allgemein gültiges Gesetz der ächt dichotomischen Verzweigung wird geben lassen», og at der for de sidste ikke skulde kunne gives en streng Definition af Dichotomien. Spørgsmaalet om, hvorledes en ægte

[1]) Pringsheim, Jahrb. IV, S. 90—95 og V, S. 368—76. [2]) Se fremdeles Kny og Magnus om dette Spørgsmaal i «Sitzungsberichte der Gesellschaft naturforsch. Freunde zu Berlin» 1871 og 1872. [3]) L. c., S. 15 eller overhovedet S. 14—24.

Kløvning maa gaa for sig, bliver ganske vist lidt vanskeligere at besvare formedelst deres mere komplicerede Bygning; men Loven maa være den samme for begge Klasser.

Vi maa gaa ud fra Betragtningen af Sideknoppernes almindelige Dannelsesmaade. Hanstein har[1]) paavist, at denne hos Blomsterplanterne foregaar ved Optrædelsen af Celledelinger i Periblemet, uden at nogen bestemt Enkeltcelle kan fremhæves som den anførende eller som den fælles Stammemoder for alle de andre; tilsidst træde vel ogsaa Pleromdelinger med op. Ved denne Celledannelse drives de oven for liggende Cellelag passivt i Vejret, og navnlig gjælder dette i alle Tilfælde om Dermatogenet, til hvilket Kaulom-Dannelser aldrig alene er henlagt. Hører det altsaa med til Knoppens Væsen at opstaa i Moderaxens Periblem, da maa vi ogsaa vente og forlange af Kløvningsknopperne, at de maa opstaa i Peribleminitialerne. Det er nu imidlertid min Anskuelse, som jeg nedenfor nærmere skal begrunde, for det første, at Forskjellen mellem de som kappeformede Periblemlag og de som rækkeordnede Pleromceller udprægede Væv i Stængelspidsen ikke er saa væsenlig, naar man holder sig til deres Form, som Hanstein maaske antager, og for det andet, at Knopperne i alt Fald i enkelte Tilfælde straks ogsaa drage Celler, som maa regnes til Pleromrækkerne i Moderaxen, med ind i Arbejdet. Er dette rigtigt, maa vi ogsaa kunne vente, at Kløvningen i nogle Tilfælde udgaar fra Pleromintialerne, og strængt taget kunde man, da disse egenlig ere Modercellerne for Hovedmassen og det væsenlig Blivende af Axens Cellevæv, altid forlange det som Tegn paa den ægte Kløvning.

Fordringen til en Forgrening hos Blomsterplanterne, for at den skal have Navn af Kløvning, maa altsaa først være denne: de to (— flere) Knopper maa i alt Fald for en Del have deres Oprindelse umiddelbart fra Vækstpunktets Celler. Den anden Fordring er, at de maa grænse op til hinanden i Vækstpunktets Centrum, det vil med andre Ord sige i Stængelspidsens Top[2]), hvor Længdevæksten tidligere havde størst Intensitet, men nu hæmmes, medens de nye Tvilling-Vækstpunkter optage den hver i sin Retning. Jo livligere Pleromet tager Del i Dannelsen af de nye Vækstpunkter, jo nærmere disse grænse op til hinanden, og jo mere de fortjene Navnet «Tvilling»-Vækstpunkter, desto mere ægte vil Kløvningen være.

Det er de færreste Tilfælde, i hvilke jeg ikke har kunnet endog temmelig nøje bestemme Vækstpunktets Beliggenhed, og tillige har jeg fundet, at Pleromrækkernes Løb give et bekvemt og sikkert Middel i Hænde til at bestemme Midtliniens Beliggenhed i et Organ og altsaa Beliggenheden af en Celle eller en Nydannelse i eller udenfor den. Fra denne Side vil det altsaa byde færre Vanskeligheder at bestemme en Forgrenings Natur, og be-

[1]) «Scheitelzellgruppe» o. s. v., S. 121 ff.

[2]) Selv om man ikke vil slutte sig til min Opfattelse af Vækstpunktets Begrænsning hos Planterne, staar dog saa meget fast, at Topcellen hos Kryptogamerne og Topcellegruppen hos Fanerogamerne (Hansteins «Scheitelzellgruppe») indtage Vækstpunktets Midte, og at det er umuligt ved Undersøgelser over Spørgsmaalet om Sideforgrening eller Kløvning ikke at maatte tage den særlig i Betragtning.

grebsmæssigt kunne vi ogsaa vel adskille Sideforgrening fra Kløvning. Men et andet Spørgsmaal er, om de to Arter af Forgrening ere skarpt adskilte i Naturen.

Paa den ene Side have vi altsaa Forgrening ved lige Deling af Vækstpunket og den derved dannede Grundlægning af nye Vækstpunkter d. e. Kløvning (Gaffeldeling, Dicho—Polytomi). Paa den anden Side have vi den rene Sideforgrening, der ogsaa sees kaldt «ægte Forgrening» (f. Ex. af Kny, Sitzungsberichte l. c. 102), med dens forskjellige Modifikationer (t. Ex. Knoppens Dannelse før, efter, eller samtidig med Støttebladet). Men hermellem ere Overgange ikke blot tænkelige, men forekomme ogsaa.

Se vi tilbage til Kryptogamerne, give t. Ex. Pringsheims Undersøgelser over Coleochæterne os udmærkede Antydninger[1]). Fremhæve skal jeg blot, at vi hos *Col. scutata* have Kløvning ved Topcellens Deling ved en lodret Væg; hos *Col. soluta* Kløvning paa den ovenfor (S. 14) anførte Maade og med Overgange i Sideforgrening, og hos *Col. pulvinata* ægte Sideforgrening som hos de fleste forgrenede Conferver. Ligeledes har Müller fundet[2]), at *Metzgeria furcata* vel i de fleste Tilfælde forgrener sig, som Kny har angivet, men i andre Tilfælde ved ægte Kløvning, som Hofmeister havde anført[3]). Det er altsaa ikke blot indenfor samme Slægt, men selv, som det synes, indenfor samme Art, at forskjellige Forgreningsmaader kunne forekomme. Og hvor let Overgangen er fra den ene til den anden, deraf giver Nägeli og Schwendeners Skema[4]) os et Exempel. Tillige viser det os, hvor rig en Lejlighed der allerede her, hvor Vækstpunktet har sin simpleste Form, kan være til Meningsforskjellighed om en Forgrenings Natur.

Men en langt rigere Lejlighed kan man a priori sige sig at Fanerogamernes mangecellede Vækstpunkter maa frembyde, hvad følgende Betragtning vil vise. Det er nemlig ikke blot tænkeligt, men jeg skal i den specielle Del af denne Afhandling søge at vise, at der ogsaa i Naturen forekommer det Tilfælde, at nogle i Topcellegruppens (Vækstpunktets) Omkreds liggende Celler frigjøre sig fra den større ovrige Masses Overherredømme og begynde Dannelsen af et nyt Vækstpunkt, uden at det gamle Centrum ellers deraf paavirkes i sit Arbejde saaledes, at det forandrer Beliggenhed eller Vækstretning. Vækstpunktet er da blevet delt, men der har ingen Kløvning fundet Sted; men tag *en* Celle til fra det gamle Vækstpunkt og læg til det nye, og derpaa en anden, en tredie, fjerde o. s. v., — og vi føres langsomt over til den ægte Kløvning, ved hvilken lige kraftige, og lige meget excentriske Vækstpunkter ere opstaaede paa det gamles Bekostning som Tvillingsøstre fra en fælles Moder; gaa vi den modsatte Vej og tage fra det excentriske Vækstpunkts øvre Side og lægge til paa dets nedre, føres vi lige saa jævnt over til den ægte Sideforgrening nedenfor Vækstpunktet.

---

[1]) se Jahrb. II, Tab. I og 2. [2]) Pringsheim, V, 255 ff. [3]) Vergl. Unters. 23. Sammenlign iøvrigt Kny, Sitzungsber. l. c. S. 108, Botan. Ztg. 1872, S. 346, om dette specielle Tilfælde som overhovedet om hele Spørgsmaalet. [4]) «Das Mikroskop», S. 588.

Vi ville saaledes have at skjelne mellem for det første: den ægte Sideforgrening, ved hvilken Knopdannelsen aldeles ikke udgaar fra Vækstpunktet; og for det andet den Forgrening, ved hvilken dette er Tilfældet, hvilket jeg med Zoologernes Benævnelser for Øje vil kalde Deling af Vækstpunktet. Af denne haves saa atter to Modifikationer, efter som Delingen er lige eller ulige, efter som Delingsplanet gaar gjennem Vækstpunktets Midte eller ikke; den første Modifikation, den lige Deling, benævnes da specielt Kløvning (Dicho-Polytomi).

Naar Magnus[1]) udtaler, at «alle die Fälle, wo Theile des Scheitels selbst der Mutterachse zu den Scheiteln der neuen Achsen werden, zur Dicho- resp. Polytomie gehören», kan jeg altsaa lige saa lidt som Dr. Kny gaa med ham i dette Punkt. Endnu mindre kan jeg billige den tilføjede Indskrænkning[2]), at Dichotomi aldrig kan antages at have fundet Sted, hvor en Gren staar i en bestemt Relation til et Led af Axen, t. Ex. et Blad, selv om Grenen anlægges nok saa nær Spidsen («der Scheitel») af Axen. Selv om der findes en Kausalforbindelse mellem Anlæggelsen af Bladet og dets Akselknop, som fører til at denne anlægges i bestemt Forhold til hint, lige over det, og vi kjendte den, vil man i Spørgsmaalet om Kløvning eller Ikke-Kløvning af Axen, dog kun have at tage Hensyn til de Celledelingsprocesser, der finde Sted i Vækstpunktet. Deler dette sig, som jeg har angivet, i to lige Dele, gaar Centrum for den livligste Vækst over i en relativ Uvirksomhedstilstand, har en Kløvning efter min Mening fundet Sted, hvad enten Knopperne staa i et bestemt Forhold til Blade og andre Sideorganer («Led» paa Axen) eller ikke. Min Opfattelse af Forholdet mellem Blad og Akselknop, hvorom senere, tillader mig heller ikke denne Bestemmelse ved «Kløvningen».

Endnu et Spørgsmaal er at tage under Overvejelse i denne Sag. Mange Botanikere lægge en særlig Vægt paa Kløvningsknoppernes senere Uddannelse og gjøre det afhængig af denne, hvorvidt de ville betragte en Forgrening som Kløvning eller ikke. Aug. St. Hilaire forstaar ved Kløvning («partition» [3]) «la partage d'une tige en deux axes formant une bifurcation», idet han forøvrigt ved «partition» netop forstaar det, at selve Axen (Begrebet «Vækstpunkt» har han næppe) kløver sig i to Grene, af hvilke den ene ikke kan siges at være født af den anden[4]). Tillige synes han, saavel som Guillard og andre, at fordre, at de to Grene skulle være aldeles ens, som et Legeme og dets

[1]) Sitzungsberichte der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin, 19de Dec. 1871, S. 111, og Bot. Ztg. 1872, S. 349.

[2]) Sitzungsberichte etc. 16de Jan. 1872, S. 11.

[3]) Morphologie, S. 126.

[4]) Hans ægte «Dichotomi» er derimod igjen noget andet, nemlig den i Kvaste med modsatte Blade forekommende Gaffeldeling.

Spejlbillede, og t. Ex. stemme saaledes i Bladstilling, at hver enkelt af Kløvningsgrenene kan betragtes som Moderaksens Fortsættelse. For en anden Del Botanikere er det derimod en ligegyldig Sag, om de to Kløvningsknopper uddanne sig nok saa forskjelligt[1]). Til disse maa jeg slutte mig.

Jeg kommer her tilbage til, hvad jeg alt et Par Gange har berørt, at det alene er de første Udviklingstrin, der her kunne komme i Betragtning, og altsaa de Processer, der foregaa i selve Vækstpunktet ved Knoppernes Anlæggelse. Hvorledes de dannede Knopper senere ville udvikle sig, er en Sag af anden og ringere Betydning. Vi begrænse «Kløvningen» for snævert, naar vi lægge Vægten paa, at de to Grene skulle danne en Gaffelgrening, om vi end maa vente, at de i deres allerførste Anlæggelse ville gjøre dette, og vi begrænse den ogsaa for snævert, naar vi fordre en senere ensartet Uddannelse. En saadan hører vist til de største Sjældenheder; ja jeg tror endog, at man ikke engang tør forlange en oprindelig fuldstændig Ensartethed; to Tvillingsøstre kunne jo dog være temmelig forskjellige straks ved Fødselen, og jeg tror i den specielle Del at kunne vise, at der forekommer Tilfælde, i hvilke Væksten ophører i det gamle Skuds Midtlinier ved nye Knoppers Dannelse fra selve Vækstpunktet, hvorved altsaa Fordringen til en Kløvning er opfyldt, uden at de to Kløvningsknopper dog ere lige kraftigt anlagte.

Hermed tror jeg at have tilstrækkelig klart udviklet, hvad jeg opfatter som «Forgrening ved Vækstpunktkløvning».

Vækstpunktkløvningens Forekomst. Min Opgave her er Undersøgelser af de i Naturen virkelig forekommende Forhold, ikke literaturhistoriske Betragtninger, som have grumme liden Betydning for Løsningen af naturhistoriske Spørgsmaal. Men en kort Oversigt over de vigtigste foreliggende Iagttagelser og Anskuelser om Kløvningens Forekomst vil dog være paa sin Plads, dels for at tilvejebringe en større Afrundethed i Afhandlingen, dels som Udgangspunkt for de efterfølgende egne Undersøgelser, og for at det mulig Nye kan sees i det rette Forhold til det allerede Givne. Jeg maa imidlertid foreløbig paa dette Sted indskrænke mig til blot at nævne disse Iagttagelser og Anskuelser; det vilde føre mig for vidt, hvis jeg paa mere end nogle enkelte Punkter vilde indlade mig paa kritiske Betragtninger, Undersøgelser over hver enkelt Forfatters Anskuelser med Hensyn til Kløvningens Begreb (der tilmed oftest ikke ere tilstrækkelig tydeligt pointerede), m. m. Kun for saa vidt som jeg selv gjør de samme Planter til Gjenstand for Studium, vil dette ske i den speciellere Del.

---

[1]) t. Ex. Clos, Bull. Soc. bot. Fr. IV, 265, Magnus Sitzungsber. etc. 1871, S. 111, eller Bot. Ztg. 1872, Nr. 19.

Hos Thallusplanterne synes Kløvning af Thallomets Vækstpunkt at være en temmelig hyppig Forgreningsmaade. Allerede Nägeli, Pringsheim, Hofmeister og Kny have tidligere anført en Del Planter, hos hvilke den forekommer, saasom de tildels ovenfor alt nævnte *Coleochæte*-Arter, *Udotea*, *Dictyota*, *Metzgeria*, *Pellia*, o. fl.[1]), og nylig have Kny og Magnus end yderligere forøget Antallet paa disse fortrinsvis ved Undersøgelser over Algerne[2]).

Men saasnart vi ere komne op til de ægte bladbærende Planter, bliver denne Forgreningsmaade sjeldnere, og hos enkelte store Grupper af Kryptogamer synes ægte Sideforgrening at være den alene forekommende, saasom hos Characeerne, Bladmosserne og Padderokkerne. Derimod angives det i Almindelighed, at Vækstpunktkløvning er den normale Forgreningsmaade hos Lycopodiaceerne og Bregnerne, og da det samme udtales i den Opgave, hvis Besvarelse jeg her forsøger, vil jeg ikke tilbageholde nogle Indvendinger herimod.

Ifølge Mettenius er det Brongniart[3]), der først fremsatte denne Anskuelse. Senere finde vi den hos t. Ex. Cramer[4]), men navnlig er det Hofmeister, som gjentagne Gange og med største Bestemthed har hævdet den, og det ikke blot for Røddernes og Stænglernes Vedkommende, men selv det fjersnitdelte Bregneblads Forgrening foregaar efter ham ved en fortsat ægte Kløvning af Topcellen, saaledes at det afvekslende er den højre og venstre Kløvningsknop, der kastes til Siden og uddannes som Bladafsnit, medens den anden tiltager sig Hovedafsnittets Vækstretning og paany kløver sig[5]). Da det navnlig er Hofmeister, der har udbredt denne Opfattelsesmaade af disse Planters Forgrening, vil jeg lidt nærmere omtale hans Angivelser.

Med Hensyn til Lycopodiaceerne siger Hofmeister, at de give «einige der am schärfsten ausgeprägten Beispiele ächter Gabelung einer Stengelspitze, die im Pflanzenreiche überhaupt vorkommen»[6]), og denne indledes ved Topcellens Deling ved «en streng vertikal Væg»; det samme gjælder Rødderne hos *Selaginella* (l. c. S. 117). Om end flere af de af Hofmeister citerede Figurer intet bevise, fordi de ere Habitusbilleder, saasom Fig. 4, 6, 7 og 8, T. XXIII, eller lidt for gamle Udviklingstrin, som Fig. 11, T. XXIII, og om han end ikke giver Hovedbeviset for sin Antagelse ved en Figur, der giver os Billedet af Topcellens Deling ved den omtalte lodrette Væg, bliver det dog ved Sammen-

[1]) Cfr. Nägeli i «die neuern Algensysteme»; Pringsheim i Jahrbücher II, Hofmeister i Vergleich. Untersuchungen, Kny i Pringsheims Jahrb. IV og V.

[2]) Se Sitzungsberichte naturforsch. Freunde zu Berlin, 1871, S. 103, og 1872, S. 1; cfr. Bot. Ztg., 1872, Nr. 19. Min i den oprindelige Afhandling her givne Oversigt over de kjendte Tilfælde udelades nu med Henvisning til Knys.

[3]) Hist. vég. foss. II, S. 30.

[4]) Botanische Beiträge, 1855, S. 10.

[5]) Vergleich. Untersuchungen, S. 88; Beiträge z. Kenntniss d. Gefäss-kryptogamen, II, S. 616.

[6]) Vergleich. Untersuchungen, S. 115.

stilling af Fig. 10 og 12, Tavle XXIII meget sandsynligt, at en ægte Kløvning har fundet Sted. Men en vis Tvivl, om han ikke alligevel har været for rask i sine Slutninger, maatte dog opstaa, naar man saa, hvor vanskeligt det var for Nägeli og Leitgeb i deres 16 Aar senere offentliggjorte Undersøgelser[1], til trods for den yderste Grad af Omhyggelighed og Samvittighedsfuldhed, at komme til et sikkert Resultat, ikke blot med Hensyn til, om en ægte Kløvning virkelig forekommer hos *Lycopodium*, men endog med Hensyn til Topcellens Form. De slutte saaledes: «es bleibt somit auch die Frage, ob die Verzweigung ursprunglich dichotom oder monopodial sei, noch unerledigt». Lignende Vanskeligheder for Undersøgelsen byde *Selaginellas* gaffeldelte Rødder, og ved lignende Tvivl nødes de til at blive staaende ogsaa for disses Vedkommende[2]; men skulde det være rigtigt, at disse anlægges «in den der Scheitelzelle benachbarten Segmenten», saa findes der ingen Kløvning i strængeste Forstand[3]) (se ovenfor, S. 13).

Al. Braun var den første, der gjorde opmærksom paa den hos Rødderne af *Isoetes* forekommende Gaffelgrening. Hofmeister udtrykker sig med en vis Varsomhed[4] med Hensyn til det afgjørende Moment: «Det synes, at Kløvningen indledes ved Længdedeling af Rodspidsens Celle af 1ste Grad»; naar man dertil lægger Nägelis og Leitgebs Tvivl endog med Hensyn til Topcellens Form[5], tør jeg vel sige, at det endnu ikke er bevist, at ægte Kløvning virkelig findes hos denne Plante.

Ogsaa hos *Salvinia natans* har Hofmeister antaget Forgrening ved «Gabelung» af den endnu bladløse Spidse[6]; her var det Pringsheim, som paaviste hans Fejl[7], og bestemt udtaler sig mod en Gaffeldeling, idet han antager, at denne Plantes Knopper ere en Art Adventivknopper paa «Vandbladet».

---

[1] Nägelis Beiträge, IVde Hefte, 1867, S. 121—122.

[2] L. c. 128, 129.

[3] Efter Nedskrivningen af disse Bemærkninger udkom Pfeffers Afhandling: «Die Entwickelung des Keimes der Gattung *Selaginella*» i de af Hanstein udgivne «Botanische Abhandlungen», Hefte 4, 1871. Den af ham, S. 56 ff., hos *S. Martensii* skildrede «Gabelung» er efter mine Opfattelse ingen virkelig og ægte Kløvning, thi den ene af hans to Kløvningsknopper har Topcellen for det hele Skud uforandret til Vækstcelle, og den anden opstaar i den yngste Segmentcelle, som er opstaaet af hin; den dannes selvfølgelig udenfor Centrum. Skulde Forgreningen hos *S. Kraussiana* foregaa ved, at den primære Topcelle helt nedlagde Arbejdet, medens to, til højre og til venstre for den liggende Segmentceller optage det, maa jeg kalde denne Forgrening en Pseudodichotomi (se ovenfor S. 13). Derimod bør Kimplantens første Forgrening opfattes som ægte Kløvning, fordi Enderesultatet af de Celledelinger, ved hvilke den kileformet-4-sidede Topcelle udvikles af den kileformet-tvesidede og de to nye Topceller anlægges (se Pfeffer l. c. S. 44 ff.) er, at Væksten i Midtlinien af den gamle Axe ophører (se hans Tab. IV), og herpaa maa det efter min Opfattelse mere komme an, end paa, at to nye Vækstretninger fremtræde.

[4] Beitr. z. Kenntn. d. Gefässkr. I. S. 147.

[5] L. c. S. 135—38.

[6] Beiträge z. Kenntn. d. Gefässkr. II, S. 669; se ogsaa Pringsheims Jahrb. III, S. 487.

[7] Jahrb. III, 507.

Hvad den anden Rhizocarpé, *Marsilia*, angaar, er Forgreningen endnu ikke kjendt med tilstrækkelig Nøjagtighed, og det samme gjælder Bregnerne. Det er med Hensyn til disse atter Hofmeister, der har været Bannerfører for Kløvningstheorien[1]; Akselknopper mangle ifølge ham aldeles; alle Grene ere enten Adventivgrene, som opstaa nedenfor allerede anlagte Blade og paa Bladstilkene, eller de ere «Gabelzweige». Mettenius imødegik Hofmeister[2] og paastod, at Forgreningen foregaar ved Sideknopper, der staa i bestemte Stillingsforhold til Bladene, og at der kun er det afvigende fra Blomsterplanternes Forgrening, at Knoppen ikke er saa strængt bunden til Bladakselen, men kan staa snart halvt, snart helt udenfor denne eller endog under Bladet paa Stilkens Ryg, eller paa dens Side. Hofmeister imødegik ham[3], og fremhæver, at han fremdeles maa antage, at den ægte Forgrening her er en Gaffelgrening, om hvilken han udtaler sig saaledes: (l. c. 280): «Abweichend von den durch Mettenius gegebenen Definitionen möchte ich Seitenknospen solche nennen, welche oberhalb der Insertion des jüngsten Blattes aus der nackten Stammspitze hervortreten, also durch Gabelung des Stammendes sich bilden, dafern sie, schwächer sich entwickelnd, durch die andere Gabeltheilung des Stammendes seitwärts abgedrängt werden; Adventivknospen aber solche, welche unterhalb der Einfügung des jüngsten appendiculären Organs zum Vorschein kommen, gleichviel ob an den Aussenflächen oder im Inneren von Geweben. Als Dichotomien würden dann die Fälle gleichmässiger Ausbildung beider Gabelzweige zu bezeichnen sein». Beviset for en saadan «Gabelung» har han imidlertid ikke givet; S. 281 (l. c.), angiver han, at meget tidlige Udviklingstrin viste ham «die beiden Achsenenden als gleichgrosse, flach kegelförmige Erhebungen»; men da de vare saa gamle, at enhver af dem allerede var omgivet af tre Blade, kan der ikke (hvad han egenlig ogsaa selv siger sammesteds) søges det allermindste Bevis for en virkelig Kløvning deri, at de ere lige store, ej heller deri, at hver af dem med Hensyn til Bladstilling kunde betragtes som Hovedaxens Fortsættelse. Men naar han (S. 282) angiver, at det er «für die Aechtheit der Gabeltheilung völlig beweisend», at der paa en lang nøgen Stængelspids af Ørnebregnen fandtes en Gren ligeledes uden Bladanlæg, viser det rigtignok ogsaa, at han maa forstaa andet ved «Gabeltheilung», end jeg ved «Kløvning», og at han lader det egentlige Vækstpunkt, Topcellen, ude af Betragtning i denne Sag. At hin Gren er udsprungen fra samme Topcelle som den anden, der danner Stænglens Fortsættelse, viser han ikke, og kan han vel heller ikke antage, og er den ikke det, er det efter min Opfattelse ingen Kløvningsknop, men en Sideknop[4].

---

[1]) Vergl. Unters., og Sächs. G. d. Wiss., V, 1857, S. 603 ff.

[2]) Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., VII, 1861, S. 621 og 627.

[3]) Pringsheims Jahrb., III, 278—83, se ogsaa Hofmeisters Referat i Flora 1863, S. 171 af Stenzels Afhandl. om Bregnerne i N. A. C. C. L. 28.

[4]) Se t. Ex. ogsaa Hansteins Indvendinger i Pringsheims Jahrb., IV, 1865, S. 242—43.

Det er klart, at Forgreningen hos Bregnerne maa studeres i deres Histologi; saa længe den ikke er det, kan jeg ikke føle mig overbevist om, om der findes ægte Kløvning af Vækstpunktet eller ikke, og indtil videre maa jeg erklære som min Overbevisning, at der ingen Grund foreligger til at antage, at Bregne-Kaulomerne forgrene sig ved ægte Kløvning af Vækstpunktet.

Men hvad Hofmeister her udtaler om Bregnernes Forgreningsmaade, overfører han paa alle andre bladbærende Planter, selvfølgelig ogsaa Blomsterplanterne.

Hvad Blomsterplanterne, og særlig deres Kaulomer, angaar, forekomme Angivelser af Forgrening ved Vækstpunktkløvning meget sparsomt indtil 1853. Af de ældre Morfologer opfattes Kløvningen vist overhovedet kun som et teratologisk Tilfælde, dog at de gaffeldelte Stængler og Rødder hos en Del Kryptogamer maaske undtoges herfra. Hos St. Hilaire[1]) er Fasciation det første Skridt til Kløvning. Ligesaa hos Link[2]). Al. Braun siger bestemt, at Skuddet er «untheilbar», og at «en umiddelbar Deling af Stænglen» slet ikke forekommer som normal Udviklingsgang hos Blomsterplanterne; kun Fasciationer bero paa en virkelig Deling af Vækstpunktet i to lige Dele «af samme Værdi»[3]).

Hos Mercklin findes dog, allerede 1846, en Bemærkning om Knopdannelsen, efter hvilken, hvis den var rigtig, Kløvning vilde være det normale Forgrenings-Forhold hos alle Blomsterplanter. Den lyder saaledes: «Eine in der Entwickelung begriffene Nebenaxe unterscheidet sich leicht von jenem Wärzchen (ɔ: det unge Blad), dem sie in der Gestalt anfangs sehr ähnlich sicht. Sie erscheint nicht excentrisch an der Peripherie der Axenspitze, sondern anfangs in einer Ebene mit ihr, so dass die Axenspitze durch einen Spalt wie in zwei ganz gleiche Theile getrennt ist[4])». Begrebet «Kløvning» har han ikke, men han beskriver her aabenbart Kløvningens Fænomen.

Men ved Aar 1853 fremkomme de første udtrykkelige Angivelser af Vækstpunktkløvningens Forekomst i bestemte Tilfælde. Schacht anfører da[5]) som saadanne: Forgreningen af de underjordiske Stængler hos *Corallorhiza* og *Epipogum*, af Knoldene hos *Orchis mascula*, *Habenaria* og flere Orchideer, af Rødderne hos *Alnus*, *Zamia spiralis* og andre Cycadeer. Men iøvrigt erklærer han, at Kløvningen er en sjelden Forgreningsmaade, som han aldrig har iagttaget hos vore Træer.

---

[1]) Leçons de botanique, S. 126. [2]) Elem. phil. bot. I, S. 324.

[3]) Se «Das Individuum», S. 57. Ligeledes hedder det i «Über Polyembryonie u. Keimung von *Coelobogyne*», 1860, S. 112: «Es ist ein morphologisches Grundgesetz aller höheren Gewächse, dass der Vegetationspunkt sich nicht theilen, sondern zur einfachen blattbildenden Achse entwickeln soll».

[4]) «Zur Entwickelungsgeschichte der Blattgestalten», 1846, S. 20.

[5]) Der Baum, 1ste Udg., S. 105; Flora 1853, S. 10. Senere i «Beiträge zur Anatomie u. Physiologie der Gewächse» 1854, S. 120, 123 ff., S. 142, S. 160.

[6]) Botan. Zeitung, 1853, S. 609.

Ved samme Tid udtalte Pringsheim i en Anmeldelse af Schachts «Der Baum»[1], at Kløvning («Theilung der Achsenspitze») forekommer i en stor Mængde Tilfælde, med Sikkerhed hos *Vallisneria* og *Hydrocharis*; «in vielen, vielleicht in allen Fällen möchte die durch Entwickelung und Ausbildung von Axillarknospen bedingte Verzweigung auf eine fortgesetze Theilung der Axenspitze zurückzuführen sein».

Denne Anskuelse tiltraadtes to Aar efter af Irmisch[2], der betegner Knopdannelsen hos nogle *Juncus-* og *Scirpus-*Arter som «eine sehr frühzeitige Theilung der Achsenspitze», og ligeledes senere[3] antager, at det er en almindelig Regel, at alle Akselknopper opstaa ved «Theilung des Vegetationspunktes», medens Roden i sin Forgrening følger samme Lov som de fleste Adventivknopper, dog med enkelte Undtagelser, i hvilke ogsaa den forgrener sig ved Kløvning (t. Ex. Ophrydeernes Rodknolde).

Men hvem der navnlig greb denne Tanke og gav den almindelig Udstrækning, var Hofmeister. Han var, som vi nys saa, ført til at antage Forgrening ved Kløvning («Gabelung») af Stængelspidsen hos saa at sige alle højere Lønboplanter; det tiltalte hans geniale Opfattelse af Naturen at se den udstrakt til alle Planter, og ved en kunstig Hypothese paatvang han Mosserne[4] og derpaa Blomsterplanterne den samme eller dog en lignende Forgrenings-Maade. I Pringsheims Jahrb. III, 1863, siger han: «Nichts ist gewisser, als dass die Anlage eines Seitenzweiges in allen bisher untersuchten Fällen umittelbar nach Anlegung des sogenannten Tragblattes in das Dasein tritt, und dass das in verticaler Richtung nächst höhere Blatt erst um Vieles später sich bildet». Dette kalder han «Gabelung». I hans nyeste Arbejde gjentages det[5]: «Neue Nebenachsen erheben sich aus der Fläche des Vegetationspunktes früher, dem Scheitel näher, als die jüngsten Anlagen von Blättern», og: «nirgends ist es gelungen das Hervorsprossen einer Seitenachse unterhalb bereits angelegter Blätter einer Hauptachse zu beobachten.» Og derpaa tilføjes: «Da die Ursprungsstelle des jeweilig jüngsten Blattes stets tiefer liegt, als der Ort, an welchem eine jüngste Nebenachse über den Umfang des Achsenendes heraustritt, so kann jede in der Region des Vegetationspunktes erfolgte Anlegung seitlicher Achsen als eine Theilung der nackten, die jüngsten Blattanlagen überragenden Spitze des Stengels aufgefasst werden»[6].

Vi maa her et Øjeblik betragte Hofmeisters Udtalelser om Forgreningen overhovedet. Hans Begrænsning af «Vegetationspunktet» afviger, som allerede antydet, fra min; medens jeg betegner Topcellen hos Lønboplanterne med Navnet «Vækstpunkt», regner Hofmeister mange flere Celler med til dette[7]; men hvor Grænsen da maa sættes

[1] Botan. Zeitung, 1853, S. 609.
[2] Botan. Ztg., 1855, S. 61.
[3] Flora 1856, S. 696, Botan. Zeitung 1857, S. 492.
[4] Pringsheims Jahrb., III, 272.
[5] Allgemeine Morphologie, 1868, S. 411.
[6] Sammenlign hermed l. c, S. 429.
[7] Se t. Ex. Allgem. Morph., I, S. 132—33.

bestemmes ikke nøjere[1]). Dog synes hans Henvisning[2]) til Wolffs «Theoria generationis» og hans Ord[3]) at antyde, at han slutter sig til denne, og at Vækstpunktet for Kaulomer er identisk med, hvad han ogsaa kalder «Stammende», «Stammspitze», «Scheitel des Stammes» o. s. v, min «Stængelspids». Men med Hensyn til hans Opfattelse af Begrebet «Kløvning» af Vækstpunktet er det vanskeligere at komme paa det rene, dels fordi han bruger forskjellige Benævnelser som «Theilung», «Gabelung», «Dichotomi», «gabelige Theilung» o. fl., uden altid at give en skarp Bestemmelse af dem, dels fordi han ofte bruger lidet bestemte Udtryk som «Region des Vegetationspunktes», «Scheitelgegend» o. fl.

Jeg citerede nys (S. 24) hans sidste Udtalelser om Forgreningen (fra Aar 1868). De ere aabenbart i Overensstemmelse med hans Bemærkninger om Bregnernes Forgrening (fra Aar 1863) (Se Citaterne S. 22). Dog er det vel værd at lægge Mærke til, at han her bruger Ordet «Gabelung», Gaffeldeling eller Kløvning, men i hans senere Udtalelser «Theilung», Deling, af hvilken den «gabelige Theilung» er en Modifikation[4]).

Det er ogsaa klart, at «Gabelung» vil være en højst uheldig Benævnelse for en Forgrening, som han selv skildrer saaledes: «In der grossen Mehrzahl der Fälle ist bei der Anlegung neuer Achsen am nackten Stängelende die Tendenz des Stängels zum Fortwachsen in der bisher eingehaltenen Richtung so ganz überwiegend, dass vom ersten Moment an nur eine neue Wachsthumsrichtung hervortritt, während der Stängelscheitel in der ursprünglichen Richtung kräftig fortwächst. Der Zweig erscheint von seinem ersten Auftreten an als seitliche Bildung; wo er auf eine Anfangszelle zurückgeführt werden kann, wie bei Laubmoosen, da liegt diese weit seitab von der Längslinie der Hauptachse»[5]).

Jeg maa forstaa Hofmeister saaledes: Enhver normal Sideknop opstaar paa Stængelspidsen d. e. Vækstpunktet; dette kan betragtes som en «Deling» af dette, og en-

---

[1]) I Bot. Ztg. 1869, 623 begrænser Müller Vækstpunktet hos Planter «mit einzelligem Scheitel, bei welchen alle Segmente Blattanlagen entsprechen» til kun at omfatte Topcellen. I Pringsheims Jahrb., V, S. 256—57 henregner han ogsaa den Segment-Celle hos *Metzgeria*, i hvilken Grenen ifølge Kny opstaar, til Vækstpunktet, fordi den ikke er traadt ud af Meristemtilstanden. Men hvad er da Kjendemærket paa denne? Er det, som hans Ord antyde, den «definitive Strækning» (l. c. 258), og altsaa Ophør af Celledelingsevnen, maa Grændsen lægges langt ned i Stænglen, og Stængelspidsen alene bliver ikke Vækstpunkt.

[2]) L. c., S. 128. [3]) L. c. S. 411—12.

[4]) Pringsheim, til hvem Hofmeister (i Allg. Morph., S. 412) henviser som Begrunderen af denne Forgreningstheori, kalder den ogsaa «Theilung» og anfører *Hydrocharis* og *Vallisneria* som smukke Exempler herpaa. Disse to Planter ere netop ogsaa udmærkede Exempler paa «Kløvning» i min Betydning. Da Pringsheim imidlertid ogsaa betegner Forgreningen hos *Coleochæte soluta* som det eneste Exempel paa ægte «Gabelspaltung», skulde man tro, at hans «Theilung» var noget andet og forskjellig fra min «Kløvning». Hofmeister satte den 1863 identisk med sin «Gabelung» (Se Jahrb. III, 279). Rohrbach bruger «Theilung» som ensbetydende med «Kløvning». Kraus og Kaufmann bruge derimod «Gabelung» og «Dichotomie». Det vilde være i høj Grad ønskeligt, om man fik Fasthed i disse Benævnelser.

[5]) Allgem. Morphol., S. 413.

hver Knopdannelse beror altsaa paa en Vækstpunktdeling. Heraf gives der en særlig Modifikation, naar Delingen nemlig bliver en «Gaffeldeling» eller en Kløvning. Om han tidligere har opfattet al Knopdannelse som en maskeret «Kløvning», ved jeg ikke, skjøndt jeg skulde tro det; men nu synes han ikke at gjøre det, og naar der er Botanikere, som mene, at Hofmeister lader enhver Knopdannelse foregaa ved «Kløvning», er det altsaa næppe rigtigt.

Hoveddifferentsen mellem Hofmeister og mig beror da fortrinsvis paa den forskjellige Opfattelse af Vækstpunktet; men dernæst ogsaa paa hans Opfattelse af den «ächte Gabelung». I nogle Tilfælde falder denne ganske sammen med min, som naar han[1]) fordrer Hovedaxens «völlige, sofortige Aufgebung der bisherigen Entwickelungsrichtung im Momente der Anlegung beider seitlichen Abzweigungen», eller at Topcellen skal halveres ved en Længdevæg og «zwei von der bisherigen Längslinie des Stängels und von einander divergirende neue Wachsthumsrichtungen gleicher Intensität» optræde[2]).

I andre Tilfælde udtaler han sig ganske i Overensstemmelse med Sachs, som naar han[3]) lader Udviklingsretningen være afgjørende, og kalder det «eine Gabelung» (hvorved han rigtignok udelader Ordet «ächte»), naar en ny Vækstretning optræder «in der unmittelbarsten Nähe des Scheitelpunktes einer gegebenen Achse» og trænger «der wachsende Scheitel der Achse» ud af dens hidtidige Retning. Denne Opfattelse har jeg alt imødegaaet.

Imidlertid ville vi dog af Hensyn til Hofmeisters Meninger have at fæste vor Opmærksomhed ved følgende to Spørgsmaal:

for det første, om det er rigtigt, at en ægte Sideknop aldrig anlægges nedenfor allerede dannede Blade. Med Hensyn hertil skal jeg anføre, at Al. Braun[4]) i Modsætning til Hofmeister, Pringsheim og Müller erklærer det for sikkert, at Knopperne opstaa efter Bladene, og det af de mere udviklede Væv i Stænglen, medens Bladdannelsen falder sammen med de tidligste Stadier i Vævdannelsen paa Stængelspidsen, og dernæst, at medens Sachs i 1ste Udg. af sin «Lehrbuch der Botanik», 1868 (S. 147), ganske slutter sig til Hofmeister, udtaler han sig to Aar efter i 2det Oplag 1870 (S. 152), lige saa bestemt imod denne. Han angiver her, at det er en almindelig Regel, at det yngste

---

[1]) Allgemeine Morphol. S. 413 og 432.

[2]) Se ogsaa forskjellige Udtalelser i hans «Vergleich. Untersuchungen» (t. Ex. S. 115, *Selaginellas* Forgrening). Ved Hofmeisters «unächte Gabelung», der omtrent falder sammen med t. Ex. St. Hilaires «vraie dichotomie» (cfr. Morphol., S. 229) rager derimod den gamle Axe lidt op over de to hinanden modsatte Sidegrene og lammes i sin videre Udvikling ved disses Fremkomst, eller omdannes til Blomst. Se hans Allgem. Morphologie, S. 432—35. Som hans Skema S. 434 angiver, behøve de to Grene ikke engang at anlægges nøje lige over for hinanden. Denne Forgrening maa jeg naturligvis ogsaa betegne som Pseudodichotomi, der imidlertid har en hel anden Oprindelse end den ovenfor S. 13 omtalte.

[3]) Allgemeine Morphol., S. 409 og S. 412, øverst.

[4]) Verjüngung, 1851, S. 24.

normale Sideskud optræder nedenfor de yngste Blade eller i Bladakslerne af allerede ældre Blade, naar man bortser fra mange Blomsterstande — en Bemærkning, som ogsaa jeg havde udtalt 1870[1]). Ligeledes har Magnus en Iagttagelse, der gaar i samme Retning[2]). Skjøndt de nyeste Angivelser saaledes gaa imod Hofmeister[3]), ere hans dog kun tre Aar gamle og fremsatte med saa megen Bestemthed, at denne Side af Sagen trænger til nøje at paaagtes.

For det andet, hvor vidt Forgrening umiddelbart fra Stængelspidsen forekommer, og i saa Fald, hvorledes det forholder sig med denne Forgrening: om den er en Forgrening ved «Kløvning» af Vækstpunktet, eller ved ulige «Deling» af det, eller om Knoppen opstaar helt udenfor det virkelige Vækstpunkts Omraade. —

I den nyeste Tid er der i den russiske og tyske Literatur fremkommet forskjellige speciellere Angivelser af Kaulomforgrening ved «Kløvning» hos Blomsterplanter, saaledes af Kaufmann[4]) hos Borragineernes Svikler, af Kraus[5]) hos Solaneer, Borragineer o. fl., og endelig af Rohrbach[6]) hos *Hydrocharis*, *Vallisneria* og Cucurbitaceblomsterstande.

Hos de franske Botanikere spille Theorier om Kløvning af Vækstpunktet som normal Forgreningsmaade omtrent i den Forstand, i hvilken jeg opfatter den, en betydelig Rolle; men deres Angivelser bero mere paa Gisninger end paa virkelige Undersøgelser af de virkelige Forhold. En af dem, der gaa videst, er Clos. Idet han iøvrigt slutter sig til St. Hilaires Begrebsbestemmelse af «Kløvning», for saa vidt som han fordrer Dannelsen af to nye Søstergrene ved Axens Kløvning, saaledes at den ene af dem ikke kan siges at nedstamme fra den anden, opstiller han en Kategori «inflorescences de partition», der navnlig omfatter alle de Blomsterstande, som mangle Dækblade, hvilket Fænomen han altsaa forklarer paa denne Maade[7]). Saaledes tydes ogsaa Forekomsten af extra-axillære Grene, og saavel abnormt som normalt tænker han sig Kløvning forekommende paa mange Steder og ved alle Plantens Organer[8]). Selv Rødderne ere ikke undtagne herfra; der nævnes saaledes Rødderne af *Rumex*, *Daucus*, *Anchusa*[9]), *Solanum*-Arter[10]) o. s. v. Speciellere Angivelser findes i det Følgende[11]).

[1]) Flora, S. 387.

[2]) Beiträge zur Kenntniss der Gattung Najas, 1870, S. 27.

[3]) Müller synes dog at være med ham; cfr. Bot. Ztg. 1869, S. 623, hvor det hedder: «Soweit meine Untersuchungen über die Entstehung der Axillarsprosse bei Phanerogamen reichen, entstehen diese immer nach dem jüngsten Blatte».

[4]) Bot. Ztg., 1869, S. 885. Nouveaux mém. de la Soc. imp. d. nat de Moscou. XIII. 1871.

[5]) Botan. Ztg., 1871, S. 120.

[6]) Beiträge z. Kenntn. einiger Hydrocharideen, 1871.

[7]) Bull. Soc. bot. Fr. II, 499; III, 608, 612, 645; IV, 785, og VIII, S. 11.

[8]) L. c. II, 499; Ann. d. sc. nat. Ser. III, T. 18, S. 339.

[9]) Ann. d. sc. nat. Ser. III, t. 18, S. 339.

[10]) Bull. Soc. bot. de Fr. III, 611.

[11]) De franske Botanikere have flere Benævnelser for Kløvningen og dens forskjellige Modifikationer; «partition» er hos de fleste «Kløvning af Stængler», «dédoublement» af Blade, naar hver Kløv-

Endelig skal anføres de i den danske Literatur forekommende Angivelser af Kløvning, nemlig Ørsteds med Hensyn til Vinranken og Cucurbitace-Blomsterstandene[1].

Efter disse indledende Betragtninger gaar jeg over til mine egne Undersøgelser. Nägeli og Schwendener udtalte 1867[2]: «Die Unterscheidung der ächten Dichotomie von der unächten ist bei Organen, deren Scheitelwachsthum nicht genauer bekannt ist, eine schwierige Sache, ja streng genommen geradezu unmöglich». Rigtigheden af disse Ord er indlysende, og jeg har ogsaa i høj Grad følt det Utilfredsstillende og Usikre, der er i den blotte Betragtning af de ydre Former af Stængelspidserne. Bag ved det «Höckerstadium«, med hvilket de fleste organogenetiske Undersøgelser af Blomsterplanterne hidtil altid have taget deres Begyndelse, ligger der en hel lille Udviklingshistorie, som maa kjendes, skal Spørgsmaalet om «Kløvning» og «Deling» af Vækstpunktet løses paa en til Videnskabens Standpunkt svarende Maade. Det bør derfor være Opgaven først og fremmest at lære den histologiske Bygning og navnlig Vækstpunktets Beliggenhed i den Stængelspids at kjende, med hvilken man vil beskjæftige sig, og de Celledelinger, ved hvilke de nye Kaulomer opstaa; kun ad denne Vej er det muligt at vise det Rigtige eller Urigtige i den Pringsheim-Hofmeisterske Lære og give Videnskaben en virkelig fremmende Besvarelse af de foreliggende Spørgsmaal. Have vi først erhvervet os en Forstaaelse af Stængelspidsens ydre Form ved Kjendskabet til den indre Bygning, kan det maaske være os tilladt i andre Tilfælde at drage Slutninger af hin alene; men før dette er Tilfældet, under ingen Omstændigheder. Alle hidtidige Angivelser af Kløvningens Forekomst hos Fanerogamer, lige til Rohrbachs Arbejde fra ifjor, holde sig til de ydre Former; de trænge derfor alle til en Kritik fra den histologiske Udviklingshistories Standpunkt. Hertil vil jeg i det Følgende forsøge at give nogle Bidrag.

---

ningsdel udvikles paa samme Maade. Germain St. Pierre forener disse to Begreber tillige med Fasciation under Navnet: «expansivité». (Bull. soc. bot. Fr. 1857, IV, 623, og VII, 584). Desforuden har jeg truffet «Chorise», der skal skrive sig fra Dunal. Men andre Botanikere t. Ex. Guillard (Bull. Soc. bot. Fr. IV, 264), benytte disse Navne i andre Betydninger; at gaa nærmere ind herpaa har jeg dels ikke havt Lejlighed til at gjøre, dels vilde det her føre mig ind i unyttige literaturhistoriske Betragtninger.

[1]) Videnskabelige Meddelelser fra den Naturhistoriske Forening, 1868, S. 121 og S. 129.

[2]) Das Mikroskop, S. 606.

II.

Speciel Del.

---

1. Cruciferæ.

Korsblomsterne høre til de Planter, i hvis Blomsterstande man har antaget Knopdannelse ved Kløvning af Vækstpunktet at finde Sted i de talrige Tilfælde, i hvilke Dækblade mangle; hos Clos[1]) henføres disse Blomsterstande derfor dels til «grappes», dels til «corymbes» og dels til «épis»-«de partition». Godron er derimod af en anden Mening; han antager, at af de to Alternativer: «dédoublement de l'axe de l'inflorescence» og «avortement des bractées» er det sidste det rimeligste, idet nemlig de til Korsblomsternes primitive Plan hørende Dækblade simpelthen abortere[2]) (paa Grund af det Tryk, som Blomsterne udøve paa hverandre i den unge Blomsterstand). Af samme Mening er i det Væsentlige ogsaa t. Ex. Guillard[3]) og Norman[4]).

Jeg har med Hensyn til disse Meningsforskjelligheder undersøgt forskjellige Slægter og Arter, og mine Resultater ere følgende.

Sisymbrium strictissimum frembyder følgende Forhold. Stængelspidsen, der har Form af en lav Kegle med afrundet Top (**I**, 1, 2, 3, 7, 8)[5]), er i sit Indre en af de elegantest og mest regelmæssig byggede, som jeg har truffet paa (**I**, 3). Under Dermatogenlaget findes 4—5, undertiden endog 6 eller 7 (i det tegnede Præparat, Fig. 3, 6) skarpt bestemte Periblemlag (*pe*), og derunder kommer et regelmæssigt Plerom, i hvis lille Initialgruppe det dog ikke er muligt at paavise nogen enkelt Celle, som ved sin Form og ved de Stillings-

---

[1]) Bull. d. Soc. bot. de Fr. II, S. 499; III, S. 608; IV, S. 141 og VIII, S. 11.

[2]) Se Annales des sciences, S. V, T. 2, 1864, S. 281, hvor en Mængde Iagttagelser med Hensyn til Dækblades Forekomst anføres, og hvor der findes forskjellige Litteraturhenvisninger til Turpin, Steinheil o. Fl.

[3]) Bull. Soc. bot. de France, 1857, S. 266.

[4]) «Quelques observations de morphol. végétale», Christiania 1857, S. 10—12.

[5]) De latinske Tal betegne Tavlen, de arabiske Figurerne.

forhold, i hvilke de andre Plerom-Celler staa til den, kunde give sig tilkjende som disses fælles Moder og altsaa besidde Topcellens Egenskaber. Denne og de forskjellige andre citerede Figurer ville vise, at Vækstpunktet (P) tydelig er beliggende i Stængelspidsens Top, højt ovenfor de yngste Sidedannelser[1]).

Saalænge der anlægges rent vegetative Knopper, iler det støttende Blad i Anlæg og Udvikling langt forud for sin Akselknop, og man kan let overbevise sig om, at der kan være flere, undertiden endog mange Blade ovenfor den yngste Knop, der netop er bleven anlagt i en Bladaksel. Overgangen fra vegetative Grenknopper til den rene Blomsterdannelse skér gjennem Knopper, som blive til blomstrende Grene (I, 11, nederst tilvenstre, af *Bunias orientalis*). Ogsaa disse anlægges senere end deres Støtteblade, og neden for højere staaende Blade; men Knoppen anlægges hurtigere efter sit Støtteblad end tidligere, og træder i det Hele mere frem end dette, der allerede er betydelig reduceret. Hvad endelig de rene Blomsterknopper angaar, have endnu de nederste i Blomsterstanden Støtteblade, men rigtignok i en saa reduceret Form, at Bladet kun viser sig som en svag Hæl eller Valk paa Knoppens Grund (I, 2 (Knoppen øverst tilvenstre), 4, 5, 8 o. fl.), og Knoppen anlægges samtidig med dette sit Støtteblad eller (de højere staaende) endog før dette; de øverste Knopper mangle endelig aldeles Støttebladene (I, 7), men fortsætte forøvrigt, som allerede Godron (l. c.) bestemt har udtalt, den Spiral, som paabegyndtes i den vegetative Region.

Denne Overgang, der snart sker jævnt, snart mere brat, fra det Trin i Skuddets Metamorfose, hvor Knoppen anlægges længe efter Støttebladet og er mindre end dette, gjennem det, paa hvilket der er en mere samtidig og ligelig Udvikling af dem begge, til det, da Knopdannelsen er eneraadende, og de derved fremkommende forskjellige Forhold i Knoppens og Støttebladets relative Størrelse, sees af Tab. I, Fig. 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 14 (se Forklaringen af Figurerne).

Betragtes Epiblastemerne $f—g$ øverst tilvenstre Fig. 2, I, eller Fig. 4, 5, $f—g$ Fig. 8 og 11 eller overhovedet andre Knopper, hvis Støtteblad er meget reduceret, men endnu

---

[1]) Paa Oversigtsbillederne I, 1, 2, 7, 8 ere de meristematiske Væv antydede ved Linier, og PleromInitialernes Beliggenhed derved tydeligt betegnet. Man vil af Fig. 3, I, faa det Indtryk, at Forskjellen mellem Periblemet og Pleromet næppe kan begrundes paa deres Bygning i Stængelspidsen. Thi den inderste Periblemrække viser sig egenlig kun deri forskjellig fra den yderste Pleromrække, at den ikke har kløvet sig i 2—3 Rækker saaledes som denne; ellers vil man kunne følge denne lige saa skarpt helt rundt, som hin. Ogsaa paa mange andre Steder, som tildels nedenfor blive omtalte, har jeg faaet det Indtryk, at Periblemlagene ere Pleromrækker, der kappeformigt slutte sig sammen foroven, og Pleromrækkerne Periblemlag, der foroven afbrydes af en uordnet Cellemasse Men jeg maa dog fremhæve, at jeg ved disse Undersøgelser ikke har havt Leilighed til omhyggeligere at undersøge, hvorfra Prokambiet har sin Oprindelse; thi dette bør være det vigtigste Moment ved Adskillelsen af Pleromet fra Periblemet, og jeg holder mig derfor fremdeles til Bygningen alene og betegner de kappeformede Lag Periblem, det indenfor liggende Plerom.

ikke helt forsvundet, ser det ud, som om et paa Axen opstaaet Epiblastem «deler sig» i to Organer, Blad og Knop, og dette Fænomen har derfor ogsaa tiltrukket sig forskjellige Botanikeres Opmærksomhed, og findes iagttaget og tegnet tidligere ikke blot for selve Korsblomsternes Vedkommende[1]), men ogsaa fra Blomsterstandene af en Del andre Planter, saasom *Carex*[2]), visse Kurvblomster[3]), *Euphorbia* og *Gramineæ*[4]). Det betragtes af Magnus (l. c.) som et Bevis for, at Akselknoppens Dannelse staar i nøje Forbindelse med Støttebladets, og det beskrives af ham som «Theilung eines und desselben Höckers»; Wretschko, Godron o. Fl. betragte det derimod som Sammenvoksning («Verwachsung», «soudure») af Knop og Støtteblad.

Det forekommer mig, at den histologiske Undersøgelse giver et lidt andet Syn paa dette Fænomen, og tillige, at det ikke er et saa usædvanligt eller afvigende Forhold, som det ved første Øjekast synes. For at vise dette og tillige for at levere Beviset for, at de Knopper, der anlægges paa selve Stængelspidsen d. e. som de øverste Nydannelser paa Axen, ikke kunne betragtes som opstaaede ved Vækstpunktkløvning, er en histologisk Undersøgelse af saavel Knoppernes som Bladenes Dannelse nødvendig.

Jeg vil bede Læseren betragte mine Tegninger. Fig. 13, **I** forestiller en ren vegetativ Akselknop (g) med dens Støtteblad (f), omtrent som Knoppen nederst tilvenstre paa Fig. 1, **I**. Pleromrækkerne i Knoppernes Indre ere allerede tydeligt anlagte, og den Omstændighed, at Dermatogenet og de to yderste, ja selv tildels 3die, Periblemlag udelte kunne forfølges hen over hele Knoppen og over i Moderaxen, viser, at Knoppen fortrinsvis er dannet nedenfor 3die Periblemlag i Moderaxen, d. e. i fjerde og dybere liggende Lag. Paa samme Maade findes paa alle andre Knopper, vegetative saavel som florale, i Regelen 2—3 Periblemlag, og en Knop har derfor færre Periblemlag end Hovedaxens Stængelspids. (Sammenlign **I**, 3 med **I**, 4, 5, 9 og 14). Det er i øvrigt paa Stængelspidsen af Blomsterstanden let at følge Knoppernes Oprindelse fra de første Celledelinger af, ved hvilke de grundlægges.

Jeg maa her gjøre opmærksom paa et Forhold ved de saakaldte «Akselknopper», der ikke, saavidt jeg ved, hidtil er blevet fremhævet tilstrækkelig bestemt. Jeg kjender overhovedet ingen omhyggelig Undersøgelse af, hvorledes Akselknoppen er stillet i Forhold til sit Støtteblad og sin Moderaxe; man har nøjedes med at tale i al Almindelighed om, at Knoppen dannes i «Akselen», «Vinkelen», «Hjørnet» af Bladet, om man end har havt det Rette for Øjne eller i Tanke[5]).

---

[1]) Wretschko, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 1868, Bd. LVIII, Tab. **I**, fig. 1, 2, 3.

[2]) Caruel, Ann. d. sc. nat. Ser. V, T. 7, 1868, og Magnus, Sitzungsber. Naturf. Freunde zu Berlin. Jan. 1871.

[3]) Koehne: «Blüthenentwickelung bei den Compositen», 1869; S. 17—18.

[4]) Warming, Nat. For. Vid. Medd. 1871: «Er Koppen hos Vortemælken (*Euphorbia* L.) en Blomst eller en Blomsterstand»? og Flora 1870, S. 387.

[5]) Sachs, t. Ex., siger i «Lehrbuch», 1870, S. 151 kun: «Bei den Charen und fast allen Mono- und Di-

Forholdet er nu dette, at enhver «Akselknop» altid ved sin Grund er forenet med sit Støtteblad (maaske paa nogle faa Undtagelser nær), og Knoppen sidder i Virkeligheden ofte lige saa meget paa Bladet som paa Moderaxen. Vinkelen mellem Blad og Knop ligger derfor altid oven over Moderaxens Overflade.

Paa ældre Blade og Knopper udviskes dette Forhold, idet denne primitive Sammenvoksning bliver forsvindende lille over for Bladets og Knoppens Størrelse, men paa unge sees det overalt særdeles tydeligt, og mine Tegninger paa de forskjellige Tavler, saa vel som andres, naar de ere naturtro, ville gjengive det[1]). Men dette Forhold træder ogsaa meget tydeligere frem i den florale Region end i den vegetative, netop fordi Støttebladet er saa meget større end Knoppen i denne end i hin; hvilket vil sees af det Følgende.

I Fig. 14, **I**, har man et Tilfældet aftegnet, hvor Bladet er anlagt før Knoppen, der ikke desto mindre er en floral og rimeligvis vil udvikle en blomstrende Gren. Bladet er væsenlig dannet neden under 1ste Periblemlag; Knoppen under 2det. Denne er netop lige i sin Vorden og paa et lidt tidligere Stadium vilde vi ikke have truffet Spor til den, medens Bladet allerede var antydet. Saavel denne Figur, som de øverste Epiblastemer i **I**, 1 og 8, der ere paa lignende Udviklingstrin, vise os den omtalte primitive «Sammenvoksning» mellem Akselknop og Støtteblad.

I Fig. 5, **I**, vil man se et Tilfælde, i hvilket Knop og Blad omtrent ere samtidige; Knoppen udmærker sig ved sine regelmæssige Pleromrækker og har to Periblemlag; de tangentiale Celledelinger, ved hvilke Bladet er blevet dannet, begynde derimod allerede i 2det Periblemlag. Paa Grænsen mellem Knop og Blad er Bygningen uregelmæssigere, og rimeligvis har man her allerede Begyndelsen til Prokambiet; men iovrigt er det et overalt forekommende Forhold, hvor vi have Knopper forsynede med Støtteblad, at hine ere meget mindre regelmæssig byggede i deres nedre til disse stødende Side end i deres øvre. Det træder her særdeles tydeligt frem, at Knop og Blad danne et Dobbeltorgan; men Grunden dertil er, som anført, at Bladet her er saa meget ubetydeligere i Forhold til den mægtigere Knop; i Virkeligheden er Graden af «Sammenvoksningen» mellem dem omtrent uforandret den samme som mellem den vegetative Knop og dens Støtteblad.

Endelig have vi i Fig. 4 og 9, **I**, to Tilfælde, i hvilke Knoppen opstaar før Støttebladet. Paa den første, hvis Bygning er usædvanlig regelmæssig, træder Støttebladet endnu frem udvendig som en Hæl; det er dannet ved Celledeling og Cellestrækning (begyndt Deling) i 1ste og 2det Periblemlag. Paa den anden træder det næppe frem udvendigt og vil rimeligvis heller ikke gjøre det i højere Grad; det vil paa den udviklede Blomst være

cotylen aber entspringen die normalen Seitenzweige aus den Blattaxeln d. h. oberhalb der Blätter, in dem spitzen Winkel, den das Blatt mit dem Stamm bildet. ...... Solche Zweige werden Axelsprosse genannt».

[1]) Se t. Ex. **I**, 1, 2, 8; **II**, 23, **VI**, 13, 14, 17, 18, o.s.v. Sachs's Lehrbuch, 1870, fig. 109, 121, 136, o.s.v.

lige saa ubetydeligt som t. Ex. det i 12, I, afbildede Blad (*m*), der er reduceret til nogle faa Delinger i 1ste Periblemlag paa Grunden af Blomsterstilken (*m*, Fig. 11, I).

Hvad der i disse sidste Tilfælde især vil være os paafaldende, er, at hele Støttebladet staar paa Knoppen, og ikke paa dennes Moderakse. I de foregaaende Tilfælde kunde man ikke nægte, at saa vel Knop som Blad havde Fod paa Moderaksen, selv om de vare stærkt «sammenvoksede»; nu er dette kun Tilfældet med Knoppen. Men er dette ikke muligen et rent sekundært Forhold? Anlagdes Bladet ikke oprindelig selvstændig paa Moderaxen og hævedes senere i Vejret med den sig langt mægtigere udviklende Knop? Det er meget vanskeligt at levere Bevis for, at dette ikke er Tilfældet. Da de højest stillede Blomster nemlig ikke have mindste Spor til Støtteblade[1]), ved man jo ikke altid med Sikkerhed, om den Knop, som man træffer uden saadant Spor (som Knoppen *g* til højre i I, 2), muligvis allerede hører til hine Knopper, eller om maaske et rudimentært Blad vilde være kommet til syne paa dens nedre Side, hvis den havde faaet Lov at leve, saa den altsaa vilde være blevet lig Fig. 4 og 9. Opstod dette saa reducerede Blad imidlertid fra første Færd ved Celledelinger helt eller i alt Fald for en Del paa den utvivlsomme Moderaxe, maatte man ogsaa kunne træffe Udviklingstrin, der viste dette; at jeg ikke har kunnet dette, er for mig en Grund til at tro, at hine Celledelinger, der ere det sidste Minde om Bladet, virkelig først foregaa i Knoppens Periblem, at Bladet altsaa fra første Færd af staar paa Knoppen og alene paa den; men en anden Støtte for min Antagelse har jeg deri, at jeg andensteds har fundet det samme Forhold, saasom hos Kurvblomsterne, og været istand til at føre Beviset for dets Tilværelse.

Jeg kan altsaa for det første ikke billige Wretschkos Opfattelse af denne Epiblastemdannelse i Korsblomsternes Blomsterstand; Knop og Blad kunne ikke kaldes sammenvoksede, thi de have ikke existeret adskilte og selvstændige hver for sig paa Moderaxen og ere saa senere blevne forenede. Naar Knoppen opstaar efter Bladet, foregaar Dannelsen af den lige saa meget i Bladgrunden, som i Moderkaulomet, — ja i enkelte Tilfælde, som det synes (se nedenfor: *Amorpha*), udelukkende i den første; opstaar Knoppen før Bladet, dannes dette enten samtidigt i Knopgrunden og Knoppens Moderkaulom eller alene i hin. Snarere kunde jeg med Magnus og Koehne kalde den i Blomsterstandene iagttagne Fremtræden af Knop og Blad for «Theilung» af et Epiblastem i de to Organer, skjøndt man kan indvende, at saa maatte enhver Bladdannelse paa en Stængelspids kunne kaldes en «Deling» af denne i Blad og ny Stængelspids. Derimod er jeg fuldstændig enig med Magnus i, at Bladet og dets Akselknop ere to inderligt sammenhørende Dannelser. Dette viser sig ikke blot deri, at de, som jeg nu har søgt at vise, altid og overalt ere forenede ved deres

[1]) Hofmeister har Ret, naar han i Allgem. Morphologie S. 547 udtaler, at Dækbladene slet ikke anlægges her. Hvis Godron mener, at der skulde være smaa Rudimenter tilbage af dem, er det urigtigt.

Grund, men ogsaa deri, at der hersker et vist Balanceforhold mellem dem under deres Metamorfose, hvilket allerede er omtalt: er Bladet kraftigt uddannet, saa er Knoppen svagere og anlægges senere end hint; saaledes i den vegetative Region. I den florale vipper Vægten til den modsatte Side: Knoppen er den kraftigste og fremmeligste.

Det Fænomen, som altsaa af Andre er blevet betragtet som noget exceptionelt, kan jeg saaledes kun opfatte som et Moment i den ganske almindelige Udviklingsgang, som Blad og Knop følge, og det finder fuldkommen sin Forklaring i den overalt forefundne primitive Forening af Knoppens Grund med Støttebladets. At en senere Vækst kan forøge Størrelsen af denne «Sammenvoksning», saaledes at en «Forskydning» af Støttebladet ud paa dets akselstillede Gren fremkommer, er let at forstaa, og saadanne Forskydninger findes ogsaa hyppigt hos Korsblomsterne[1]). I andre Tilfælde bliver Støttebladet, selv det mest rudimentære, siddende lige ved Knopgrunden, uden at rykkes længere bort fra Hovedaxen, som Tilfældet er med Dækbladet *m*, I, 11—12, (af *Bunias orientalis*)[2]).

Af andre Slægter af Korsblomster har jeg undersøgt *Bunias* (*orientalis*), *Berteroa* (*incana*), *Lepidium* (*Draba*), *Pytolepidium*, *Capsella* (*Bursa pastoris*), *Alliaria* (*officinalis*), *Lunaria* (*rediviva*), *Erysimum* (*crassipes*), *Brassica* (*oleracea* var. *botrytis*) og *Iberis* (*repens*). I alle Tilfælde har 'jeg fundet Bladet opstaa længe før dets Knop i den vegetative Region, men Knopdannelse snart samtidigt med, snart før eller som oftest helt uden Spor til Støttebladdannelse i den florale Region. Hos ingen er imidlertid Overgangen mellem de to Regioner saa jævn som hos *Sisymbrium*.

Stængelspidsen hos alle disse Arter har en noget forskjellig Form og Bygning; den er gjennemgaaende lidt fladere kuppelformet end hos *Sisymbrium*, og bliver hos *Erysimum* (I, 6; sammenlign Wretschkos Fig. 3, Taf. 1, l. c., af *Erysim. canescens*) endog paafaldende flad og ubetydelig. Hvad den histologiske Bygning angaar, finde vi ogsaa gjennemgaaende færre Periblemlag end hos hin, — hos ingen flere end 4—5; *Phytolepidium* er i den Henseende mærkelig ved sin storcellede Stængelspids og ved sine faa (1—2) Periblemlag.

Med Hensyn til Dannelsen af Knopperne og Bladene træffe vi hos disse Arter den samme Forskjel og Lighed som hos *Sisymbrium*. Begge anlægges i Periblemet, men Knopperne altid i de dybere Lag, i Regelen nedenfor det 2det eller 3die, sjeldnere allerede

---

1) Se Godron og Norman l. c. Jeg har ogsaa selv iagttaget dem flere Steder.

2) Paa dette Sted skal jeg i Forbigaaende bemærke, at jeg saavel hos *Sisymbrium* som hos andre Slægter, saasom *Iberis*, *Lunaria*, *Brassica*, har bemærket Akselblade ved Blomsterstandenes Dækblade. (De ere antydede ved *s*, I, 2). De ere ofte tilstede, selv efter at Dækbladet sporløst er forsvundet, hvilket ogsaa omtales af Gay (Bull. Soc. bot. de France, IV, S. 266), der benævner dem: «les deux stipules glanduleuses», og af Norman (l. c. S. 10). I deres Bygning ligne de fuldstændigt almindelige Trichomer, og det er mig sandsynligt, at de ogsaa ligne dem i deres Udvikling.

nedenfor det 1ste (I, 6). Bladdannelsen foregaar derimod altid i de yderste Periblemlag, undertiden først neden for det 1ste (I, 5 og 14), men i andre Tilfælde, navnlig hvor Bladene ere meget rudimentære, (I, 4, 9) alene i dette, hvilket aldrig er Tilfældet med Knopdannelsen.

Knopperne aabenbare sig straks som saadannne ved deres regelmæssige Pleromrækker; Bladene have aldrig saadanne, men Længdedelinger af de i Midten liggende Celler i deres Grund vise snart, at Prokambiumdannelsen er begyndt.

Vi komme nu til det Spørgsmaals nærmere Besvarelse, om der finder nogen Deling af Vækstpunktet Sted hos disse Planter. Det kan ikke betvivles, at der forekommer Knopper, som ere de højest paa selve Stængelspidsen staaende Nydannelser; disse maatte efter Hofmeister-Pringsheims Mening altsaa være opstaaede ved «Deling» af Vækstpunktet. Efter min Opfattelse af Forholdet ere de utvivlsomme Sideknopper, og der kan aldeles ingen Tale være om «Kløvning» af Vækstpunktet; thi i alle Tilfælde opstaa de udenfor og i de fleste Tilfælde tillige nedenfor Vækstpunktet, *P*, der uforandret og uforstyrret fortsætter sit Arbejde i samme Retning som før (I, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 11), og i alle Tilfælde gaa Moderkaulomets Pleromrækker i en fuldstændig ret Linie lige op til Vækstpunktet, der altsaa uafbrudt indtager det organiske Midtpunkt. Interessantest er i denne Henseende *Erysimum*, der af alle undersøgte har den laveste Stængelspids (I, 6). Denne har 4—5 Periblemlag; Pleromrækker ere tydeligt udprægede, og Pleromînitialerne danne en temmelig bestemt omskreven Gruppe. Blomsterknopperne (g) opstaa her tydeligt nok i Periblemet og endogsaa højere end Pleromînitialgruppen; men dog ligesaa tydeligt til Siden for Vækstpunktets Midte som hos alle andre. Vækstpunktet er upaavirket af denne Knopdannelse, og selv om en «Deling» af Vækstpunktet synes der ikke engang her at kunne være Tale, thi den aftegnede Knop synes at dannes helt til Siden for Periblemînitialerne.

Brassica oleracea var. *botrytis* (Blomkaalen) fortjener en særlig Omtale, fordi man kunde formode en hyppig Vækstpunktkløvning i dens monstrøse Blomsterstand. Der kan imidlertid ikke være Tale om Deling, end sige Kløvning. Dannelsen af Hovedet beror paa en utrolig rask Forgrening; Knop efter Knop anlægges i regelmæssig Spiral paa den meget brede og lav kuppelformede Stængelspids, og bliver atter selv hurtigt Udgangspunkt for Knopper af højere Orden, og dette fortsættes. Stængelspidsen har en meget regelmæssig Bygning, og under de 2—3 Periblemlag findes en tydelig udpræget Initialgruppe: Knopdannelsen foregaar langt ud til Siden for Topcellegruppen i Periblemet. Paa, som det synes, de svagere Grene faa Knopperne hurtigt Støtteblade; det første Spor til disse har altid vist sig for mig som en svag Hæl eller Valk paa Knoppen. Paa de kraftigere Grenes Knopper træde Støttebladene maaske slet ikke frem, eller i alt Fald er et stort Antal af de øverste tæt sammentrængte Knopper støttebladløse. Fremhæve vil jeg endelig her, at ofte mange af

de øverste Knopper med tilhørende Del af Moderstængelen befinde sig i en lignende meristematisk Tilstand som selve Stængelspidsen, og Prokambiets Udprægning foregaar først langt nedenfor denne.

2. Compositæ.

Skjøndt ogsaa de støttebladløse Blomsterstande i denne Familie høre med til Clos's «inflorescences de partition», synes der dog at være meget ringe Sandsynlighed for, at man her skulde finde Vækstpunktkløvning, og Sachs udtaler sig endog bestemt mod Muligheden af dens Forekomst i denne Familie [1]). Naar jeg desuagtet har villet undersøge flere Slægter og Arter, da er det, som ogsaa mange Steder i det Følgende, i Haabet om ved en Sammenstilling af en saa stor Mængde Kjendsgjerninger som mulig at komme til saa meget sikrere Slutninger med Hensyn til Forgreningsforholdene hos Blomsterplanterne. Særligt maatte jeg dog her vente at træffe lignende Forhold som hos Korsblomsterne, hvad angaar Forholdet mellem Knop og Støtteblad, da Koehnes Afhandling «Über Blüthenentwicklung bei den Compositen» gav flere Antydninger heraf.

Mine Iagttagelser ere følgende.

Doronicum macrophyllum hører til de Arter, der have et aldeles glat, naar Blomsterdannelsen er begyndt, kuppelformet (I, 15), Kurvleje, paa hvilket Blomsterknopperne udvikles uden mindste ydre Spor til Støtteblade. Den histologiske Udviklingshistorie viser heller intet saadant, og i intet Tilfælde har jeg set en eneste Tangential-Deling i Periblemet ved eller paa Knoppens Grund, der kunde tydes som en begyndende eller rudimentær Bladdannelse. Støttebladene ere lige saa komplet forsvundne som hos de øverste Blomster i Crucifer-Blomsterstanden. Af Periblemlag findes i det ældre Kurvleje et skarpt og et mindre skarpt udpræget (I, 15); nedenfor dem kommer et uordenligt Meristem med Celledelinger i alle Retninger, i hvilket der snart optræder luftfyldte Celle-Mellemrum. En skarp Grænse mellem Periblem og Plerom existerer altsaa ikke paa dette Kurvlejets Udviklingstrin.

Blomsterknopperne anlægges ved alsidige Celledelinger under 1ste Periblemlag, fortrinsvis i det 2det mindre bestemt udprægede, og hint forbliver som *et* kontinuerligt Lag, i hvilket kun radiale Celledelinger fremtræde, en rum Tid, lige til Kronbladdannelsen begynder. Da bemærkes tangentiale Celledelinger i 1ste Periblemlag, og Kontinuiteten af dette ophører (I, 19). Hvis man heraf tør drage nogen Slutning med Hensyn til den morfologiske Værdi af den ringformige Rand af den Skaal, der hæver sig paa Knoppen, og som senere udvikler Kronen af sig, maa det være, at den er en Phyllomdannelse; thi ved at 1ste Peri-

[1]) Lehrb., 2det Opl., S. 152: «gerade hier giebt sich der Muttersspross als das selbständige Centrum aller Neubildungen zu erkennen».

blemlag tager saa virksom (dog ikke udelukkende) Del i Dannelsen af den, stiller den sig i Modsætning til de ægte Kaulomer, der meget sjeldent anlægges ved Tangentialdelinger i dette Lag; derimod er det, som vi have set under Cruciferernne og fremdeles oftere ville faa Lejlighed til at se, især i det, at Bladdannelsen har sit Arnested. Man sammenligne ogsaa den Udviklingsmaade, som finder Sted i en saadan Kronbladring, med den, der findes i et almindeligt Kurvdækblad, Fig. 19, I og 11, II, med Fig. 12, II. Ligheden er fuldstændig. Dette Kriterium er imidlertid ikke af absolut afgjørende Natur, og navnlig lades man her i Tvivl om, hvor vidt det er rigtigt at tyde denne Skaalrand som Phyllomdannelse, ved Henblik til Støvdragernes Oprindelse. Jeg har ved disse Undersøgelser, der væsenlig havde et andet Maal, ikke særligt henvendt min Opmærksomhed paa dette Punkt, men jeg foranlediges af Buchenaus Ord[1]) til at udtale, at Støvdragerne, ifølge hvad jeg erindrer ofte at have set, opstaa i 1ste Cellelag af den saaledes dannede Skaalrand. Ikke desto mindre helder jeg mest til Koehnes Betragtningsmaade[2]).

Den fremspringende Rand, som danner sig under Kronen, og fra hvilken pappus har sit Udspring, opstaar ved Celledelinger i Periblemet, i nogle Tilfælde som tegnet (Fig. 22, *c*, I, der af Kobberstikkeren er bleven stillet skævt, cfr. Oversigtsbilledet Fig. 21); i andre Tilfælde ere det endnu tydeligere, at i alt Fald oprindelig alene 1ste Periblemlag tager Del derved, idet Celledelingerne ikke strække sig over et saa stort Parti af det som her. Denne Rand fremtræder ikke samtidigt rundt under hele Kronens Grund (I, 21 og II, 5 af *Anthemis*).

Inula Helenium er overensstemmende med foregaaende Art. Paa det fladt topformede Kurvleje, der har samme Bygning som hos hin, hæve Blomsterne sig i midtpunktsøgende Udviklingsgang som smaa Vorter, der skylde Celledeling nedenfor 1ste Periblemlag (I, 18) deres Tilblivelse[3]). Ingen Celledeling i 1ste Periblemlag eller andensteds kan paavises, der kunde antyde en Bladdannelse, og Dækbladene ere altsaa fuldstændigt forsvundne.

Anthemis hører til de Slægter, hvis Kurvleje er «paleis membranaceis onustum», «beklædt med Skjæl». Hvorledes disse «Skæl», som ved deres Stilling og Udvikling vise sig at være ægte Blade, staa i Forhold til deres «Akselknopper», vil det Efterfølgende vise.

Paa dens rent vegetative Grene anlægges Akselknopperne længe efter deres

---

[1]) Botan. Zeitg. 1872, S. 308.

[2]) Jeg vil i Forbigaaende gjøre opmærksom paa en hos Kurvblomsternes Kroner, som jeg tror, meget almindelig Bygning. Som Fig. 14 og 15, II, vise, hører Mesophyldannelsen snart op, saaledes at hele den midterste større Del af Kronen kun bestaar af de to Epidermislag, undtagen ud for Støvdragerne, mellem Kronbladene, hvor de svage Karstænge uddanne sig (Fig. 15.). I Spidsen af Kronbladene dukker Mesophyldannelsen op igjen, undertiden med mægtigt og papilløst udviklede Epidermisceller over sig. I det Følgende vil jeg oftere faa Lejlighed til at henvise til saadanne delvist alene af Epidermis dannede Phyllomer.

[3]) Cfr. Hansteins «Scheitelzellgruppe», S. 122, og Fig. 7 og 8.

Støtteblade, og derfor ogsaa langt nedenfor Stængelspidsen. Denne har 1—2 Periblemlag og er fladt kuppelformet; Pleromînitialerne kunne tydeligt paapeges.

I Fig. 4 og 13, **II**, ses det hele Kurvleje formet, dog endnu uden Spor til Blomsterudvikling. Dette er en Ting, som jeg har bemærket hos alle undersøgte Arter af denne og andre Slægter, at Kurvlejet næsten anlægges helt og antager sin blivende Form, for Blomsterdannelsen begynder. Tillige er det unge Kurvleje i Bygning forskjelligt fra det gamle. I Fig. 13 er Bygningen af Kurvlejet endnu meget regelmæssig, og navnlig kunne Pleromînitialerne endnu paapeges, d. e. der er endnu et tydeligt Vækstpunkt. I den lidt ældre Kurv (**I**, 4) er hele det Indre (*m*) mere uordenligt, Cellerne have luftfyldte Mellemrum og Vækstpunktets Celler kunne ikke længere paapeges, Vækstpunktet er udslukt.

I Kurvdækbladenes Aksler findes ingen Knopper (2, **II**), men paa det kuppelformede Kurvleje dukke Blomsterknopperne frem. Kurvlejet har, naar dette begynder, som Fig. 10, **I**, viser, i Spidsen endnu tre temmelig tydelige Periblemlag (af hvilke det ene paa det tegnede Præparat spalter sig); men nedad paa Siderne tabe de underste af dem deres Regelmæssighed, og der hvor Blomsterdannelsen finder Sted, vil man kun kunne adskille et skarpt udpræget Lag (**II**, 7, 9). Neden under Periblemet kommer i hvert Fald det uordentlige Plerom med sine luftfyldte Intercellular-Rum, og jo større Terrain Blomsterdannelsen bemægtiger sig, desto mere skrider ogsaa Uregelmæssigheden i Meristemerne i Kurvlejet fremad.

Den første Begyndelse til en Blomst sees i **II**, 7; Knopperne *g—g* ere tydeligt nok dannede ved Celledelinger i 2det og 3die Periblemlag; i 1ste sees ikke en eneste Tangentialdeling, hvilket ogsaa er Tilfældet med alle andre unge Knopper, saasom Fig. 6, der endog er lidt ældre end den ældste i Fig. 7. I Fig. 8, **II** er et lidt ældre Stadium afbildet, og nu ser man Støttebladdannelsen begyndt, i Form af to Celledelinger, ved *f*, i første Periblemlag. Her kan man med langt større Sikkerhed end hos Korsblomsterne drage sine Slutninger: Alle Blomster have her, som voksne, støttende Blade; alle mangle paa deres allerførste Udviklingstrin ethvert Spor til disse; naar de komme til Syne, sker det ved Tangential-Delinger i 1ste Periblemlag paa Blomsterknoppen; thi aldrig har jeg kunnet finde disse andensteds end, som Fig. 8 og 9 (øverste Knop) vise, oven over Kurvlejet paa selve Knopgrunden; Støttebladene opstaa altsaa ikke paa Hovedaxen, men paa selve Sideaxerne. Figurerne 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10 og 5, **II**, ville give os den samme Række af Overgange, som hos *Sisymbrium*, fra den bladløse fladt kuppelformede netop fødte Blomsterknop til den udviklede Blomst med dens Støtteblad (Fig. 5, *f*). Overalt vil man bemærke den Forbindelse, der er mellem Knop og Støtteblad ved deres Grund, — en nødvendig Følge af deres Udviklingsmaade. Betragter man Fig. 5, **II**, vil det for den, der uden Forudsætninger betragter den, se ud, som om Blad og Blomst hver indtager sin Plads paa Kurvlejet og kun ere en Smule forenede («sammenvoksne») ved Grunden. At dette Forhold ogsaa er blevet henført til «Sammenvoksninger» eller «Forskydninger», kan man se hos

Wydler[1]), der omtaler det hos *Achillea*-Slægten, hos hvilken det ogsaa træder tydeligt frem. Ligeledes omtales det af Koehne[2]). Den sidste giver en meget rigtig Fremstilling af Udviklingsforholdet mellem Blomsterknop og Støtteblad hos de forskjellige Slægter, — Støtteblade anlagte før Blomsterne hos *Rudbeckia laciniata*, — samtidigt med dem hos *Anthemis nobilis* o. fl., og endelig anføres *Callistephus chinensis* særligt, «weil hier das Tragblatt scheinbar mit grösster Deutlichkeit erst aus dem zugehörigen Achselsprosse hervorwächst, statt vor ihm zu enstehen». Saadanne tilsyneladende «Zweitheilungen eines Höckers» mener han maa forklares ved, at de Cellemasser, i hvilke de to Organer skulle anlægges, smelte saa nøje sammen med hinanden, at de tilsyneladende danne en eneste Cellemasse; naar Organerne da senere frigjøre deres Spidser, ser det ud som en «Deling».

Jeg maa, ifølge det Sete, foretrække en lidt forskjellig Forklaring; naar de første Celledelinger til et Blad vise sig paa et Organ, der efter sin hele Bygning er en udpræget Knop, opstaar Bladet paa denne, og man kan ikke sige, at Blad og Knop opstaa af en prægløs Vorte. — Selv de senere Stadier i en Blomsts Udvikling hos *Anthemis* ville i Regelen ogsaa tillade os at finde alle de Celler, af hvilke Støtte-Bladet dannes, og disse ligge da alle i det 1ste Periblemlag; man betragte t. Ex. Fig. 10, **II**.

Den fremspringende Valk, *c*, Fig. 5, var paa dette Præparat dannet ved et Par Celledelinger i 1ste Periblemlag. Jeg opfatter den som det eneste Spor af Bægeret.

Rudbeckia laciniata anføres af Koehne som den Art, hos hvilken han tydeligst har kunnet se Støttebladene opstaa og allerede have en vis Størrelse, før end Blomsterne udvikles i deres Aksler, skilte fra dem ved et lille Mellemrum[3]). Jeg har fundet dette bekræftet hos denne og andre Arter af samme Slægt.

Kurvlejets Bygning stemmer med den hos *Anthemis*. Før Blomsterdannelsen begynder, har det et tydeligt udpræget Vækstpunkt (**II**, 3 og **I**, 20); der er 3—4 Periblemlag, der dog ikke altid ere saa skarpt adskilte, som sædvanligt, og under dem et regelmæssigt Plerom med en tydelig paavislig Initialgruppe (**I**, 20); en bred og flad Stængelspids kan altsaa have et ligesaa bestemt udpræget Vækstpunkt, som den høje kegleformede hos *Sisymbrium*[4]). Hos *Rudbeckia*-Arterne vedligeholder Kurvlejet maaske noget længere end sædvanligt sin regelmæssige Udprægning.

I Fig. 16, **I**, findes et Parti af en Kurv hos *Rudbeckia Neumanni*, som viser den stedfindende Udvikling af Blade og Knopper. Det er altid lykkedes mig ved at gjennemgaa

---

[1]) Flora 1860, S. 532. [2]) Cfr. l. c. S. 15—18, navnlig S. 17. [3]) L. c. S. 16.

[4]) Stængelspidser med indtil 5 Periblemlag vil man se t. Ex. hos *Solidago longifolia*; med 3—4 Periblemlag og med skarpt udpræget Plerom i det endnu ikke færdigtformede Kurvleje hos *Gaillardia lanceolata*, hvorimod det færdig dannede kun har et skarpt afsat Periblemlag. Ligeledes er der flere Periblemlag hos *Cirsium glabro-monspesulanum*. En for et Kurvleje usædvanlig høj Kegleform har jeg set hos *Ptarmica*.

flere af de fra en Kurv hentede Snit eller endog undertiden ved Betragtning af et enkelt Snit at finde flere Blade, i hvis Aksler der ingen Antydning var til Knopdannelse. At de med f betegnede Legemer ere Blade, fremgaar af deres Former, af deres Overgang i Kurvdækbladene, samt endelig af Overensstemmelsen i Udviklingshistorie med alle andre Phyllomer. Fig. 17, I, giver som Exempel et af disse Blades Anlæggelse; den finder Sted ved Celledeling i øverste Periblemlag. Det er tydeligt, at Knoppen opstaar efter Bladet; thi i dettes Aksel findes her endnu intet Spor til den (og dog er det ikke det yngste Blad paa Stængelspidsen); i den næstoverste Bladaksel paa Fig. 16, ved g, sees den derimod. Her viser det sig rigtignok saaledes, som Koehne gjør opmærksom paa, at Knoppen er fjernet mere fra Støttebladet end sædvanligt; men jeg har dog faaet et bestemt Indtryk af, at en, om end højst ubetydelig, Forbindelse mellem deres Grund existerer, saaledes at Vinkelen mellem dem ligger lidt oven over Kurvlejets Flade.

Callimeris incisa. Der er en brat Overgang fra Dækbladene til de støttebladløse Blomsterknopper. Paa disses senere Udviklingstrin ere de imidlertid omgivne af børste- eller avneagtige Legemer, der kunde formodes at være Bladorganer, ligesom Avnerne hos *Anthemis* og andre Slægter; at de maa ansees for Trichomer fremgaar, foruden af det meget sildige Tidspunkt for deres Anlæggelse og af deres uregelmæssige Stilling, ogsaa af den meget uordenlige Celleudvikling i dem, ved hvilken Dermatogenet forsvinder som et mod det indenfor liggende Cellevæv glat afgrænset Lag; om Celledannelsen foregaar alene i Dermatogenet eller ogsaa nedenfor dette, har jeg imidlertid ikke undersøgt.

Som almindeligere Resultater af mine Undersøgelser over Kurvblomsterne vil jeg anføre:

1. Kurvlejet anlægges og uddannes omtrent helt til sin blivende Form, for Blomsterdannelsen begynder. Der indtræder altsaa en Standsning i Dannelsen af Sideorganer, indtil dette sker. I Kurvlejets Indre foregaa følgende Forandringer. De nyligt anlagte Kurvlejer have som de vegetative Knopper en regelmæssig Bygning med i Regelen flere Periblemlag, tydelige Pleromrækker og et udpræget Pleromvækstpunkt (**II**, 3, 13, **I**, 20). Denne Regelmæssighed taber sig i de fleste Tilfælde under Kurvlejets Uddannelse; det færdigdannede Kurvleje har oftest kun 1 skarpt udpræget Periblemlag, under dette et uordentligt Plerom, og Vækstpunktet er udvisket saavel som Grænsen mellem Periblem og Plerom. Kun i faa Tilfælde bevares Regelmæssigheden i den indre Bygning endnu efter Blomsterdannelsens Begyndelse; men i alle Tilfælde bliver det umuligt at paavise et Vækstpunkt som en bestemt Cellegruppe i det tynde Cellevævsparti, der ligger over den hurtigt med luftførende Cellemellemrum opfyldte Marv (**I**, 10, 15; **II**, 2, 4). Vækstpunktet har udspillet sin Rolle; det har indstillet sin Virksomhed, og dets Celler udføre nu kun samme Arbejde, som alle deres Naboer.
2. Hos nogle Slægter ere Knopperne ganske uden Støtteblade (*Doronicum*, *Inula*);

findes derimod saadanne, udvikles de i nogle Tilfælde bestemt efter deres Akselsnop og paa den (*Anthemis*), i andre ligesaa bestemt før den, og ere da undertiden mere skilte fra den end sædvanligt (*Rudbeckia*). Der viser sig aldeles ingen Forskjel i Anlæg og Udvikling af Blomsterne, hvad enten det ene eller det andet er Tilfældet. Hvad der her iagttages ved Sammenstilling af flere Slægter, stemmer altsaa med og bekræfter Rigtigheden af det hos Korsblomsterne indenfor den enkelte Arts Metamorfose iagttagne. Den samme Modsætning mellem den vegetative og florale Region findes her som hist, idet alle vegetative Knopper, hvis Genesis jeg har undersøgt, opstaa længe efter deres Støtteblade, og Overgangen fra den ene Region til den anden sker paa samme Maade, snart jævnt, snart i Spring, dog aldrig saa jævnt som hist.

3. Da Blomsterdannelsen først tager sin Begyndelse, naar Kurvlejet har antaget eller næsten antaget sin blivende Form, og da Vækstpunktet omtrent samtidigt dermed maa antages at ophøre med sin Virksomhed, følger heraf, at en Deling af Vækstpunktet er en Umulighed. Men man vil endvidere overalt se (som paa **I**, 15; **II**, 2), at Blomsterne, saa længe de endnu kun indtage et lille Parti af Kurvlejet, anlægges langt til Siden for Stængelens Midtlinie, og neden for det Punkt, hvor Vækstpunktet har ligget eller efter den luftfyldte Marv og de andre Forhold at dømme maatte ligge, hvis det endnu kunde kaldes existerende. Det vil ialfald være umuligt at antage dets Existens, naar Blomsterdannelsen endelig naar Kurvlejets Top, og de sidste Blomster anlægges lige over Vækstpunktets Plads. Blomsterdannelsen fremkaldes ved en Foryngelsesproces i Stængelspidsens yderste meristematiske Væv, og det hele Forhold viser os, i hvor ringe Grad Vækstpunktets Virksomhed og nye sidestillede Kaulomers Anlæggelse afhænge af hinanden.

4. Prokambiumdannelsen sees oftest et Stykke indenfor den yderste Grænse af det ikke ordnede Cellevæv. Vil man sætte Pleromets Begyndelse der, hvor de regelmæssige kappeformede Cellelag ophøre, finder Prokambiumdannelsen altsaa Sted inde i Pleromet; vil man derimod sætte den ved denne, maa man antage, at der gives et uordnet Periblem, der i Intet kan skjelnes fra det uordnede Plerom i Stængelspidsens Indre. Tillige kunne mange af de øverste Nydannelser (t. Ex. de smaa Knopper Fig. 1, **II**) findes beliggende oven over det Sted, hvor Udprægningen til Prokambiumceller tager sin Begyndelse.

5. Knopdannelsen i Kurven udgaar aldrig fra det første Periblemlag, men i Regelen fra det straks under dette liggende Cellevæv. Hint hæves udelt i Vejret.

6. Hvor Bladdannelse paa Kurvlejet forefindes, sees den i alle Tilfælde at sætte 1ste Periblemlag i Arbejde, hos *Anthemis* og andre, med svage Dækblade forsynede, Slægter i Begyndelsen (maaske altid?) endog kun dette.

3. Papilionaceæ.

I sin «Allgemeine Morphologie», siger Hofmeister, S. 430: «Sehr deutlich ist es auch bei der ersten Anlegung der Inflorescenzen von Papilionaceen, z. B. von *Amorpha* ersichtlich, dass die Seitenachsen früher über den Umfang der Hauptachse heraus treten, als die sie stützenden Blätter»; og S. 411 om *Amorpha fruticosa*, atter: «Die halbkugeligen Anfänge der seitlichen Achsen der Traube sind früher sichtbar, als der spitzlichen Stützblätter». Da han betragter dette Fænomen (sammesteds S. 411) som en «Theilung der nackten, die jüngsten Blattanlagen überragenden Spitze des Stängels», har det altsaa sin Interesse at undersøge netop et af hans egne Exempler.

Over for en saa bestemt og gjentagen Udtalelse af en Mand som Hofmeister om Støttebladenes Fremkomst efter deres Akselknopper hos *Amorpha fruticosa*, har det i højeste Grad forbavset mig, at mine Undersøgelser førte mig til et ganske afvigende Resultat, hvorved Planten imidlertid vinder i Interesse; jeg har gjentaget mine Undersøgelser saa mange Gange og studeret mine Præparater med saa megen Omhu, at jeg ikke kan tvivle paa deres Rigtighed, og jeg kan kun tænke mig, at Hofmeister og jeg ikke have havt samme Art for os. I Stedet for at Bladene nemlig anlægges efter Akselknopperne, er for det første det modsatte Tilfældet.

Ved Betragtning af Fig. 23, II, vil man let komme til den Anskuelse, at de øverste med «*f*» betegnede Sidedannelser ere Blade; deres Form, der næsten straks er mere opadkrummet og spids, end Knoppernes plejer at være; den jævne Overgang fra dem til de neden for staaende utvivlsomme Støtteblade (*f*), og endelig den Del, som det første Periblemlag tager i deres Oprindelse, hvad Fig. 17 og 18, II anskueliggjøre, — alt dette viser os det. Endelig ere ogsaa de virkelige Knoppers egen Fremkomst et Bevis mod Hofmeister. Denne er nemlig følgende.

I Fig. 18 og 19 vil man se forskjellige Blade paa et noget videre Udviklingstrin end det i Fig. 17 tegnede, men endnu sees der ingen Knopper i deres Aksler; dog bemærkes der nogle ejendommelig langstrakte Celler inden for Bladakselen. Uden at jeg nærmere er i Stand til nøje at angive Celledelingerne, tror jeg dog, da jeg saa ofte har fundet disse Celler, hvor Knopperne vare ifærd med at danne sig, at turde sætte dem i Forbindelse med Knopdannelsen. Af Fig. 20—22, II vil man nemlig se, at Knoppen udvikler sig af Bladets Grund og selvfølgelig, hvad ogsaa Fig. 23 viser, kommer til at sidde paa denne og kun for en yderst ringe Del staar i direkte Forbindelse med Hovedaxen. I Fig. 19—23 vil man i Bladets Midtlinie se den begyndende Prokambiumdannelse. Oven for disse Prokambiumceller og lige inden for Bladakselen finder den Celleudvikling Sted, ved hvilken Knoppen bliver til. Efter Fig. 21 synes det, som om 1ste Periblemlag, der i Fig. 18—20 netop sees at strække sine Celler saa stærkt i radial Retning, havde delt sig i to

Rækker, og at den endnu ganske ubetydelige Knop derved var bleven til; men jeg maa tilstaa, at den nederste af disse Rækker muligvis ogsaa kunde være opstaaet af de neden for liggende Celler. Blandt disse sidste synes nogle at danne en Pleromrække. Undersøgelsen er ikke let, og jeg kan fejle i disse sidste Antagelser; men saa meget er vist:

Knopperne opstaa, naar deres Støtteblade have naaet en anselig Størrelse og flere Blade allerede ere anlagte oven for dem (se Fig. 23), og

Knopperne opstaa for deres allerstørste Del i selve Bladets Grund, om man end vil antage, at en eller to, ovenfor Bladet liggende og virkelig til Moderaxen hørende Celler, som f. Ex. de to tangentialt delte Celler i 1ste Periblemlag, Fig. 19, tage Del i Arbejdet.

Hvad Stængelspidsens Histologi angaar, da udmærker den sig ved at være usædvanlig storcellet (Fig. 16, **II**), ved kun at have et, højst to ofte temmelig ubestemt begrænsede Periblemlag. Man vil i Overensstemmelse hermed bemærke, at det bladdannende Lag i Fig. 17 heller ikke er saa skarpt afsat indad til, som ellers er Tilfældet. Pleromrækkerne ere derimod tydelige, men et skarpt udpræget Vækstpunkt kan ikke paavises; dettes Beliggenhed maa dog sættes ved det med *P* betegnede Parti, Fig. 16.

Om «Kløvning» eller «ulige Deling» af Vækstpunktet er der selvfølgelig ingen Tale, ikke blot paa Grund af den angivne Udviklingsgang, men ogsaa fordi Pleromrækkerne ende, og Vækstpunktet altsaa er beliggende oven for de yngste Sidedannelser. De øverste af disse (som Fig. 17 og 18) befinde sig i en lignende Meristemtilstand som selve Stængelspidsen; først i de noget ældre begynder Prokambiumdannelsen (Fig. 19).

Hos denne Plante faa vi altsaa en ny Bekræftelse paa, at Blad og Akselknop ere nøje sammenhørende Dannelser, der snart udvikles i harmonisk Ligevægt og begge i lige høj Grad have Forbindelse med Moderaxen, snart derimod affødes den ene af den anden — Bladet af Knoppen hos de nævnte Korsblomster og Kurvblomster, Knoppen af Bladet hos *Amorpha fruticosa.*

De i Ørsteds Afhandling om den tilbageskridende Metamorfose[1]) aftegnede Forhold (Fig. 4, B., S. 96, og Fig. 5, S. 99) vise sig nu mindre mærkelige, og de Bryderier, som f. Ex. Cupressineernes Æg havde gjort Morfologerne ved deres Stillingsforhold[2]), ville tabe deres Betydning ved Henblikket til *Amorpha.*

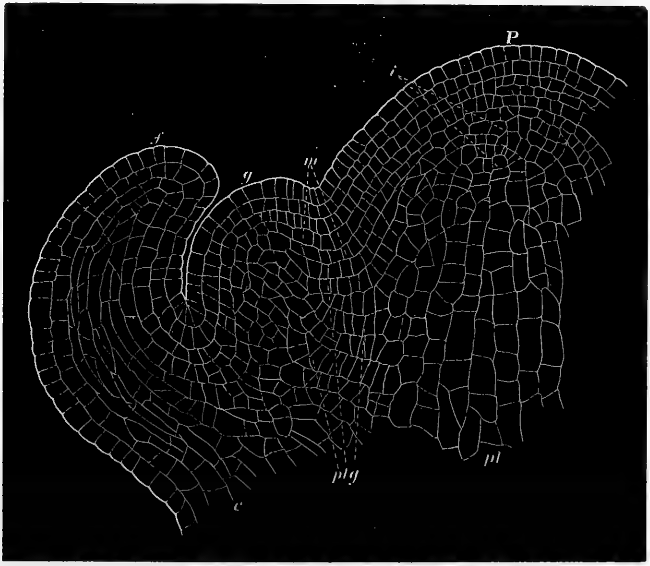
Blomsterstandene af Papilionaceer nævnes af Hofmeister[3]) som «ganz besonders» skikkede til at vise Knoppernes Fremkomst oven for de sidst anlagte Blade og altsaa «Deling» («Theilung») af den nøgne Stængelspids, og Kløverarterne nævnes sammen med Korsblomsterne[4]) som Exempel paa Støttebladenes Mangel ved de øverste Blomster i Blomsterstande.

---

[1]) Videnskabelige Meddelelser fra den Naturhistoriske Forening i Kjøbenhavn, 1868.
[2]) Se sammesteds, S. 89 ff. [3]) l. c., S. 411. [4]) ibid., S. 430.

Jeg har ikke havt Lejlighed til at undersøge Blomsterstande af mange andre ærteblomstrede Planter. De faa Bidrag, jeg har, ere følgende.

I Fig. 25, II, er skitseret et smukt Præparat af øverste Del af en Stængel af *Melilotus officinalis*; neden for den kuppelformede Stængelspids sees til venstre et Blad med sin Akselknop. Stængelspidsen er meget regelmæssigt bygget (hosstaaende Træsnit) med 4—5 Periblemlag og temmelig bestemt omskrevet Vækstpunkt. Vækstpunktet er beliggende ovenfor de øverste Sidedannelser, og Knoppen dannes meget tydeligt ved Celledelinger neden for 2det Periblemlag, der uforstyrret hæves i Vejret, uafhængigt af Vækstpunktet, og langt uden for Axens Midtlinie. Bladet er derimod dannet i det mindste neden for 1ste Periblemlag, og dette gaar, hvad der sjeldnere er Tilfældet, derfor udelt hen under Overhuden; et Exempel paa det samme omtaltes oven for under *Sisymbrium* (Fig. 5 og 14, Tav. I). Hvad der i dette Tilfælde er mest interessant, er den særdeles klare Medvirkning af Pleromet (*pl*) i Moder-



Xyl. I. Stængelspids af *Melilotus officinalis* med en Knop (*g*) og dens Støtteblad (*f*); *pl*, Pleromet i Moderaxen; *plg*, Pleromet i Knoppen; *P*, Axens Vækstpunkt; *i*, Plerominitialer.

axen ved Knopdannelsen, idet aabenbart dens yderste Pleromrækker ved gjentagne lodrette Delinger (*plg*) hjælpe med til Dannelsen af Døtreaxens Plerom. I Knoppens øverste Halvdel (ved *m*) sees ogsaa Periblemrækkerne at træde ind med og danne Pleromrækker for den.

I Knoppens nedre Halvdel er i dette, som i alle andre Tilfælde, Regelmæssigheden i Bygning ikke saa stor som i den øvre, fordi Bladets mindre regelmæssige og anderledes ordnede Væv (Prokambiumdannelsen er begyndt i Bladet ved *c*) dèr støder op til den. Den omtalte inderlige Forbindelse mellem Blad og Akselknop sees ogsaa her udtalt paa det klareste.

Knoppen anlægges efter sit Støtteblad, men temmelig hurtigt, saa at jeg ikke vover at sige, at der altid er ældre Blade oven over den paa Axen, naar dens Dannelse begynder.

Lupinus mutabilis har en særdeles regelmæssig Bygning i sin kegledannede Stængelspids, og en tydelig Plerominitialgruppe neden for nogle faa Periblemlag. Alle Nydannelser opstaa langt nedenfor Vækstpunktet, og tillige har jeg overbevist mig om, at man kan finde mere end et Blad oven for den yngste Knop.

Medicago sativa (**II**, 24). Den kuppelformede Stængelspids i Blomsterstanden har 2—3 Periblemlag. Neden for den sees de sidestillede Epiblastemer, Knopperne med deres Blade (*f—g*), og her have vi ofte paa samme Blomsterstand, lige som hos *Sisymbrium*, den smukkeste Overgangssuite fra smaa, af lange Blade støttede Knopper ved Blomsterstandens Grund til rent bladløse Knopper lige under Stængelspidsen. Paa enkelte Præparater har jeg tydeligt kunnet se Tangentialdelinger i Knoppens 1ste Periblemlag, der fremkaldte Dannelsen af den lille Hæl, *f*, paa de øverst eller midt paa Blomsterstanden stillede Knopper, ganske som hos Korsblomster og Kurvblomster. Vækstpunktet viser sig, aldeles uberørt af Knopdannelsen, at hævde sin Plads i Stængelens Midtaxe og være højere beliggende end de øverste Sidedannelser, selv naar disse ere Kaulomer.

Et Fænomen, som Omstændighederne ikke have tilladt mig denne Gang at forfølge videre, er den af Wydler og Bravais hos mange Papilionaceer omtalte Dannelse af «gemmæ accessoriæ»[1]). Hos *Medicago sativa* tror jeg dog at turde paastaa, at Knopperne anlægges i nedstigende eller, som man egenlig burde sige, i «stængelflyende» Udvikling ud ad Bladstilkens Grund i to alternerende Rækker. Det interessanteste er, at Knopperne staa paa Bladgrunden. Jeg tror, at Wydler næppe har Ret i, at de oprindeligt staa i *en* Linie og at Zigzagstillingen er et senere Udviklingstrin.

Cytisus Laburnum. Paa Blomsterstanden bemærkes det samme Forhold mellem Knop og Støtteblad, som hos foregaaende Plante: en omtrent samtidig Udvikling af Dobbeltorganets to Dele.

Trifolium pratense. Ligeledes vil man hos denne, ved at gjennemgaa en Del Blomsterstande, kunne træffe de samme Relationsforhold som hos foregaaende og hos *Cruciferæ.* De øverste Blomster synes helt at mangle Støtteblade[2]).

---

[1]) Flora 1860, S. 21, og Ann. d. sc. nat., Sér. II, t. 7.

[2]) Jvfr. Hofmeister, Allgem. Morphol. S. 430, og Fig. 134, S. 498.

De anførte Iagttagelser maa være tilstrækkelige til at vise,

at der i denne, som i de to foregaaende Familier, finder Knopdannelse Sted i Blomsterstanden saavel med forudgaaende som med efterfølgende Støttebladdannelse, uden at der heri kan erkjendes nogen som helst Væsensforskjel,

at Knopperne ofte først komme frem i Akslerne af Blade, der staa langt neden for Stængelspidsen og neden for yngre Blade (*Amorpha*),

at der ikke finder nogen som helst Vækstpunktdeling og endnu mindre Vækstpunktkløvning Sted af den altid meget smukt byggede Stængelspids,

at det, som er iagttaget med Hensyn til den histologiske Udviklingshistorie af disse Planters Kaulomer og Phyllomer, stemmer med det i det Foregaaende som almindelige Resultater opstillede; Knopdannelsen paa Bladgrunden hos *Amorpha fruticosa* bør herved nævnes som et interessant Extrem.

4. Graminaceæ.

Sammen med *Amorpha* anføres Græsblomsterstande af Hofmeister[1]) som Exempler paa, at Støttebladene træde senere frem end deres Akselknopper, og sammesteds nævnes Triticeernes Blomsterstande som «ganz besonders» gode Exempler paa «Theilung der nackten die jüngsten Blattanlagen überragenden Spitze des Stängels». Særligt anføres *Secale cereale*, *Elymus arenarius* og *Poa annua*. Jeg har derfor undersøgt flere Græsblomsterstande, og mine Resultater ere følgende.

Stængelspidsen har jeg overalt fundet kegleformet, undertiden meget høj, med jævnt afrundet Top og stejle Sider, og det hvad enten den var ren vegetativ eller floral (**III**, 5, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 13, o. s. v.). Dog er den højest i Blomsterstandene. Hos ganske unge Blomsterstande, der netop have begyndt Udviklingen af Sideaks, har jeg fundet (nøgne) Stængelspidser af en ganske paafaldende Længde og med næsten parallele Sider (Fig. 15, **III**, der ikke engang fremstiller et extremt Tilfælde).

Vi ville først betragte den af Hofmeister nævnte *Secale cereale* (Fig. 1—7, **III**).

Et ganske ungt Aks sees i Fig. 5, **III**; den kraftige (vegetative) Bladdannelse ved dets Grund uden Knopdannelse eller med Knopdannelse længe efter Bladdannelsen sees brat at gaa over til en tilbagetrængt Bladdannelse med mere samtidig Knopdannelse; Knoppen *r* staar endnu betydeligt tilbage for sit Støtteblad; Knoppen *s* er allerede kraftigere, skjøndt højere stillet paa Aksen, og dets Støtteblad svagere; ved *m* og *t* er Bladdannelsen yderligere indskrænket og Knopdannelsen kraftigere. Ved *p* (se Fig. 4) findes endnu

[1]) Allgem. Morphol., S. 430.

Spor til Støttebladet (*f*), men derpaa forsvinder ogsaa den sidste Rest, og ved de øverste Knopper mangle de ganske. Det er ikke blot umuligt udvendigt at finde mindste Spor af et Støtteblad under de enkelte Knopper, men det har ikke engang været mig muligt at paavise histologiske Spor af det i Form af tangentiale Delinger, saaledes at jeg maa anse det for fuldstændigt forsvundet.

Men i Spidsen af Akset vender Bladdannelsen tilbage, naar Endeakset anlægges, og Knopdannelsen hæmmes for et Øjeblik, for atter at tage Opsving. Paa Fig. 6 og 7, **III** betegne de med V, VI og VII mærkede Dannelser Sideaks af en Blomsterstand; Aksen nedenfor hver af dem og Grunden af dem er aldeles glat; thi Støttebladdannelsen er endnu undertrykt[1]). Men oven for dem findes der et mærkeligt Vendepunkt: Bladdannelsen dukker frem igjen, idet *gl—gl* ere de Blade, der blive Endeaksets Yderavner, medens de paa samme Akse stillede *pi—pi* ere Inderavner; hines Akselknopper (III, IV) ere yderst reducerede og komme ikke til Udvikling, disses (I, II) ere derimod langt kraftigere og af dem udvikles Blomsterne. Den Overvægt over Akselknopperne, som Støttebladene have lige ved dette Vendepunkt, tabe de imidlertid snart, idet det Forhold indtræder mellem Blad og Knop, som findes i Sideaksene (Fig. 2, 3, **III**). Den kraftige Knopdannelse midt paa Akset (Fig. 5), hvis Maal er Udviklingen af Sideaks, kan saaledes ikke umiddelbart gaa over til at faa et andet Maal, nemlig Udviklingen af en enkelt Blomst.

Paa den tegnede Blomsterstand af *Poa annua* (8, 9, **III**) sees samme Udviklingsgang. Knoppen I bliver til Blomst, II og III komme ikke til Udvikling som Yderavnernes Knopper, IV, V og følgende danne Blomsterstande.

Hidtil have vi kun beskjæftiget os med Hovedaxen i Blomsterstanden af *Secale cereale*. Sideaxerne udvikle sig som bekjendt til Smaa-Aks, der almindeligt (t. Ex. af Endlicher i «Genera plantarum», Lange i «Haandbog» o.s.v., Ascherson o.s.v.) beskrives: «Spiculæ bifloræ, cum rudimento floris tertii». Undersøgelsen af ganske unge Aks (2, **III**) giver imidlertid følgende. Nederst findes altid to golde Blade, der ere Aksets Yderavner (*gl*; den nedre af disse tillige med nederste Blomst ere bortpræparerede); derefter følge indtil 5 Blade, som alle støtte Knopper, og som blive til nedre Inderavner (*f* og *pi*); men da i Regelen kun de to nederstes Knopper komme til videre Udvikling og danne helt udviklede Blomster, medens de øvres fejlslaa, er Smaa-Akset altsaa vel 2-blomstret, men med Rudimenter af 2—3 andre, der i abnorme Tilfælde let kunne tænkes at komme til Udvikling.

Der er altsaa ingen anden Forskjel imellem Hovedaxen og Sideaxerne, end at alle Blade paa disse sidste komme til Udvikling, fordi de blive til Yder- og Inderavner (ligesom i

[1]) Her som i alle andre Figurer betegne *gl* — glumæ; *ps*, palea superior; *pi*, palea inferior; *g*, en Knop (gemma); *st*, stamina; *ov*, ovarium).

Hovedaxens Endeaks), og at Antallet af deres Sideaxer (Axerne af IIIdie Orden) er mindre. Thi Epiblastemdannelsen foregaar paa samme Maade paa den stejl-kegledannede Stængelspids, med omtrent samtidig Anlæggelse af Støtteblad og Knop (Fig. 2; øverste Epiblastem, *f—g*, i histologisk Billede i Fig. 3), saaledes som Forholdet ogsaa sees ved Hovedaxens Grund, paa Overgangsstedet (Fig. 4 og 5, ved *m*). Hofmeister har saaledes Ret i, at der her findes Knopper, som ere de sidste og øverste Nydannelser paa Axen. Men at de derfor kunne siges at udvikle sig ved «Kløvning» eller endog blot «Deling» af Vækstpunktet, maa jeg benægte i dette som i alle foregaaende Tilfælde. Den histologiske Udviklingshistorie viser dette paa det Bestemteste.

Stængelspidsen har en særdeles regelmæssig Bygning, der vil sees af Fig. 3, **III**, (Stængelspidsen af det i Fig. 2 tegnede Smaa-Aks). Dermatogenlaget er lige paa Stængelens Top lidt lavere end nede paa dens Sider (sammenlign ogsaa Stængelspidsen af *Hordeum*, 13, **III**), hvor Cellerne strække sig i radial Retning. Under det kommer i det mindste *et* Lag, der udelt gaar hen over hele Stængelspidsen, og som derfor efter Hansteins Betegnelsesmaade maa kaldes Periblem. Men det næstfølgende har sjeldent samme Selvstændighed som dette; thi dets Celler løbe ofte i Toppen sammen med de indenfor følgende Lags ellers Rækkers Celler (i Fig. 3, men ikke i Fig. 13), og partielle Delinger af det i to Lag forekomme ogsaa (Fig. 13, ved *m*). I nogle Tilfælde synes man at maatte regne dette 2det Lag med til Periblemet, i andre derimod til Pleromet, hvis faa Cellerækker fylde det Indre af Stængelspidsen. Det viser sig saaledes vanskeligt at adskille Periblem fra Plerom, naar man alene vil tage Bygningen i Stængelspidsen i Betragtning; og jeg har, som allerede bemærket, ikke ved disse Undersøgelser kunnet tilbørlig henvende min Opmærksomhed paa Stedet for Prokambiets Oprindelse. Men i alt Fald staar saa meget fast, at Pleromets Vækstpunkt er en lille Gruppe af Celler lige i Stængelspidsens Top under det 2det Cellelag, — en enkelt Topcelle har jeg ikke kunnet finde, skjøndt *Secale* hører til de Planter, hos hvilke Hofmeister angiver Forekomsten af en saadan.

Da nu enhver Knopdannelse hos *Secale* viser sig langt nedenfor Stængelspidsens Top, er Muligheden for Forekomst af Vækstpunktdeling udelukket; og dette fremgaar med endnu større Bestemthed, naar man nærmere betragter selve Knoppernes Anlægsmaade. I Fig. 3, **III**, kan den sees i de første Celledelinger; thi Knoppen *g* er fremkommen ved nogle faa (paa dette Snit *en*) tangentiale Celledelinger i Periblemlaget og den tydeligt udprægede 1ste Pleromrække (*n*).

Dersom vi med det samme betragte ogsaa de af *Hordeum vulgare* (Fig. 1, 11—15) givne histologiske Billeder sammen med dem, der ere hentede fra *Secale cereale*, ville vi faa et tydeligere Billede af det Ensartede i Udviklingen. Stængelspidsens med dennes fuldstændig overensstemmende Bygning sees af Fig. 13. I Fig. 14, vil man se de i Fig. 15 med I og III betegnede Knopper afbildede; *f—f* ere Støtteblade. De tangentiale Celledelinger, hvorved

de ere dannede, have fundet Sted i Periblemlaget, og for Knoppen III's Vedkommende tillige i den næstfølgende Række, der maaske ogsaa bør henføres til Periblemet. Om den med I betegnede Celledeling virkelig skulde være Begyndelsen til Knoppen, vover jeg ikke at paastaa; men jeg anser det for sandsynligt, og det vilde i alt Fald ikke være første Gang, at jeg ser Knopdannelsen begyndt i det Indre, før der er udvendigt synligt Spor af den. Bestyrket deri bliver jeg dels ved Henblik til Knop III, Fig. 14, dels til Fig. 11, hvor den øverste Knop tydeligt nok opstaar i 2det Cellelag uden Medvirkning af det 1ste og uden endnu at træde meget frem udvendigt.

Ved fortsatte tangentiale Delinger af de først delte Celler dannes Pleromrækkerne og Knopperne hæve sig i Vejret; ogsaa radiale Delinger forekomme i dem, skjøndt sjeldnere. Inden kort Tid giver Knoppen et fuldstændigt Billede af den gamle Stængelspids, kun at den ikke er saa høj og slank, og den har som hin en meget regelmæssig Bygning med smukke, udelte eller sjeldnere delte Pleromrækker. I Fig. 1 og 4 (*Secale*), 11 og 12 (*Hordeum*), Tab. **III**, ligger denne Udviklingsgang klar for Dagen. At utvivlsomme Pleromceller undertiden tage direkte Del i Dannelsen af Knoppens Plerom, synes at fremgaa af Fig. 12.

Det er altsaa af det Foregaaende klart, at Periblem- og Pleromceller, der ere aldeles uafhængige af Vækstpunktet, idet de ligge langt neden for det, indlede Knopdannelsen. Der findes selvfølgelig hverken «ulige Deling» eller «Kløvning» af Vækstpunktet.

Bladenes Dannelsesmaade har jeg endnu ikke særligt berørt. Den frembyder imidlertid, skjøndt ikke overalt, et fra næsten alle andre mig bekjendte Blade forskjelligt Forhold. Paa mange Steder viser sig nemlig det Interessante, at Dermatogenet, der ellers kun er Moderlag for Trichomerne, træder med i Arbejde ved Bladdannelsen og udfører Tangentialdelinger, — oftest samtidigt med at Celledelinger i Periblemet fremtræde; men i enkelte Tilfælde, i de mest reducerte Blade, synes hint alene at opbygge den lille Valk, der repræsenterer Bladet.

I Støttebladet for *r*, Fig. 5, **III**, har jeg saaledes kun fundet Periblemdelinger, men ingen Dermatogendelinger; ved *s* og *t* derimod fandtes disse; i *m* danne de, som Fig. 4 viser, endog næsten helt og holdent den lille Valk paa Knopgrunden, der er det eneste Spor af Støttebladet, og paa de efter *m* følgende Knopper, *p* (Fig. 4) og *q*, synes de ganske eneraadende om Bladdannelsen; Bladet svinder altsaa ind til en ubetydelig Dermatogendannelse paa Knoppens Grund. Paa de oven for *q* følgende Knopper fandtes ikke engang en saadan.

Medens Bladet, *f*, i Fig. 3 dannes baade ved Periblem- og Dermatogendelinger, findes disse sidste ikke i Fig. 1, hvor det er Delingen af 1ste Periblemlags Celler, der alene have skabt Bladet. Omvendt findes der ingen Dermatogendeling i Støttebladene for Knop III, Fig. 14, (i et lidt dybere liggende Plan end det tegnede saaes der dog *en* Tangen-

tialdeling i dette) og Knop I, samt i Fig. 13 (*Hordeum*), eller i Fig. 12, eller i det øverste Blad, *f*, Fig. 11, medens de to straks neden for dette følgende Blade hver have *en* Dermatogen-Tangentialdeling.

Denne ejendommelige Lovløshed og denne Dermatogenets Deling ved andet end radiale Vægge, stemmer iøvrigt godt med den Uorden, der efter Hanstein[1]) viser sig hos Græsserne ved Kimdannelsen, og som synes at forekomme hos andre, Kryptogamerne nærmere staaende, Planter, t. Ex. ifølge Pfitzer hos Conifererne[2]). Videre at forfølge Yder- og Inderavnernes Udvikling, og den Rolle, som Dermatogenet muligen spiller under disses Uddannelse, laa her uden for min Plan[3]).

Efter at jeg allerede har anført de histologiske Iagttagelser, som jeg har gjort hos *Hordeum vulgare*, bliver der ikke meget at tilføje om denne.

Fremhæve vil jeg blandt andet, at Anlæggelsen af de efter hverandre følgende Sideaxer med deres Støtteblade gaar saa samtidigt og hurtigt for sig, at Hovedaxen, som Fig. 15, **III**, viser, er dækket med en Mængde næsten lige store smaa Fremragninger, der danne ligesom en Bølgelinie opad Axens Sider. Det anatomiske Billede af disse (Fig. 14) er allerede gjennemgaaet oven for. Det giver et godt Exempel paa en samtidig Anlæggelse af Støttebladet og dets Akselknop (se ogsaa Fig. 13, nederst til venstre) og tillige paa, at disse to Organer virkelig høre sammen, og at den Omstændighed, at de ere forenede ved deres Grund, ikke er en simpel Følge af, at de anlægges omtrent samtidigt, saa at Vævet mellem dem derved passivt hæves med til Vejrs; thi hvis dette var Tilfældet, maatte vi i et Tilfælde som det foreliggende, hvor der ikke er større Afstand mellem Knoppen og det oven for følgende Støtteblad end mellem den og dens eget, og hvor Tidspunktet for alle tre Organers Dannelse næsten er den samme, kunne vente den lige saa godt forenet med hint som med dette.

Medens Sideknopperne paa *Secales* Aks næsten alle aldeles mangle Støtteblade, have de her et ganske svagt Spor til dem; Støttebladene udvikles nemlig alle, dog ikke meget ud over det Anlægstrin, som de staa paa i Fig. 11—15. Jvfr. ogsaa Fig. 85, Tab. **III**, i min Afhandling: «Er Koppen hos Vortemælken (*Euphorbia* L.) etc.» i «Videnskabelige Meddelelser» 1870, hvor tillige Sideaksenes Udvikling gives. At der heller ikke hos disse kan være Tale om Vækstpunktkløvning, naar de to Sideknopper paa Axen af 2den Orden (Sideaksene af de tre i Gruppe staaende Smaa-Aks) anlægges, skjøndt de ere de øverste Nydannelser paa deres Moderaxe, vil tydeligt fremgaa ved Betragtningen af Knoppen *D*

---

[1]) «Entwickelung des Keimes der Monokotylen und Dikotylen».

[2]) Sitzungsber. d. niederrhein. Gesellsch. 7de Aug. 1871, aftrykt i Botan. Ztg. 1871, S. 893.

[3]) Efter hvad jeg i Forbigaaende har kunnet lægge Mærke til, er Ligulaen paa Græsbladet væsenligt, skjøndt næppe udelukkende, en Dermatogendannelse.

paa denne Figur; D^2 opstaar langt neden for Spidsen af D^1, som uforstyrret indtager Centrum i den lille Kvast, ganske som hos *Valeriana Phu* (se nedenfor S. 61).

Af andre Græsarter har jeg betragtet følgende, uden dog at foretage histologiske Undersøgelser af dem.

Lolium complanatum. Bladet opstaar her, i alt Fald undertiden, ikke kort før sin Knop, hvilket sikkert staar i Forbindelse med den kraftigere Udvikling, som det overhovedet faar i sin Egenskab af nedre Yderavne. Knop og Blad synes afvekslende at være de højest stillede Nydannelser paa Axen. Den stærke Zigzagbøjning, som denne har, og som mulig kunde antages for et Tegn paa en Vækstpunktkløvning, viser sig straks, naar Knoppen anlægges, og foraarsages sikkert af dennes stærke Udvikling og Størrelse i Forhold til Stængelspidsen.

Poa annua (Fig. 8 og 9, **III**). Paa Hovedaxen sees en lignende Udviklingsgang som hos *Secale* og *Hordeum*. Den vegetative Bladdannelse hører pludselig op, og Dækblad- med floral Knopdannelse tager sin Begyndelse. Støttebladene synes aldrig at mangle for Knopperne af 1ste Orden i Blomsterstanden; disse udvikle straks Sidegrene, og de første af disse i hver Blomsterstand ligge alle paa samme Side af denne, d. e. Knopperne paa den ene Side af Axen ere indbyrdes homodrome, men antidrome med dem paa den modsatte Side. (Fig. 8—9, der fremstille en og samme Blomsterstand fra to modsatte Sider, vise dette). Knop- og Bladdannelse i Smaa-Aksene er omtrent samtidig, dog kommer Knoppen maaske lidt senere til Verden end Bladet; men ved sin kraftigere Udvikling bliver den hurtigt langt kolossalere end Bladet, ja selv end Stængelspidsen, som derfor tvinges til Siden, og saaledes, ligesom hos *Lolium*, afvekslende kastes til højre og venstre (Fig. 16, **III**). Knoppen I er her den sidste Nydannelse paa Axen, hvis Stængelspids kaster sig til venstre og saaledes faar en ny Vækstretning. Man har her tillige et Exempel paa, at man ikke altid maa slutte fra en vis Forskjel i Størrelse mellem to unge Organer tilbage til en lignende Forskjel i Tiden for Anlæggelsen. Saavel ved Grunden af Hovedaxens Endeaks (Fig. 8—9), som af alle Smaa-Aks, der afslutte Sidegrenene, finder den samme Forandring Sted i Forholdet mellem Knopperne og Støttebladene, som oven for omtaltes under *Secale*.

Avena fatua. Fig. 17, **III**, viser fuldkommen Overensstemmelse med Fig. 16 af *Poa*. En kegledannet Stængelspids overrager altid den yngste Nydannelse, men kastes ligesom hos hin ved Knoppernes stærke Udvikling afvekslende til højre og venstre Side. Af Knop I er den nu kastet til højre; ved næste Knopdannelse vil den kastes til venstre; men naar jeg efter al Analogi maa antage Vækstpunktets Beliggenhed som hos *Secale*, *Hordeum* og de øvrige Græsarter, som jeg har undersøgt i denne Henseende, finder der dog ingen Vækstpunktkløvning Sted. Mod denne taler ogsaa det, at alle de af mig betragtede Stængelspidser hos Græsser (hvilke ikke ere faa), have (navnlig hvad Smaa-Aksene angaar) omtrent samme (kegledannede) Form; og jeg anser ikke dette for muligt, hvor en virkelig

Vækstpunktkløvning forekommer. Vi have saaledes her flere Tilfælde, som maatte erklæres at være Vækstpunktkløvning, hvis man vilde følge Sachs (oven for S. 13); men som ganske bestemt ere langt fra at være det[1]).

Phalaris Canariensis. Den ved Grunden af Blomsterstanden stedfindende Støttebladdannelse hører hurtigt op, og Knopperne anlægges uden Støtteblade umiddelbart paa Grunden af den lavt kegleformede Stængelspids. Denne arbejder uforandret i samme Retning, og Vækstpunktdeling forekommer næppe.

Bromus pendulinus (10, III). Stængelspidsen i Smaa-Aksene kastes ogsaa her en Smule til Siden, skjøndt mindre end hos *Poa* og *Avena*, og maaske heller ikke altid. Knopdannelsen er ikke heller saa kraftig som hos hine. Den afgiver saaledes en Overgangsform mellem de Stængelspidser, der beholde uforandret Vækstretning, og dem, hos hvilke den veksler. Bladet anlægges før sin Akselknop, men rigtignok højst ubetydeligt; thi Knoppen I begynder allerede at blive synlig over det endnu yderst svage Støtteblad (d. e. nedre Inderavne).

Resultaterne af de foregaaende Undersøgelser ere altsaa disse. Der forekommer hos Græsserne de samme tre Forhold, som vi have fundet hos de foregaaende Familier:

1. Anlæggelse af Bladet før dets Akselknop og med begge Modifikationer: med Anlæggelse af Akselknoppen straks, før noget nyt Blad opstaar, eller først (i den rent vegetative Region[2]) efter at et eller flere ere opstaaede oven for;
2. Samtidig Anlæggelse af Blad og Akselknop, og
3. Anlæggelse af Knoppen før sit Blad eller rent uden Støtteblad.

Overalt i de undersøgte Blomsterstande har jeg fundet den paapegede almindelige nøje Forbindelse mellem Bladet og Akselknoppen. Naar det t. Ex. hos *Hordeum*, Fig. 11 (nederste Knop), ser ud, som om Bladet er opstaaet paa Akselknoppen, da er det her et sekundært Forhold, thi Fig. 13, 14 og Fig. 11 (øverste Knop) vise tydeligt nok, at baade Blad og Knop opstaa paa Axen. Lignende Billeder har jeg aldrig kunnet finde hos t. Ex. *Anthemis* og *Sisymbrium.* Men om de til blot og bar Dermatogendannelser reducerede Blade i Fig. 4, maa jeg rigtignok antage, at de først ere opstaaede paa den allerede dannede Knop.

I nogle Tilfælde, særligt hos den af Hofmeister nævnte *Secale cereale* og hos *Hordeum vulgare*, har jeg bevist saa godt, som jeg tror det muligt at bevise det, at der

---

[1]) Pringsheim kalder det (Monatsber. Berl. Akad. 1869) »eine sehr häufige Erscheinung«, at Axen forandrer Retning, hvor Knopdannelsen finder Sted paa lave Stængelspidser.

[2]) Cfr. Sachs's Lehrb. 1870, Fig. 107, Længdesnit gjennem den vegetative Stængelspids af Mays. Den yngste Knop findes i det tredie-yngste Blads Aksel.

ingen Vækstpunktdeling finder Sted, og i alle de andre maa jeg antage det samme at være Tilfældet, da de ydre Former af Stængelspidserne stemme med hines.

Endelig vil jeg fremhæve, at vi hos Græsserne have Lejlighed til at se det Urigtige i at ville sætte den øverste Sidedannelse som Vækstpunktets naturlige Grænse; thi ofte først langt neden for den begynder en Udprægning i blivende Væv, særlig Prokambiets Uddannelse.

5. Cyperaceæ.

Kun en enkelt Iagttagelse kan jeg her anføre. *Isolepis tenella* har en lav kegleformet floral Stængelspids. Blomsterknopperne anlægges paa denne hurtigt efter deres Støtteblade, og før det næst følgende Blad bliver synligt. Men da Stængelspidsen altid rager op over dem og indtager uforandret samme Stilling i Forhold til alle Sidedannelser, finder der ingen Kløvning, sikkerlig heller ingen ulige Deling af Vækstpunktet Sted.

Da *Carex* ifølge Caruel[1]) udvikler Knop og Støtteblad af en fælles Fremragning, eller altsaa maaske snarere anlægger sit Støtteblad paa sin Knop, synes altsaa alle de hos de foregaaende Familier omtalte Tilfælde ogsaa at forekomme her. Thi i den rent vegetative Region anlægges Knopperne sikkerlig først længe efter, at deres Støtteblade ere udviklede.

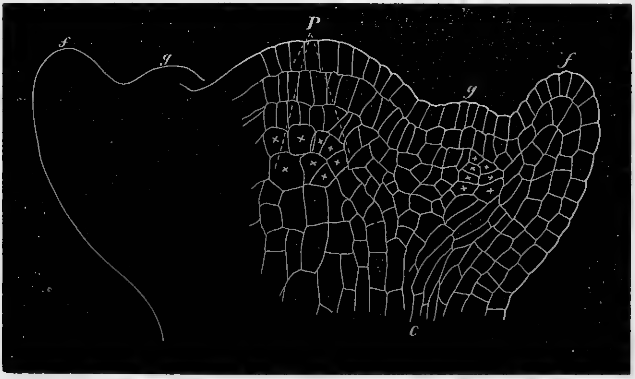
6. Salicineæ.

Salix er som *Amorpha* et af Hofmeisters Exempler paa «Theilung» af Stængelspidsen, og er fra ham gaaet over i t. Ex. Sachs's Lehrbuch (2den Udg., S. 152) som Exempel paa Knopdannelse med efterfølgende Støttebladdannelse; det er nu mærkeligt nok, at det er gaaet mig med *Salix*, som med *Amorpha*. Jeg har kun undersøgt Knopdannelsen i Hunraklen af *Salix nigricans*, og egenlig kun faaet to rigtigt tydelige Præparater, fordi Blomsterudviklingen var for vidt fremskreden paa den Tid, da jeg vilde undersøge den. Det ene er tegnet Fig. 1, IV (Længdesnit). Allerede Betragtningen af de ydre Former synes at røbe, at Hofmeister ikke har Ret i, at de øverste Dannelser paa Axen ere Knopper; thi de gaa tydeligt nok jævnt over i de neden for staaende utvivlsomme Dækblade, der paa deres Grund bære smaa Knopper. Den histologiske Udviklingshistorie bekræfter denne Opfattelse; Fig. 2 og 3 ville nemlig vise, at Tangentialdelinger i 1ste Periblemlag spille en vigtig Rolle ved deres Fødsel, og ifølge det, som vi have set oven for, tør maaske allerede deraf sluttes, at de snarest ere Blade. Under den følgende Udvikling (Fig. 4) sees det oprindelig næsten halvkugleformede Epiblastem at spidse sig til samtidig med, at en svag Vorte kommer til syne paa dets Grund. Det er nu klart, at det er

[1]) Ann. d. sc. nat. S. V, T. 7, 1867, S. 109.

Udprægningen i Blad (*f*) og Akselknop (*g*), som her er gaaet for sig. Bladet antager hurtigt den sædvanlige Bygning med Cellelag, som ved en fortsat Spaltning af dem tage til i Antal, naar man fra Spidsen gaar ned mod Grunden, og Prokambiets Dannelse tager sin Begyndelse (Fig. 4, 5, 6, IV, ved *c*); ved dette er der at mærke, at det ligger fjernere fra Bladets Ryg end sædvanligt. Ved Knoppens Dannelse er tvært imod Regelen, men vel i Overensstemmelse med Udviklingen hos *Amorpha*, 1ste Periblemlag i Grunden af det oprindelige endnu temmelig prægløse og halvkugleformede Epiblastem meget virksomt, og jeg har ved næsten alle Knopper set det spalte sig (Fig. 4 og 5), men iøvrigt tage ogsaa neden under liggende Celler Del i Knopdannelsen (de under *g* med Kors mærkede paa Xyl. II). Pleromrækker udpræges hurtigt (Fig. 6). Jeg kan nu ikke tvivle paa, at Epiblastemet, *f*, Fig. 3, er et Phyllom; men jeg vil ikke undlade at henlede Opmærksomheden paa, at det var meget mere berettiget her end hos de tre foregaaende Familier at tale om et prægløst Epiblastems «Deling» i Blad og Knop. I alt Fald fremgaar det tydeligt af Udviklingen, at Knop og Blad danne et Dobbeltorgan, have fælles Fod paa Moderkaulomet, og udvikle sig i en inderlig Forbindelse med hinanden.

Hvad Spørgsmaalet om Deling af Vækstpunktet angaar, da kan der ingen Tale være om dens Forekomst; thi hvis man ikke vil betragte de øverste Epiblastemer som Phyllomer, kan man endnu mindre betragte dem som Kaulomer, efter som Hovedmassen af dem aabenbart gaar med til Dannelsen af Bladene, og disse «prægløse Epiblastemer» dannes altid til Siden for og uden for Topcellegruppen. Om «Kløvning er der altsaa endnu mindre



Xyl. II. *Salix nigricans.* Øverste Del af en ung helt anlagt Rakle.

Tale, og dette gjælder selv ved Dannelsen af det sidste Epiblastem paa Axen, ved hvilket en Knop virkelig opnaar at blive den øverste Nydannelse paa Axen; dette sees af Træsnittet

(Xyl. 2), som viser den lave Stængelspids af en helt anlagt Rakle med de to øverste Dækblade og deres Akselknopper. Pleromrækkerne gaa næsten til Spidsen og efterlade mellem sig og Dermatogenet kun de to storcellede Periblemlag, der ogsaa findes paa den i kraftig Udvikling værende Stængelspids, og som sees at spalte sig paa højre Side. De med Kors mærkede Celler synes at maatte regnes til Plerominitialerne, men Vækstpunktet har aabenbart nedlagt sit Arbejde. Det er mærkeligt, at to af Hofmeisters faa Exempler paa Knopdannelse paa Axen oven for det øverste Blad (*Amorpha* og *Salix*) netop skulle være Exempler paa Knopdannelse ikke blot længe efter Støttebladets Dannelse, men paa Støttebladets egen Grund. Endnu skal tilføjes, at jeg paa den yngste Blomsterstand, som jeg opnaaede at se, med temmelig Bestemthed saa flere Epiblastemer oven for det Punkt i Axen, hvor Prokambiumdannelsen først kunde bemærkes.

7. Grossulariaceæ.

Ribes sanguineum (Fig. 18—22, **III**). Undersøgt tidlig paa Sommeren, ja selv hen i Begyndelsen af August, sees i alle Knopper en lav kuppelformet Stængelspids (Fig. 19) med nogle faa Periblemlag, med tydelige Plerominitialer og uden Spor til Knopdannelse i de neden for staaende Bladaksler (*f*); paa den udvoksne vegetative Gren støtte derimod alle Blade Knopper, og hermed er altsaa bevist, at disse opstaa længe efter deres Støtteblade. I Slutningen af August og hen i September anlægges Blomsterklaserne, men i disse vendes Forholdet om: Knoppen anlægges lige efter eller samtidig med sit Støtteblad, og de Tilfælde ere altsaa hyppige, da en Knop virkelig er den øverste Nydannelse paa Axen; ikke desto mindre kan der aldeles ikke være Tale om, at den er dannet ved lige Vækstpunkt-Deling, eller «Kløvning», hvilket vil fremgaa af det Følgende.

Stængelspidsen (Fig. 20—22, ved *P*) er en meget ubetydelig lille Kuppel, som altid findes midt imellem de betydeligt større Blomsterknopper, der anlægges i tydelig Spiral. Fig. 18 giver den histologiske Udviklingshistorie. Stængelspidsen har ikke mere end 2 Periblemlag (undertiden med Antydning af et 3die); Pleromrækkerne løbe ganske lodrette og ende i en faacellet Initialgruppe, der forbliver uberørt oven for det yngste Knopanlæg. Knop og Blad ere endnu forenede i en fælles ubetydelig Fremragning og synes at fødes omtrent paa samme Tid; Knoppens Pleromrækker ere anlagte, og Moderaxens yderste Pleromrækker tage tydelig Del i Arbejdet herved; første Periblemlag tager ikke direkte Del i Knopdannelsen, og 2dets Deltagelse er i alt Fald højst ubetydelig. Ved Bladdannelsen sættes derimod begge Periblemlagene i Arbejde.

---

[1]) Neden for Bladet er 1ste Periblemlag tegnet vel bredt.

8. Umbelliferæ.

Hos Skærmplanterne kunde man formode Kløvning af Vækstpunktet, fordi Fællesaxerne ere saa reducerede og Sideaxerne saa sammentrængte, og virkelig angiver Clos ogsaa her Forgrening ved «partition»[1]; men Sielers Undersøgelser over Blomsterdannelsen i denne Familie[2]) saavel som Payers Figurer[3]) give aldeles ingen Antydning deraf, — tvertimod, thi Sideaxerne synes altid at anlægges i Spiral paa Randen af en bred «skiveformet» eller i alt Fald kuppelformet Stængelspids. Jeg har undersøgt *Æegopodium Podagraria*, *Chærophyllum aureum*, *Anthriscus silvestris* og *Daucus Carota* (den sidste dog ikke i histologisk Henseende). Stængelspidsen i Blomsterstandene er overalt fladt kuppelformet (Fig. 12, **IV**) med 1—2 sjeldent 3 Periblemlag, og Pleromrækkerne stile i en ret lodret Linie lige mod dens Top. Hvor det er lykkedes mig tydeligt at se Dannelsen af Sideaxer, som i Fig. 9, har jeg set Grunden til dem at lægges ved Celledelinger neden for 1ste eller 2det Periblemlag, og Pleromrækker træde ofte som hos *Chærophyllum* hurtigt op og med stor Regelmæssighed. Denne Knopdannelse ligger tydeligt langt fra Vækstpunktets Centrum, foregaar altsaa ikke ved Vækstpunktkløvning, men den finder rigtignok undertiden Sted i en saa stor Nærhed ved Vækstpunktet, at nogle af dettes periferiske Celler maaske undertiden tage Del med i den.

Dernæst have vi ved Bladdannelsen at henvende vor Opmærksomhed paa dens Forhold til Knopperne. Hvor Støtteblade overhovedet anlægges paa de nederste (yderste) Grene i en Skærm (de inderste mangle dem ganske), ere de i Reglen meget smaa og anlægges samtidigt med eller efter Knoppen. Sieler angiver saaledes ogsaa[4]), at de anlægges kort efter Blomsten hos *Heracleum Spondylium*, *Chærophyllum bulbosum* o. fl., samtidig med den hos *Peucedanum Cervaria* og *Daucus Carota*. I de Tilfælde, hvor de anlægges efter Knoppen og tillige ere meget reducerede, har det været mig klart, at de som hos *Anthemis* o. s. v. opstaa paa Knopgrunden. Ogsaa her kan man udtale dette med større Sikkerhed end hos *Sisymbrium*; paa Knoppen, Fig. 9, er nemlig Støttebladet endnu ikke synligt, men da den er en af de nederste Knopper i Skærmen, kan man med Sikkerhed sige, at det vil komme frem, og vi ville da faa et Billede som Fig. 10 (i Oversigtsbillede i Fig. 8). Andre Billeder af det forskjellige Forhold mellem Knop og Støtteblad sees Fig. 11, hvor Bladet er temmelig stort (omtrent som det til venstre i Fig. 7), og hvor Prokambiumdannelsen (*c*) er begyndt, Fig. 7 (ligeledes af *Chærophyllum*) og Fig. 12 (af *Aegopodium*, der, skjøndt den tilsyneladende aldeles mangler Svøb, dog har et saadant antydet ved de smaa Pukler, der findes paa alle Knopgrunde og næsten danne en sluttet Ring Skærmen rundt). Hvor Bladet er meget reduceret opstaar det ogsaa hos disse Planter alene i 1ste Periblemlag.

---

[1]) Bull. Soc. bot. de France, 1855, S. 78 og 502. [2]) Bot. Ztg., 1870, S. 361.
[3]) Organogén., Tab. 88. [4]) L. c., S. 365.

Hos Payer findes der i Almindelighed ingen nojagtige Angivelser med Hensyn til Fremkomsten af Knop og af Stotteblad; jeg undlader derfor næsten overalt at henvise til ham. Hans Tegninger af Smaaskærmens Dannelse hos *Heracleum barbatum*[1]) vise dog, at Blade og Akselknopper fremkomme paa en Stængelspids af omtrent samme Form som de af mig iagttagne; de første Dækblade ere lidt større end deres Akselknopper, og navnlig synes Fig. 2 at vise, at Bladdannelsen ogsaa kan være fremmeligere end Knopdannelsen.

9. Ranunculaceæ.

Delphinium Consolida (Fig. 15—17, **IV**). Stængelspidsen er temmelig svær og har en noget flad Top (Fig. 17). Der er ikke mere end et Periblemlag skarpt begrænset, og kun hist og her træder ogsaa et 2det frem. Under dem kommer et ikke meget ordentligt Meristem, der hurtigt faar luftfyldte Cellemellemrum (Fig. 17) og kun dybere nede har nogenlunde regelmæssige Pleromrækker. En tydelig udpræget Plerominitialgruppe findes ikke. Bladene anlægges ved Tangentialdelinger i 1ste og 2det Periblemlag (Fig. 15, der er det øverste Blad paa Fig. 17, og Fig. 16), og det er meget tydeligt, at Knopperne først komme frem en Stund efter Bladene, saa at flere af disse findes anlagte højere paa Stænglen end den yngste Knop. Selv paa et enkelt Snit er det muligt at finde flere end *et* knopløst Blad. Vækstpunktet kan altsaa umuligt direkte tage Del i Knopdannelsen. Paa et senere Stadium vise Knop og Støtteblad sig tydeligt forenede ved deres Grund (Fig. 17). Der er flere Blade oven for det Sted, hvor Prokambiumdannelsen først bemærkes.

10. Scrophulariaceæ.

Veronica virescens (Fig. 13, **IV**), *longifolia* og *crassifolia* frembyde omtrent de samme Forhold. Paa den helt vegetative Stængel anlægges Knopperne længe efter deres Støtteblade, og en Mængde af de øverste af disse ere knopløse. Paa den florale Stængel anlægges de kun kort Tid efter deres Blade, men det Tilfælde synes dog at være sjeldent, hvor en Knop er den øverste Nydannelse paa Axen. Stængelspidsen er snart en kraftig Kuppel (som paa Fig. 13), snart er den lavere. Den er regelmæssig bygget, med smukke Pleromrækker og 1—3 Periblemlag, og Topcellegruppen er derfor temmelig nøje bestemt. Bladene anlægges som sædvanligt fortrinsvis i 1ste Periblemlag, og der synes at kunne være i alt Fald nogle

---

[1]) Organogénie, Tab. 88.

af dem oven for den øverste Prokambiumstræng. Knopperne opstaa i Akselen mellem Blad og Moderstængel neden for 1ste Periblemblag eller ogsaa tillige ved Celledelinger i dette.

Linaria striata. Den øverste Del af en Blomsterstand sees Fig. 14, **IV.** I alt Væsenligt stemmer den med *Veronica*, dog synes Knopperne at følge lidt hurtigere efter deres Støtteblade end hos denne. Særligt vil jeg her fremhæve den tydeligt udtalte Forbindelse mellem Blad- og Knopgrund.

Digitalis lutea (**IV**, 18—19). Blomsterstandens Stængelspids har den sædvanlige Kuppelform, undertiden med lidt affladet Top. Her træder det Mærkelige frem i Bygningen, at der kun findes et eneste skarpt udpræget Cellelag, nemlig Dermatogenet, og det Indre fyldes af et uordentligt Meristem, i hvilket der altsaa ingen Forskjel er paa Periblem og Plerom. Dog er en yderste Periblemrække ofte hist og her tilstede. I Stængelspidsen fremtræder snart luftfyldte Celle-Mellemrum. Knoppen anlægges længe efter sit Støtteblad paa den rent vegetative Stængel; hurtigere, men dog efter det, paa den florale. Et godt Stykke neden for Toppen af dennes Stængelspids og selv noget lavere end det øverste af den luftfyldte Marv (Fig. 18) fremtræde Epiblastemerne. I Fig. 19 sees et Blad med sin Akselknop; den sidste er dannet under det her tydelige 1ste Periblemlag, men udprægede Pleromceller sees ikke. Prokambiumdannelsen finder Sted vist kun lidt neden for det øverste Blad.

Digitalis pauciflora (**IV**, 20—23) er langt interessantere end foregaaende Art. Paa den rent vegetative Stængel er der ikke Spor til Knopper i mange af de øverste Blades Aksler, og der er kun 1 tydeligt Cellelag, nemlig Dermatogenet, paa den svagt kuppelformigt hvælvede Stængelspids. Naar Stænglen bereder sig til Dannelsen af Blomsterknopper, bliver den fladere og i Midten noget indhvælvet (Fig. 20, der viser Stængelspidsen i Overgangen fra vegetativ til floral), og naar Blomsteranlæggelsen er i fuld Gang, har den den højst mærkelige Kraterform, som sees af Fig. 21; intet andet Sted har jeg truffet en saadan Stængelspids paa Kaulomer, der siden forlænge sig og danne, som her Tilfældet er, lange klaseformede Blomsterstande. Dækbladene (*f*) med deres Akselknopper (*g*, Fig. 21) anlægges paa Kraterets Rand; men da de straks efter staa stillede paa en jævnt udad og nedad skraanende Flade, maa Kratersiderne altsaa ligesom krænges ud ved en i hele Randen stedfindende Vækst.

Ligesaa interessant og afvigende som hos *D. lutea* er ogsaa her den indre Bygning; thi der findes af regelmæssige Cellelag kun det usædvanlig storcellede Dermatogen (Fig. 22, der er Bunden af det i Fig. 21 afbildede Krater), og straks neden for dette følger et uordnet Cellevæv, som fylder hele Stænglens Indre, endog uden at ordentlige Pleromrækker fremtræde, og i hvis yderste Parti Blade og Knopper anlægges; kun paa enkelte Steder sees ligesom hos hin Antydninger af, at Cellerne straks indenfor Dermatogenet ordne sig til en Periblemrække (Fig. 23). Hvad Sideorganernes Dannelse angaar, ile Bladene lidt forud for deres Akselknopper, og et Blad er vist altid den øverste Nydannelse paa Axen. Ved Knopdan-

nelsen sees enkelte Pleromrækker forme sig dybt nede i det uordnede Meristem (Fig. 23), medens Bladenes Celler som sædvanlig paa bestemte Steder strække sig i Længden og dele sig paa langs, det vil sige skride til Prokambium-Dannelse (Fig. 23). Dette sker temmelig hurtigt efter Bladets Anlæggelse.

Skjøndt ingen særlig Cellegruppe hos de to *Digitalis*-Arter udpræger sig som Vækstpunkt, maa dette dog henlægges til Midten af Kraterets Bund, og om en Vækstpunktklovning er der i alt Fald ikke Tale, efter som alle Epiblastemer ligge langt uden for Midtpunktet af Axen, og det øverste vist aldrig er et Kaulomanlæg.

Digitalis-Slægten er saaledes interessant ved den indenfor den forefundne Stængelbygning, idet der ikke er det mindste Holdepunkt for Adskillelsen af Plerom fra Periblem, naar man vil gaa ud fra Vævets Bygning i Stængelspidsen. Den er endvidere interessant ved den hos en enkelt Art (eller maaske nogle Arter) forekommende Kraterform af Stængelspidsen, til hvilken jeg ikke kjender noget Analogon undtagen hos oversædige Blomster eller Blomsterstande, hvis Stængelstykker altid forblive uudviklede (saasom hos *Ficus*), og ikke engang med disse er Overensstemmelsen altsaa fuldkommen.

II. Orchidaceæ.

Orchis Morio hører til de af Hofmeister[1]) nævnte Exempler paa «Theilung der nakten Spitze des Stängels». Jeg har ikke kunnet undersøge denne, men andre Arter af Orchideer, som *Orchis mascula* (IV, 26—27), *O. maculata* og *Epipactis palustris* (IV, 28). Alle tre Forhold synes at forekomme inden for Blomsterstanden, nemlig Knopdannelse en Stund efter Støttebladets Dannelse eller samtidigt med denne eller lidt før den. Hos *O. mascula* vil man saaledes paa Figur 26 se en mægtig Knop (*g*) med et valkformet Dækblad under sig (*f*); begge rage kun lidt frem over Axen, og ere lidt forenede ved deres Grund, hvad et Længdesnit tydeligere viser (Fig. 27); men denne Knop er ikke den sidste Nydannelse paa Axen, thi paa den venstre Side (af Fig. 26) vil man se Antydning til en begyndende Udvikling af et nyt Epiblastem. Samme Udvikling findes aabenbart paa Fig. 28 (*Epipactis*), idet der ved I er ifærd med at danne sig et Epiblastem, der paa et følgende Udviklingstrin vil træde frem som II, i hvilket man allerede (især paa et Længdesnit) vil se den svagt fremtrædende Dækbladhæl. Her synes Dannelsen af Blad og Knop at begynde samtidigt, eller Knoppen anlægges maaske lidt før Bladet. Derimod har jeg hos *O. maculata* lige saa tydeligt set Bladet opstaa og blive synligt udvendigt, før der var mindste ydre

[1]) Allgem. Morphologie, S. 411.

Spor til Knoppen. Efter Payers Tegning synes det endog, at Blomsterne af *Calanthe*[1]) anlægges længe efter deres Støtteblade, og neden for flere ældre, højere stillede Blade.

Det er sikkert, at der er Knopper, som ere de højest paa Axen staaende Organer; jeg tør imidlertid paastaa, at der dog ingen Deling af Vækstpunktet finder Sted.

12. Plantaginaceæ.

Plantago major. Blomsterstandens Stængelspids er meget høj kegleformet; neden for den sees Knopper og Blade i rask Udvikling, og de give os netop det Billede, som vi nu have gjort Bekjendtskab med paa mange Steder, nemlig: et Epiblastem, der falder brat af mod Stænglens Grund, men mindre brat mod dens Spids, og som snart fremtræder som et Dobbeltorgan, bestaaende af Blad og Knop; Knopperne synes undertiden at komme samtidig med deres Støtteblade, undertiden lidt efter dem. Kløvning af Vækstpunktet finder ikke Sted, og da Stængelspidsen er saa høj, kan der overhovedet næppe være Tale om Deling af det.

13. Polygonaceæ.

Rheum compactum (Fig. 24—25, IV). Paa Grunden af Blomsterstandenes højt kuppelformede Stængelspidser, der have en ganske regelmæssig Bygning med 2—3 Periblemlag og en lille Pleromінitialgruppe, og uafbrudt beholde samme Stilling og Vækstretning i Forhold til Epiblastemerne, opstaa disse akropetalt, Blad med Akselknop i omtrent samtidigt Anlæg (*f*—*g*, Fig. 24). Om Vækstpunktdeling kan der ingen Tale være. Her vil jeg fremhæve, at Dækbladene undertiden frembyde det Forhold, som er tegnet Fig. 25, idet de i deres Rande gaa over til at blive rene Dermatogendannelser.

14. Amarantaceæ.

Amarantus paniculatus slutter sig med Hensyn til sin florale Stængelspids og Epiblastemdannelse nøje til *Plantago*. Stængelspidsen er for kraftig og høj til, at der, efter hvad vi nu kjende til Bygningen af den florale Stængelspids, kan være Tale om endog blot Deling af den.

---

[1]) Organogénie, T. 142, Fig. 1.

Celosia cristata. Uden i øvrigt at have afsluttet mine Undersøgelser af denne Plante, tror jeg allerede nu at turde udtale, at Kamdannelsen ikke beror paa en Vækstpunktkløvning, men snarere maa sammenlignes med Kurvdannelsen hos Compositeerne. Forskjellen er væsenligt kun den, at vi, i Stedet for disses regelmæssige brede Stængelspidser, her have en uhyre stor, uregelmæssig og kamformig, hen ad hvis Sider de med Støtteblade forsynede Blomster opstaa i midtpunktsøgende Udviklingsgang. Hen mellem den Mængde af unge, hurtigt af deres Støtteblade i Størrelse overfløjede, Blomster ser man i den unge Blomsterstand den nøgne kraftige Stængelspids bugte sig som en uhyre Bjergryg, der er stejl med afrundet Aas. En senere Undersøgelse vil forhaabenlig give mig mere Details.

15. Valerianaceæ.

Valeriana Phu. Tab. III, Fig. 23—28 vise Anlæggelsen af dennes kvaststillede Blomster. Akselknoppen, Fig. 23, bliver bredere, idet der udvikler sig to laterale Dannelser (II), som dels træde stærkt ud for neden fra Knoppens Grund, dels adskille sig fra Midtpartiet (I) ved en svag Indsænkning. Det er Midtblomsten og de to Sideknopper i en Kvast, som derved ere grundlagte. Idet Knopperne saavel som Midtblomsten tage til i Volumen, træde de mere ud fra hinanden, Dalen mellem hine og denne bliver tydeligere; samtidig blive de oprindelig afrundede Sider af Knopperne fladere og stejlere (Fig. 24), og den nedre Del af dem træder mere og mere valkformig frem, indtil vi have Støttebladene for Knopperne anlagte (Fig. 25). Vi møde her paany Billedet af det i to Partier sig «delende» Epiblastem. Jeg kjender ikke den histologiske Udviklingshistorie, men jeg kan ikke tvivle paa, at Støttebladet opstaar efter sin Knop og tillige paa den. I Fig. 26 er Udviklingen videre fremskreden. Idet Sideknopperne nu forøge deres Volumen lodret paa Kvastens Plan, udformes af dem lidt efter lidt en ny Kvast, med sin Midtblomst (II, Fig. 27) og sine to Sideknopper (III), og den samme Udviklingshistorie som ved den første Kvast gjentager sig. En saadan ung Kvast, set ovenfra, er tegnet Fig. 28. Den højre Side af den er trykket ned og bredt ud; den venstre sees lidt mere fra Kanten. Da jeg ikke kjender den histologiske Udvikling af denne Kvast, kan jeg ikke sige om en Vækstpunktdeling finder Sted; en Kløvning er der i alt Fald ikke, thi en saadan kan ikke tænkes, hvor Midtpartiet i Axen forbliver i Virksomhed en rum Stund efter, at de to Sideknopper samtidigt ere opstaaede. I den senere Udvikling forholde de sig ikke altid lige kraftig, hvad en Sammenligning af den højre og venstre Side i Fig. 25 og 27 viser.

16. Cucurbitaceæ.

Det morfologiske Forhold i denne Familie, som har gjort Botanikerne mest Bryderi, er Slyngtraadens Stilling og morfologiske Værdi. Med Hensyn til de ovrige i Bladakselen staaende Dannelser er man dog nu i Almindelighed enig om, at de danne en kvastformet Forgrening, hvis Hovedaxe afsluttes af en Blomst, hvis ene Sideaxe er den op til Slyngtraaden staaende Knop, der danner en (oftest) antidrom Gjentagelse af Hovedaxen, og hvis anden Sideaxe er den paa den modsatte Side staaende, ofte manglende klaseformede Blomsterstand. Denne Anskuelse stammer fra Al. Braun (1843), men findes senere tiltraadt af Guillard, Wydler o. fl. Om Stillingsforholdene af alle disse Organer vil jeg henvise til de neden for nærmere citerede Botanikere Al. Braun, Wydler, Guillard og til de af mig givne Diagrammer (nedenfor S. 70).

Hovedvægten ved disse Undersøgelser maa lægges paa de selvstændige Iagttagelser, ikke paa literaturhistoriske Betragtninger. Saadanne tjene i Regelen kun til at vise den herskende Konfusion, ikke til at klare Sagen. Af denne Grund og dernæst ogsaa af den, at Arbejdet derved vilde vokse uforholdsmæssigt, afholder jeg mig her i Regelen fra at forudskikke historiske Oversigter og Lignende. For den, der vil sætte sig ind i Spørgsmaalene vedføjer jeg en Liste over de vigtigste paagjældende Arbejder og Anskuelser.

De Anskuelser, der ere blevne udtalte om Slyngtraaden, ere følgende:

I. Slyngtraaden er homolog med en Birod.

Tassi anføres (t. Ex. af Lestiboudois) som den, der skulde have havt denne Mening, men han protesterer mod den »som absurd« (Bull. Soc. Fr. IV. 1857. S. 322).
Seringe, ifølge Fabre og Chatin (Bull. Soc. Fr. XII, S. 374).

II. Slyngtraaden er et Phyllom, hvad enten den er 1- eller flerarmet.

A. En Del af et Blad.

a. Et uparret Akselblad for det Blad, som den staar hos.

Aug. St. Hilaire, 1822. (Mém. du mus. IX. S. 190).
Seringe (Mém. soc. d'hist. nat. de Genève t. 3) ifølge Decandolles Citat.
A. P. Decandolle (Organographie. I, S. 336, 348. II, S. 188) med Tvivl.
Endlicher (Genera plantarum).
Fresenius (Flora 1842, 681).
Stocks, ifølge Citat af Clos og Lestiboudois.
Payer kan ogsaa anføres her, da hans under b anførte Tydning ikke er meget forskjellig fra denne (Bull. Soc. bot. Fr. IV, 1857, S. 145).

b. En løsrevet Del af Bladet, som den staar hos (ved »un dédoublement collatérale«).

Payer, 1844 (L'Institut, Nr. 556, S. 284.
1845 (Ann. d. sc. nat. Ser. III, T. 3, S. 163. Referat i Flora, 1845).
Clos, Comptes rendus, T. 41, 1855, II. S. 839.
Bull. d. Soc. botan. Fr. 1856, III, S. 4. 545, 612.
Seringe, Eléments de bot., 1841, S. 175, ifølge Citat af Naudin.
Darwin, Journ. Linn. Soc. IX.

B. Et selvstændigt helt Blad.

1. Paa Hovedaxen, der opfattes som Monopodium. Et Blad, som er »parret« med det andet normalt udviklede, ved hvilket Slyngtraaden staar; et Exempel paa ægte »folia geminata«.

   Gasparrini, 1848 (Ann. d. sc. nat., Ser. III, T. 9, S. 208.

   Seringe (Mém de la Soc. d. Phys. et d' Histoire nat. d. Génève III. 1825. Mém. sur la fam. des Cucurbitacées) (ifølge Citat af Andre).

2. Et Blad, der ved en Akselknops (ↄ: den videre voksende Stængels) Magtran er forrykket fra sin egentlige Stilling modsat det normale Blad; Stænglen er altsaa et Sympodium.

   Tassi (Bull. de Soc. Fr. IV, 1857, S. 322).

   Cauvet (Bull. Soc. bot. Fr. XI, 1864, S. 278).

3. Paa en Axe af 2den Orden (i Forhold til den som Monopodium opfattede Hovedaxe).

   a. Et Blad (selv den flerarmede Slyngtraad), som er det første paa en rudimentær extraaxillær Knop.

   Naudin (Ann. d. sc. nat. IV. S., t. 4. 1855. Bull. Soc. bot. Fr. 1857. IV. 109. Comptes rendus 1855).

   b. Et Forblad paa den akselstillede Kvast, nemlig det, der støtter den vegetative Knop. Armene i den flerarmede Slyngtraad ere Bladribberne.

   A. Braun (Flora 1843, S. 472; Individium, S. 80).

   Döll (Rhein. Flora, 1843, S. 435; Flora v. Baden, S. 1055).

   Guillard (Bull. Soc. botan. Fr. IV, 1857, S. 142, 464, 750, 933, 938. Ann. d. sc. nat. III. Ser., T. 8) for den enarmede Slyngtraads Vedkommende.

   Lestiboudois (Bull. Soc. botan. Fr. IV, 1857, S. 744, 754 og 788, ib. V, 1857, S. 781, Comptes rendus, T. 45, 1857, II. S. 78.

   Schnizlein (Iconographia familiarum).

   Wydler (Flora, 1860. S. 359).

   Rohrbach (Beiträge zur Kenntniss einiger Hydrocharideen, 1871).

III. Slyngtraaden er et Kaulom, det udtales ikke altid om bladløst eller bladbærende.

A. Den ved en ejendommelig Sympodialdannelse til Siden skudte Hovedaxe (som hos Ampelideerne); hvert Sympodieled og den akselstillede Kvast ere det sidste Stængelblads Akselprodukter.

   Fabre (Bull. Soc. botan. Fr. II. 1855. 512).

   Tassi ifølge Parlatore (Bull. Soc. Fr. II, 519).

   (Naudin (Comptes rendus, T. 41, 1855, II. S. 722), udtaler som en Formodning omtrent det samme I Ann. d. Sc. IV, t. 4, 1855 siger han: »la présence de ce rameau ne peut s'expliquer que par un enchainement d'usurpations dont la loi est encore inconnue«).

B. En Knop paa Hovedaxen.

   a. En Akselknop, der er forskudt fra sin Bladaksel til det 2det højere staaende Blads Side.

   Maout (Leçons de bot. II, S. 363).

   Heiberg (Bot. Tidsskr. II, S. 199).

   Herhen nærmest Decaisne (Bull. soc. Fr. 1857, S. 788) og ligeledes Naudin efter hans Udtalelser i Bull. Soc. bot. Fr. IV. S. 109.

   b. En Tillægsknop (gemma accessoria) i Bladakselen.

   Link? (Elem. phil. I. S. 318: »ein überflüssiger Ast«).

   Ørsted (Vid. Medd. fra Naturh. Foren. 1868, S. 121).

   Guillard for den flerarmede Slyngtraads Vedkommende; de enkelte Arme ere Blade. (Bull. Soc. bot. Fr. IV. S. 750; og især XII, 1865. S. 434.

c. En extraaxillær Knop; de enkelte Arme ere Ribberne i et haandribbet Blad.

Naudin (Ann. sc. nat. Sér. IV, T. 4, 1855, S. 5. Comptes rendus, T. 41, 1855, S. 720 og 1857). Han udtaler ikke nogen bestemt Mening om, hvorledes den extraaxillære Knop kommer paa sin Plads; se under III. A.

d. En extraaxillær Knop; hver enkelt Arm er et selvstændigt Blad.

Mohl, Über den Bau und das Winden von Ranken u. Schlingpflanzen. 1827, S. 43. Slyngtraaden regnes til «Cirrhi ramales».

Warming (Videnskabelige Meddelelser fra den naturhistoriske Forening i Kjøbenhavn, 1870).

(Chatin, kommer i Bull. Soc. bot. Fr. XII, 1865. S. 370, til det Resultat at «La vrille simple et le corps des vrilles rameuses sont toujours de nature raméale; les divisions de la vrille répondent les unes à des rameaux, les autres à des feuilles». — Men hvor denne Gren har sin Plads siges ikke).

C. En Gren fra den akselstillede Knop.

Fresenius (Flora 1842 og 1843).

Guillard (for den flerarmede Slyngtraads Vedkommende; de enkelte Arme ere Blade; Bull. Soc. bot. Fr. IV. 1857. S. 750. Hans Mening er mig iøvrigt ikke ret klar).

IV. Et Organ «sui generis».

Chatin. 1857. (Bull. Soc. Bot. Fr. IV. S. 145).

At denne Oversigt skulde være fuldstændig, er usandsynligt; at den skulde have anbragt hver Forfatter paa hans rette Sted, er næsten umuligt; thi Anskuelserne ere oftest saa ufuldstændigt og derved uklart fremsatte, at det ikke er muligt at pointere en Forfatters Anskuelse saa skarpt, som et Skema som ovenstaaende nødvendigvis vil og maa give det. — Den Anskuelse, om hvilken de fleste nu til Dags flokke sig, er Al. Brauns, at Ranken (den enarmede som den flerarmede) er et Forblad paa den akselstillede Kvast; thi hertil slutte sig Morfologer som Wydler, Rohrbach, Döll, Schnizlein o. s. v., og af franske Botanikere Guillard, Lestiboudois. — Jeg skal ikke indlade mig paa at diskutere hver enkelt af disse mangfoldige Anskuelser; gjennem mine Undersøgelser og de af dem uddragne Resultater giver jeg mine Grunde mod dem eller for dem.

Hvad der her nærmest interesserer os, er Spørgsmaalet, om en Kløvning af Vækstpunktet finder Sted paa noget Udviklingstrin eller ved noget Organ. Thi dette er, saavidt jeg ved, første Gang, udtalt af Ørsted[1]), og dernæst ligeledes af Rohrbach[2]), hvis Opmærksomhed vel er bleven ledt hen paa denne Sag ved Videnskabernes Selskabs Opgave, og som kommer til samme Resultat som Ørsted. Disse to ere tillige de eneste, der have beskæftiget sig med Udviklingshistorien (Guillard synes dog ogsaa at have taget Hensyn til den), og Angivelserne vinde derved i Betydning; alle Andre have kun taget Hensyn til Taxologien, Anatomien eller teratologiske Tilfælde.

---

[1]) Vid. Medd. 1862, S. 337, og 1869, S. 121—122. Det er ikke bestemt udtalt, om han ved «Kløvning» nærmest forstaar den Hofmeisterske «Theilung» eller en Kløvning i den Forstand, i hvilken jeg ovenfor har taget dette Ord.

[2]) Beitr. z. Kenntn. einiger Hydrochorideen, 1871.

Jeg har undersøgt følgende Arter:
Bryonia dioica og *alba*, *Cyclanthera pedata*, *Sicyos angulata*, *parviflora* og *Baderoa*, *Ecballium Elaterium*, *Cucumis prophetarum* og *Bossoniana*, *Cucurbita Pepo*.

For ikke at komme med Gjentagelser ved at gjennemgaa hver af disse Planter for sig, da de i alt Væsentligt nøje stemme overens, sammenfatter jeg her under Et mine Resultater for dem alle.

De vegetative Stænglers Spidser (V, Fig. 15, 16) ere snart kegleformede, snart mere kuppelformede eller endog lavere og fladere. De ere altid regelmæssigt byggede med to til fire Periblemlag og tydelige Pleromrækker.

Bladene anlægges efter en Spiral, som jeg overalt har fundet nøjagtigt ens, og som omtrent er $^5/_{13}$ (V, Fig. 1, hvor de arabiske Tal betegne Bladene). Stillingen er altid saaledes, at det 3die Blad kommer i Nærheden af 1ste Blad, og dettes Slyngtraad, der staar uden for Akselen paa den anodiske[1]) Side, lige over hints Aksel. Betragtes den øverste Del af en Gren fra Siden, sees to Rækker af Blade (med deres Akselprodukter) i stejlt opstigende Spiral (Fig. 15 og 16, V); den ene Række omfatter alle «ulige» (ɔ: med ulige Tal nummererede) Blade, den anden alle «lige»; og altid vil man se Akselprodukterne af den ene Rækkes Blade, men ikke af den andens, fordi disse Akselprodukter altid staa i den ene (ved Spiralen bestemte) Side af Bladakselen og udenfor den (V, Fig. 1, 15, 16).

Akselknoppernes Fremkomst og Stilling. I intet Tilfælde har jeg set en Knop være den øverste Sidedannelse paa Axen; først i det 2det eller 3die Blads Aksel bliver den synlig som en svag Valk. Der kan altsaa ingen Vækstpunktdeling finde Sted her, og ej heller kan Akselknoppen antages at være den egentlige Hovedstængel (jvfr. de ovenfor anførte Anskuelser).

Rohrbach siger[2]), at Knopanlæget altid staar «genau in der Mediane des Tragblatts»; dette er efter mine Iagttagelser urigtigt[3]); jeg har i alle Tilfælde (og jeg har undersøgt en Mængde Stængler) fundet Knoppen lige fra første Færd af stillet skævt i Bladakselen, nemlig nærmest ved Bladets anodiske Side, og endog ragende noget uden for den. De citerede Figurer saa vel som Fig. 2 og 14 vise dette. Et saadant Stillingsforhold er heller ikke nogen Sjældenhed; hos mange Papilionaceer, Lind, Storkenæb, Bøg, *Castanea vesca* (for Hanraklens Vedkommende) o. fl. vil man finde Antydninger af det

[1]) Jeg benytter for Kortheds Skyld Ordene «anodisk» og «kathodisk» for at betegne den Side af Bladet, til hvilken den (efter den korte Vej) opstigende og den nedstigende Spiral tænkes at bevæge sig. Jfr. Nägeli, Beiträge z. wissenschaftl. Botanik, I, S. 48.
[2]) L. c., S. 58. [3]) Se mine Diagrammer, Vidensk. Meddel., l. c, og neden for S. 70.

samme, og tages Hensyn til Bregnerne, staa Knopperne, efter Mettenius, snart i Akselen, snart halvt, snart helt udenfor den.

Derimod har Rohrbach Ret i, at Knopanlæget er «durchaus einfach» (V, 2).

Slyngtraaden. Den næste Nydannelse, der viser sig, er Slyngtraaden, som opstaar ved Knoppens anodiske Side, og derfor helt uden for Bladakselen. Her fremtræder imidlertid et Spørgsmaal, som det er af største Vigtighed at besvare, og som det tillige er særdeles vanskeligt at besvare, nemlig det: Hvor opstaar Slyngtraaden? Paa Akselknoppen eller paa Hovedaxen? Betragter man Fig. 1, vil man ved Knop V se en Dannelse, v^5, ved Knoppens anodiske Side, der tilsyneladende lige meget staar paa Knoppen og paa Hovedaxen; ved Knop VII er den bleven større, og staar tilsyneladende noget mere frit af Knoppen. Denne Nydannelse er Slyngtraaden. Jeg har nu altid fundet, at Knoppen var stejlere paa sin kathodiske (i Bladakselen liggende) Side, end paa den anodiske, hvor den ganske jævnt skraaner ned mod Moderaxen og gaar over i denne (se t. Ex. Fig. 2, 3, 13 og 14). Netop derved bliver det saa vanskeligt at afgjøre, hvor Akselknoppen holder op, og hvor den Dannelse staar, der, som Slyngtraaden, kommer frem lige ved dens Grund. I nogle Tilfælde synes den bestemt at sidde paa Knoppen; dette er saaledes Tilfældet i Figur 1—9. I andre Tilfælde er den mere skilt fra den og næsten hèlt fri af den, ligesom den ogsaa næsten altid staar lidt lavere end den; og navnlig maa man synes, at der ikke kan være mindste Tvivl om, at den sidder langt fra Knoppen, naar man betragter Billeder som Fig. 15 og 16.

Selv en omhyggelig og histologisk Undersøgelse af de paagjældende Organer er ikke i Stand til at løse alle Tvivl. I Fig. 13 og 14 er der aftegnet et Tværsnit nær under Stængelspidsen af *Bryonia dioica*. Man vil i Akslerne af de to Blade, *f—f*, se Knopper, *g—g*, og paa disses anodiske Side en lille Fremragning, *v*, Slyngtraaden. Det histologiske Billede af den ene af dem (Fig. 13) lærer os lige saa Lidt, som alle mine andre histologiske Undersøgelser af dette Forhold. Man ser, at der har fundet Cellestrækning Sted i 1ste og 2det Periblemlag, med en Tangentialdeling i 1ste, men forøvrigt er det lige saa umuligt af dette Billede, som af de andre, at dømme, paa hvilken Axe *v* egenlig staar. Sandheden er dog sikkert nærmest den, at den anlægges paa Hovedaxen, paa Grænsen af den jævnt skraanende Akselknop, men dernæst tillige løftes i Vejret med denne under dens Udvikling. Hvad der mest maa bringe mig til at slutte, at dens Plads egenlig er Hovedaxen, er de ikke faa Tilfælde (især ved flerarmede Slyngtraade), i hvilke jeg utvivlsomt har set den opstaa dèr, som de to tegnede Fig. 15 og 16. Aldrig har jeg set den staa utvivlsomt alene paa Knoppen.

Et andet og ikke mindre vanskeligt Spørgsmaal er, hvad morfologisk Værd Slyngtraaden har. Den histologiske Betragtning giver os heller ikke sikre Oplysninger om dette Punkt, som overhovedet et Organs Bygning ikke i og for sig afgiver et afgjørende

Moment til Bedømmelsen af dets Natur. Slyngtraaden opstaar altid under Dermatogenet; men i nogle Tilfælde har jeg ved dens Dannelse set allerede 1ste Periblemlag sættes i Arbejde med Tangentialdelinger, i andre derimod ikke. Jeg har imidlertid al Grund til at antage den for et (bladbærende) Kaulom. Herfor taler allerede dens Stilling, som jeg bestemt maa antage, paa Hovedaxen; thi at et enligt Blad skulde opstaa saa langt nede mellem ældre Blade paa en vegetativ Axe, fjernet saa langt fra Vækstpunktet som her, og uden for Bladspiralen paa denne Axe, er ukjendt. Dernæst tale de af Naudin og andre anførte teratologiske Tilfælde derfor, idet Slyngtraaden kan udvikle sig som en mere eller mindre rudimentær og mere eller mindre normale Blade bærende Gren. Endelig ogsaa den Maade, hvorpaa Armene i den flerarmede Slyngtraad fremkomme.

Slyngtraadens senere Udvikling er nemlig følgende. For *Bryonias* Vedkommende vil man se den af Fig. 5—10, V. Det oprindelige Anlæg hæver sig stedse tydeligere frem, bliver først en halvkugleformet Vorte, derpaa en mere kegleformet, og sluttelig, idet det tillige krummer sig indad over Akselknoppen, antager det den helt udviklede Slyngtraads Form (Fig. 10). Betragtedes denne Udviklingshistorie alene, maatte man sige, at hin prægløse første Vorte var et enkelt Organ, der umiddelbart udvikler sig videre til Slyngtraaden. Imidlertid er der flere Grunde, der tale for at betragte den anderledes, navnlig Henblikket til den flerarmede Slyngtraad.

Her bør jeg nu først anføre, at man ved den indre Grund af den ganske unge enarmede Slyngtraad hos *Bryonia*, *Sicyos* og andre Slægter undertiden kan bemærke en svag vorteformet Fremragning, der imidlertid bliver aldeles forsvindende over for den udvoksne Slyngtraad. Men hvad der her kun er antydet, træder langt bestemtere frem i den flerarmede Slyngtraad. Fig. 31, V, viser os saaledes en ganske ung Slyngtraad af *Cucurbita*. Den har ikke længer den simple Kegleform, som hos *Bryonia*, men har langt bestemtere Udseendet af et af de Dobbeltorganer, som vi nu saa ofte have havt Lejlighed til at gjøre Bekjendtskab med, — et Blad (v^1) med dets Akselknop (P). Man sammenholde dette Billede med t. Ex. Fig. 4 og 5, IV, af *Salix*, eller Fig. 23 og de øverste Epiblastemer Fig. 21 (*Digitalis*), og Ligheden vil være slaaende. Paa et senere Stadium (som Fig. 34, V) sees den første og tillige langt den kraftigste Arm (v^1) bøje sig ind over Knoppen, paa samme Maade som den enlige Arm hos *Bryonia*, og da den tillige har nøje samme Stilling i Forhold til den akselstillede Kvast, som hin, tager jeg ikke i Betænkning at betragte dem som homologe. Den enarmede og flerarmede Slyngtraad forholde sig efter min Overbevisning altsaa paa følgende Maade til hinanden: begge ere Udviklinger af et uden for Bladakselen stillet Epiblastem, som man kan kalde prægløst, for saa vidt som det ikke straks bestemt viser sin Natur, men som imidlertid er at opfatte som et forenet Blad- og Knopanlæg. I den flerarmede kommer Knoppen til videre Udvikling og anlægger nye Epiblastemer, i den enarmede bliver

den derimod straks undertrykt, helt eller saaledes, at den lader Spor tilbage ved Armens Grund.

I den flerarmede anlægges de efterfølgende Epiblastemer (Slyngtraadens Arme) efter en tydelig udtalt Spiral, hvad jeg allerede har fremhævet tidligere[1]) uafhængig af Hugo Mohl, hvis Afhandling: «Über den Bau und das Winden von Ranken und Schlingpflanzen», 1827, jeg da ikke kjendte. Guillard synes at have gjort samme Iagttagelse[2]). Jeg har ogsaa (l. c.) fremhævet, at de to første Arme, der komme frem efter den udadvendte Hovedarm (r^1), vende til Siderne omtrent som Knopkimbladene paa en af de almindelige Akselknopper, hvilket man vil se af Fig. 34, V.

Men naar Armene i den flerarmede Slyngtraad anlægges efter en Spiral, som Bladene paa en Knop, og altsaa ikke kunne bredes ud og lægges ned i *et* Plan som Ribberne i et haandribbet Blad[3]), saa er det en ny Grund til ikke at opfatte den hele Slyngtraad som et saadant; den maa da være et Kaulom, der anlægger nye, laterale Epiblastemer. Da jeg, hvad jeg senere vil komme tilbage til, maa anse Bladet med dets Akselknop for to nøje sammenhørende Organer, for et Dobbeltorgan, hvis to Dele have hver sin Funktion, og af hvilke Bladet i Regelen er stillet neden for Knoppen, bliver Slyngtraaden altsaa et saadant Epiblastem, ved hvilket der ikkun er det Afvigende, at det er stillet uden for den Spiral, som de andre Axens Epiblastemer danne. I enkelte Tilfælde undertrykkes den ene Side af Epiblastemet, Knoppen, i sin Virksomhed, og Slyngtraaden bliver da faktisk næsten alene *et* Blad, i andre Tilfælde fungerer Knoppen og anlægger nye som Slyngtraade udviklede Blade.

Ved denne Betragtningsmaade synes den Anskuelse, ifølge hvilken Slyngtraaden er et Blad, enkelt eller sammensat (Braun, Wydler, Rohrbach o. s. v. se S. 62), paa en smuk Maade at kunne forenes med den, efter hvilken den er en Gren (Naudin, Ørsted o. s. v.). Tillige ville alle Monstrositeter, som ere afbildede t. Ex. hos Naudin[4]), det ikke sjeldne Tilfælde, at Armene i den flerarmede rykkes ud fra hverandre, idet hver eller dog flere af dem faa et tydeligt Stængelstykke under sig, det Tilfælde, at en Knop sidder paa Grunden af et tildels monstrøst Blad o. s. v., paa en smuk Maade finde deres Forklaring. Slyngtraaden er paa disse Monstrositeter i Færd med at gaa over i en ren vegetativ Gren; de store Blade der sees, *a* paa Naudins Figurer, ere kun Hovedarmene, som vakle mellem ren vegetative Bladform og Slyngtraaddannelse; de øvrige Arme ere dels endnu smaa Slyngtraade, som i Fig. 2, dels ere de gaaede over i Nedreblade paa den Knop, der er en videre Udvikling af Slyngtraadens Vækstpunkt. Ligeledes vil den af Decaisne[5]) omtalte Iagttagelse, at Slyngtraadene undertiden blive blom-

[1]) Videnskabelige Meddelelser fra den Naturh. Forening, 1870, Fig. 6 og 7, S. 465.
[2]) Bull. de la Soc. bot. de France, 1857, S. 752.
[3]) jvfr. Wydlers Tegning i Flora 1860, S. 360.
[4]) Ann. d. sc. nat., S. IV, T. 4, Tab. I.
[5]) Bull. Soc. bot. de France, 1857, S. 787.

sterbærende lettelig forstaas, naar man gaar ud fra min Opfattelse; men forøvrigt bør en saadan Monstrositet naturligvis beskrives nøjere, end han har gjort, og afbildes for at kunne finde sin rette Forklaring.

Hvad Bygningen af den flerarmede Slyngtraad angaar, vil jeg endelig endnu fremhæve følgende. Dens Stængelspids er overordenlig flad (Fig. 32, 34 og 36, V), og den er i histologisk Henseende et Sidestykke til Stængelspidsen hos *Digitalis*, thi den har kun *et* udpræget Cellelag, Dermatogenet, under hvilket der kommer et uordnet Meristem (Fig. 33 og 35, V).

Om en Deling af Vækstpunktet kan der ved Slyngtraadens Dannelse ingen Tale være, thi baade Hovedaxens og Akselknoppens Vækstpunkter ligge langt fra den, naar den dannes.

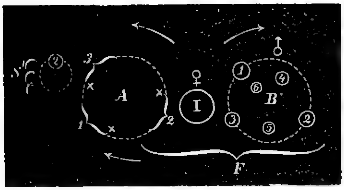
De af Lestiboudois og andre anførte anatomiske Forhold har jeg ikke berørt, fordi jeg ikke selv har undersøgt dem, og fordi jeg er overbevist om, at anatomiske Forhold i ældre Organer sjeldent eller aldrig ville kunne give Oplysninger, som man kan stole paa, med Hensyn til et Organs Natur eller Oprindelse fra et andet.

Akselknoppernes Udvikling. Vi forlode Akselknopperne paa det Trin, paa hvilket de efter Slyngtraadens Fremkomst endnu ere en udelt sammentrykt-kuppelformet Cellemasse (Fig. 3, 4, 13, 14, V). Denne forholder sig i sin følgende Udvikling ikke meget forskjellig hos de forskjellige Arter.

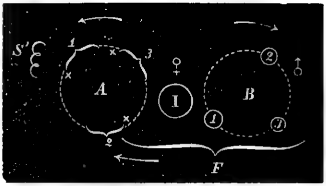
Hos *Bryonia* se vi den først antage en lidt trekantet Form (Fig. 5 og 6), men derpaa udvikler oftest den ene Side (*b*) sig kraftigere end den anden (Fig. 7), men efterfølges dog hurtigt af denne (*a*, Fig. 8), medens ogsaa Midtpartiet, I, hæver sig i Vejret. Akselknoppen viser sig saaledes omformet til en trevortet Cellemasse, med lidt ulige store Vorter, og med Slyngtraaden, *v*, stillet ved sin ene Side. Rohrbach skildrer Udviklingen paa samme Maade. Naar man ser hen til den ovenfor givne og afbildede Udviklingshistorie af en Kvast hos *Valeriana* (Fig. 23—28, III), vil man se den store Lighed. Det er ogsaa her hos *Bryonia* en kvastformig Forgrening, der er anlagt, og som nu udvikler sig videre; Forskjellen er ene den, at her anlægges Støttebladene slet ikke, hist er det Tilfældet. Midtpartiet, I, vokser i Vejret, bliver omvendt kegledannet (Fig. 9 og 10) og udvikler sig til Midtblomsten, der oftest er en Hunblomst; den ene Knop i Kvasten, *b*, anlægger Blade, *f*, og udvikler en ny vegetativ Gren ganske lig Moderskuddet, men (oftest) antidrom med det, og af den modsatte med *b* oftest antidrome Knop, *a*, udvikles en (Han-) Blomsterstand, der ofte senere er sammenvokset med Midtblomsten, og synes med denne at danne *en* Blomsterstand[1]). Stillingsforholdene af Bladene og Blomsterknopperne i Kvastens Sideaxer sees af Diagrammerne paa næste Side.

---

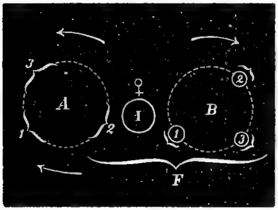
[1]) Cfr. Guillard, Bull. Soc. Fr. 1857, S. 932; Rohrbach l. c.



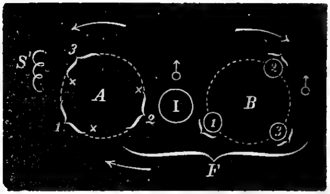
Xyl. **III.** *Cyclanthera* (*pedata* Schrad.).



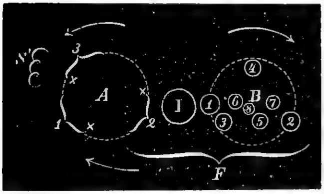
Xyl. **IV.** *Cyclanthera* (*elastica* Ndn.)



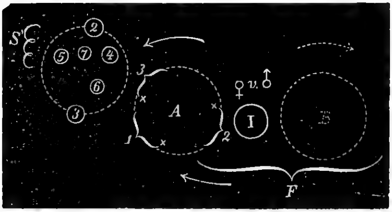
Xyl. **V.** *Ecbalium* (*agreste* Rchb.).



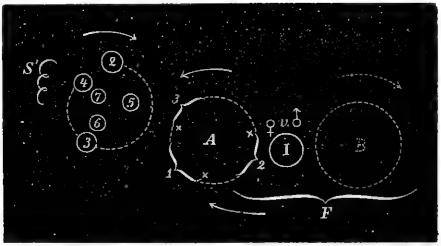
Xyl. **VI.** *Cucumis* (*prophetarum* L.).



Xyl. **VII.** *Bryonia* (*dioica* Jacq. et *alba* L.).



Xyl. **VIII.** *Cucurbitæ* sp.



Xyl. **IX.** *Cucurbitæ* sp.

I, betegner Hovedaxen, og *F* dens Støtteblad; *A* og *B* de to Sideaxer; *A* er den vegetative Knop og Tallene Bladene paa denne; de smaa Kors angive Slyngtraadens Plads; *B* er Blomsterstanden og Tallene i den de enkelte Blomster efter deres Følge. S^1 betegner Slyngtraadens Hovedarm, Tallene i Kredsen op til den hos *Cuburbita* de andre Arme paa den.

Hos *Cyclanthera* vokser Akselknoppen ud til en stor hvælvet Cellemasse (Fig. 18), i hvilken de nævnte tre Grene i Kvasten anlægges mere samtidigt end hos *Bryonia*; dog blive de ikke lige store, idet Hanblomsterstanden næsten altid gjør Krav paa en betydelig større Cellemasse end hver af de to andre (Fig. 16, *a* paa Knop VI), hvilket maa staa i Forbindelse med den rigere Udvikling af Hanblomster, som her finder Sted.

Hos *Sicyos parviflora* udvikler den vegetative Knop (der i Fig. 15 fejlagtig er betegnet VI) sig kraftigere end Midtblomsten, og den modsatte Knop anlægges slet ikke, og hvad endelig *Cucurbita* angaar, udvikler Akselknoppen ligeledes kun *en* Sideaxe, den vegetative Knop, der altid bliver meget lille i Forhold til den kolossale Midtblomst, og tydeligt sidder paa dens Side.

Det Spørgsmaal opstaar straks her, om denne «Kløvning» af Akselknoppen ved Dannelsen af den kvastformede Blomsterstand virkelig kan betragtes som en «Kløvning» af Vækstpunktet, saaledes som det antages af Ørsted[1]), der netop aftegner, fuldkommen naturtro, disse unge kvastformede Blomsterstande som Exempler derpaa, og som Rohrbach[2]) ligeledes antager. Jeg vil imidlertid opsætte Besvarelsen af dette Spørgsmaal, til jeg har gjennemgaaet Udviklingen af den Knop, *a*, som frembringer en Blomsterstand, der af Rohrbach[3]) anføres som et endnu bedre Exempel paa Kløvning.

Den speciellere Udvikling af Kvastens Hovedaxe (den midtstillede Blomst) forbigaas her, og den vegetative Knop forholder sig, som anført, ganske lig Hovedaxen for hele Kvasten.

Den klaseformede Blomsterstand, som danner Kvastens ene Side, *a*, (*B* paa Diagrammerne), er i Regelen antidrom med den vegetative Knop[4]). Som Rohrbach beskriver det, er den en Klase med regelmæssig spiralstillede Blomster (Fig. 11—12, af *Bryonia*, 17, 22 og 24, af *Cyclanthera*, 28, af *Sicyos*, 29 og 30, af *Cucumis prophetarum*), og i Regelen uden Støtteblade (Klaser med Støtteblade for Blomsterne sees Fig. 11 og 29). Han beskriver Udviklingen hos de med Støtteblade forsynede Slægter *Rhynchocarpa* og *Ecbalium* saaledes[5]): «Das Tragblatt ist hier stets früher gebildet als die zugehörige Blüthenknospe, letztere aber entsteht immer vor dem nächst höheren Tragblatt, so zwar dass sich zunächst der Scheitel in der Richtung der Mediane des letzt gebildeten Blattes ausdehnt und so, senkrecht zu dieser Richtung betrachtet, eine in die Breite gezogene Form annimmt. Bald darauf zeigt er in der Mitte eine schwache Vertiefung, mit deren Zunahme sich auf der einen Seite der Achselspross des Blattes, d. i. die neue Blüthenanlage, auf der anderen der nun von der ursprünglichen Wachsthumsrichtung etwas abgelenkte Scheitel der Inflorescenzaxe heraus arbeiten». Dette gjentager sig ved hvert Støtteblad, og der tilføjes: «ganz ebenso verhält

---

[1]) «Videnskab. Meddel. fra den Naturh. Forening» 1868, S. 122.
[2]) Hydrocharideen, S. 58—59.
[3]) L. c., S. 59.
[4]) Cfr. Wydler, Flora 1860, S. 362.
[5]) L. c., S. 59.

es sich nun auch bei den andern Gattungen, nur dass hier von Tragblättern keine Spur vorhanden ist».

Om *Bryonia dioica* siger han særligt, at Støtteblade undertiden forekomme[1]), og at Stængelspidsen i hele Blomsterstanden forbliver overordentlig flad; men Blomsterudviklingen sker efter hans Iagttagelse ogsaa her ved Kløvning.

Hvad denne Plante angaar, da har ogsaa jeg set Hanblomsterstandens Støtteblade (*f*, Fig. 11), og jeg finder dem ganske lig de smaa hælformede eller valkformede Dækblade hos Korsblomster, Kurvblomster o. fl., som vi ovenfor gjorde Bekjendtskab med; de opstaa aabenbart ogsaa paa Knopgrunden ligesom hine. Ogsaa jeg finder Stængelspidsen i nogle Tilfælde temmelig flad, men bred (Fig. 12), og Blomsterne anlægges i Spiral i Randen af denne lidet hvælvede Skive; men jeg finder aldeles ingen Forskjel mellem Udviklingen af denne Blomsterstand, og t. Ex. af den hos *Erysimum* og *Aegopodium*; i andre Tilfælde, af hvilke et er tegnet Fig. 11, er den derimod en høj Kuppel, med 2—3 tydelige Periblemlag og Knopdannelse langt neden for Stænglens Top; og mellem disse to Yderpunkter findes alle Mellemformer. I intet af Tilfældene kan der imidlertid være Tale om en Vækstpunktdeling, thi de histologiske Billeder vise Topcellegruppen, uberørt af Knopdannelsen, at hævde samme Vækstretning og Stilling til Sideknopperne. Det eneste skulde være, at en Kløvning forekom paa Hanblomsterstandens tidligste Trin, naar den 1ste Blomst anlægges (se Fig. 9 og 10), hvad jeg for Øjeblikket maa lade staa uafgjort hen.

Ved *Cyclanthera* maa jeg opholde mig noget længere. Her viser sig nu (ligesom hos *Bryonia*) det Mærkelige, at enkelte Blomsterstande have en temmelig høj kuppelformet Stængelspids, med 1—2 Periblemlag, langt neden for hvis Top Knopdannelsen foregaar (Fig. 19, ved *a*, og Fig. 26) tydeligt nok uden at berøre den under 2—3 Periblemlag liggende Plerom-Initialgruppe. Andre derimod, navnlig de ældre mangeblomstrede, have en højst ubetydelig svagt hvælvet Stængelspids, der næppe rager op over den yngste Knop. Saadanne sees i Fig. 17, 20, 21, 22, 23 og 24. Det af Rohrbach beskrevne Fænomen faar man her er at se. I Fig. 17 ser man unægtelig Stænglen bredt ud, og en Fure gaar hen over den af *P* og I (yngste Blomst) dannede Oval, dog ikke nøje over dens Midte. Lignende Billeder vilde Stængelspidsen og den yngste Blomst i Fig. 20, 22, 23 og 24 afgive, naar de betragtedes ovenfra. Den histologiske Udvikling viser imidlertid oftest ingen ægte Kløvning af Vækstpunktet, skjondt Forgreningen nærmer sig mere dertil end i alle foregaaende Tilfælde, og jeg kan i Regelen ikke indrømme Rohrbach, at Stængelspidsen bliver «etwas abgelenkt» fra sin hidtidige Retning; selv om dette var Tilfældet, var dermed imidlertid lige saa lidt bevist, at en ægte Kløvning havde fundet Sted (man erindre Græsserne ovenfor), som det,

[1]) Cfr. Wydler, l. c., S. 362.

at den øverste Knop dannes lige ved Vækstpunktets Side og i Højde med det (man erindre her t. Ex. *Erysimum*), kan betragtes som Bevis for en Kløvning. Fig. 20, V, er den øverste Del af en Hanblomsterstand. Paa højre Side af den er en Blomst anlagt, der allerede har en meget regelmæssig Bygning. Længdesnittet gaar nøje gjennem dens Midte. Paa venstre Side sees en anden Blomst i Fremkomst; ogsaa omtrent gjennem dens Midtpunkt er Snittet lagt (ved Tillæmpning med Indstillingen). Denne Blomst opstaar utvivlsomt lige ved Siden af Topcellegruppen, og jeg maa anse det for rimeligst, at nogle af de Celler, som naturligen høre med til denne, tage direkte Del i Dannelsen af den. Det er navnlig i det 2det Periblemlag, at den alsidige Celledeling finder Sted, ved hvilken Knoppen grundlægges, og man vil se, at dette Lag ved omtrent to Rækker (eller Lag) af Celler er skilt fra Stænglens Midtlinie. Den til højre stillede Knop er aabenbart opstaaet omtrent lige saa langt paa den modsatte Side af denne. I dette Tilfælde kan jeg ikke antage, at nogen Kløvning, men vel maaske en Deling af Vækstpunktet, har fundet Sted.

Derimod bør man maaske antage ægte «Kløvning» at have fundet Sted i Fig. 21, da den til højre liggende Knop anlagdes, thi Grænsen mellem den og Stængelspidsen ligger næsten i Stænglens Midtlinie og vilde endnu tydeligere gjøre dette, før Knoppen, *g*, paa modsatte Side begyndte at anlægges (Pleromets Dannelse i *g* er aabenbart begyndt med de mærkede Celledelinger). Jeg vil her ogsaa gjøre opmærksom paa de i Planet mellem Knoppen og Stængelspidsen liggende Celledelinger, der fortrinsvis ere lodrette, hvorved de korte Tver-Cellerækker ere fremkomne, som findes beliggende der.

Det synes altsaa, at alle tre Former for Forgreningen forekomme hos *Cyclanthera*: ægte Sideknopdannelse, Forgrening ved Deling og i sjeldnere Tilfælde ved Kløvning af Vækstpunktet.

«Tillægsknopper» («gemmæ accessoriæ»). S. 60 l. c. omtaler Rohrbach den ejendommelige Forgreningsmaade, der viser sig i *Cyclantheras* Blomsterstande ved Fremkomsten af «accessoriske» Knopper paa Blomsterstilkenes Underside, og hvis Axer «paa en Strækning vokse sammen med Hovedblomstens Stilk»[1]. I Fig. 22, 24, 25 og 26 med 27, V, vil man se Exempler herpaa. Paa Fig. 25 vil man under de tre største Blomster af IIden Orden se anlagt en Knop, Axe af IIIdie Orden, der tydeligt staar paa Blomstens Axe. Paa Fig. 22 og 24 vil man ligeledes se dem, paa hin under Blomst V ved *d*, paa denne under Blomst V og VI. I alle Tilfælde har jeg set dem som ældre staa paa Blomstens Axe, men at de ogsaa opstaa paa denne kan heller ikke betvivles. For det første har Rohrbach opfattet Forholdet saaledes, hvad hans Ord bestemt udtale: «nie erhebt sich der später zur Hauptaxe der accessorischen

[1]) Jeg havde allerede tidligere bemærket dette Forhold, men ladet Forklaringen af det staa hen. Se Videnskabelige Meddelelser, 1870, S. 461.

Traube werdende Vegetationskegel unterhalb der bereits angelegten Hauptblüthe aus der Axe der Gesammtinflorescenz, sondern derselbe entsteht stets durch Theilung des die Hauptblüthe selbst darstellenden Gewebehöckers. Die Bildung der accessorischen Blüthen erfolgt dann ganz ebenso durch Theilung des neuen Vegetationskegels, wie die der Hauptblüthe aus dem Axenscheitel der Hauptinflorenscenz». For det andet støtter jeg mig paa mine egne Undersøgelser. Fig. 26 vil vise en Del af en Blomsterstand, hvor Hovedaxen sees ved I, de sekundære Axer (Blomsterne) ved II, og paa den ene af dem er ved III en af de «accessoriske» Knopper ifærd med at danne sig. Det histologiske Billede af dette Parti sees i Fig. 27, der klart viser, at den danner sig i den sekundære Knops 3die Periblemlag.

Denne Knop fortjener da for det Første ikke Navn af «gemma accessoria» [1]), hvad Rohrbach kalder den; men dernæst maa jeg ogsaa erklære mig uenig med ham i, at den skulde opstaa ved Deling af Vækstpunktet (endnu mindre ved «Kløvning», som hans «Theilung» nærmest synes at betegne); thi det er tydeligt, at den nye Knop opstaar uden for og et godt Stykke neden for den sekundære Knops Vækstpunkt, til Siden for allerede udprægede Pleromrækker (Fig. 27). Det er ogsaa urigtigt at kalde den «sammenvokset» med Hovedblomsten, hvad min for tidligt afdøde Ven ligeledes gjør [2]). Om Sammenvoksning er der ingen Tale, men vel om en Forgrening fra den sekundære Axe.

Derimod har Rohrbach Ret i, at der ved denne «accessoriske» Knops senere Forgrening opstaar en lille Klase, og hver af de Blomster, paa hvilke en saadan Knop opstaar, bærer altsaa senere paa den underste Side af sin Stilk en saadan Blomsterstand; paa Fig. 22 vil man se denne ifærd med at udvikle sig ved *d*; men Spørgsmaalet om Knopanlæggelsen i den sker ved Deling af Vækstpunktet, vover jeg her ikke at besvare.

Af *Echinocystis lobata* har Rohrbach i sin Fig. 93, Tab. III, givet et Grundrids, som viser Stillingsforholdene af Blomsterne i den hele Blomsterstand. Min Opfattelse af Forholdet hos *Cyclanthera* stemmer ikke ganske hermed (man sammenligne min Fig. 35, **XI**), og den nævnte Slægt har jeg ikke undersøgt, lige saa lidt som *Sicyosperma*, hos hvilken de samme Forgreningsforhold ifølge Rohrbach skulle findes.

Til disse saakaldte «accessoriske» Knopper findes der Analoga t. Ex. i de «seriale» Blomster hos *Verbascum* og i Hanblomsterstanden hos *Euphorbia*, hvad vi senere skulle se.

---

[1]) Warming, Videnskabelige Meddelelser, 1870, S. 83 ff.

[2]) Rohrbach, L. c., S. 60: «Die erste Blüthe dieser accessorischen Trauben liegt stets genau unter der zugehörigen Hauptblüthe, dann erst folgen die andern nach $^2/_5$ Divergenz. Diese Stellungsverhältnisse lassen nun zwar die Hauptblüthe als unabhängig von der unter ihr stehenden Traube erkennen; die durch die Entwickelungsgeschichte gebotenen Thatsachen zwingen dann aber zu der Annahme, dass die Axe des accessorischen Sprosses mit dem Stiel der Hauptblüthe regelmässig ein Stück verwachsen ist».

Ecbalium Elaterium, der omtales af Rohrbach, har jeg ligeledes kunnet undersøge nøjere. Paa en lav kuppelformet Stængelspids anlægges sidestillede Knopper i Spiralfølge, og disse Knopper have tydelige Støtteblade (cfr. Xyl. V), som anlægges samtidigt med dem eller lidt før dem. Stængelspidsen rager altid lidt op over de yngste Blomster og arbejder i uforandret Retning. Den histologiske Undersøgelse har vist mig en Knopdannelse omtrent paa Vækstpunktets Højde, og vel endog tildels udgaaende fra dettes periferiske Celler. Knopdannelsen sker altsaa som hos *Cyclanthera* ved «Deling» af Vækstpunktet, med det uvæsentlige Tillæg af Støtteblade under Blomsterne.

Sicyos Baderoa er mærkelig ved, at Kvastenes Hovedaxer ikke ende med en enkelt Hun-Blomst, men med en hel kvindelig Klase, der i Form ganske er lig den ved dens Side stillede mandlige. I den sidste sker Knopdannelsen endnu mere fjernet fra Toppen af Stængelspidsen end hos de foregaaende, er derfor endnu fjernere fra ægte Kløvning.

Endelig har jeg endnu undersøgt Han-Blomsterstande af *Sicyos angulata* (Fig. 28, V) og af *Cucumus prophetarum* (Fig. 29—30); hin mangler, denne har Støtteblade, der træde frem som meget rudimentære Organer (*f*) paa Knoppernes Grund, sikkerlig ogsaa dannede paa den; men hos begge sees dels den samme Form for Knopdannelsen som hos *Cyclanthera*, dels en endnu tydeligere Sideknopdannelse. Kløvning af Vækstpunktet forekommer ikke.

Efter at have gjort Bekjendtskab med disse Udviklingshistorier ville vi bedre forstaa den Knopdannelse, ved hvilken de akselstillede Kvaste udformes af den oprindelig udelte Akselknop (Fig. 5—8, 18 og 16). Jeg har forsøgt at faa histologiske Billeder af saadanne, men det har sine store Vanskeligheder at faa et godt Snit. Det fremgaar imidlertid utvivlsomt af det Sete, at saavel den ene som den anden af de to Sideknopper udpræges i Cellemassens Indre til Siden for Midtpartiet, det egentlige Vækstpunkt, og paa samme Maade, som de ovenfor omtalte Blomster hos *Cyclanthera* og *Ecbalium*, ved at dets periferiske Celler deltage i Dannelsen; naar Knoppen altsaa har faaet en saa bred Form, som i Fig. 18, er Udprægningen af de to nye Vækstpunkter allerede længst begyndt i dens Indre fortrinsvis ved Celledelinger under 2det Periblemlag. Men overalt, hvor begge Sideknopperne komme til Udvikling, beholder Midtpartiet af det gamle Vækstpunkt sin Livsvirksomhed uforandret, og heri maa jeg søge det vigtigste Kriterium for Afgjørelsen af det Spørgsmaal, om en Kløvning forekommer eller ikke.

Derimod er det nok muligt, at virkelig Kløvning forekommer i de Tilfælde, hvor den ene af Knopperne ikke udvikles, som i Fig. 15. Naar den vegetative Sideknop anlægges paa Akselknoppen af *Cucurbita Pepo*, sker dette dog saa tydeligt uden for og neden for Vækstpunktet, at ingen Tvivl kan blive tilbage om, at den er en ægte Sideknop.

Vi have altsaa hos Cucurbitaceerne Exempler paa, at Knopdannelsen hos samme Plante og rimeligvis endog i samme Blomsterstand snart finder Sted neden for en høj kuppelformet Stængelspids, snart Side om Side med Vækstpunktet og udgaaende fra dennes Celler, ved ulige Deling af det, endelig i sjeldne Tilfælde ved en lige Deling af det d. e. ved Kløvning.

Til Slutning skal jeg gjøre opmærksom paa, at Prokambiumdannelsen mange Steder, navnlig udmærket tydeligt i Blomsterstandene, først tager sin Begyndelse langt neden for Stængelspidsen. Knopperne paa Fig. 20 og 21 have saaledes ganske samme Bygning, hvad Vævets Natur angaar, som Stængelspidsen selv. De maatte regnes med til Vækstpunktet, naar Prokambiet skulde sættes som Grænse for dette. Dette viser det urigtige i ikke at ville bestemme Vækstpunktets Beliggenhed efter den i Urmeristemet selv paavislige Udprægning af Cellerne til forskjelligt Arbejde. Thi at en Knop herved ikke skulde fortjene at tages i Betragtning i lige saa høj Grad som et Blad, vil dog næppe Nogen paastaa.

17. Hydrocharideæ.

Hydrocharis morsus Ranæ og *Vallisneria spiralis* spille en vigtig Rolle i Spørgsmaalet om Vækstpunktkløvning; thi for det første ere de de eneste Planter, som Pringsheim udtrykkeligt nævner[1]) som Exempler paa «Theilung», og for det andet have de for nylig været Gjenstand for Undersøgelse af Rohrbach[2]), der kommer til samme Resultat som Pringsheim, at en virkelig «Kløvning» (hos ham kaldt «Theilung») finder Sted.

Jeg har arbejdet mere med disse to Planter end med de fleste andre Arter, som jeg har undersøgt; thi ingen har frembudt saa mange Vanskeligheder som disse; Delene ere saa smaa og saa sammentrængte, at det næsten aldrig kan lykkes at lægge sikre Snit, der gaa nøjagtigt gjennem Midten af den Stængel, som skal undersøges, eller dog bortskære en Del af denne i et med Midtplanet parallelt Snit. Den hensigtsmæssigste Methode for Undersøgelsen er derfor at gjøre Præparaterne saa gjennemsigtige som muligt, uden at Cellevæggene dog svinde rent bort; men her vise de sig langt lunefuldere end nogen anden mig bekjendt Plante, og til Trods for, at alle almindeligt anvendte Reagentier ere blevne prøvede paa de forskjelligste Maader, er det dog kun sjeldent lykkedes mig at faa gode Præparater.

Hydrocharis morsus Ranæ. (Tab. VI, Fig. 8—10). Den af Rohrbach givne Fremstilling af Bladstillings- og Forgreningsmaaden er, saa vidt jeg har set, rigtig, hvorfor jeg

---

[1]) Bot. Ztg. 1853, S. 609.

[2]) Beiträge z. Kenntniss einiger Hydrocharideen, i Abhandl. d. Naturf. Ges. z. Halle, Bd. XII 1871. Afhandlingen var allerede indsendt til Selskabet i October 1870.

med Hensyn til dette Punkt blot henviser til ham. Det Forhold, som vi her særligt have at fæste vor hele Opmærksomhed paa, er Dannelsen af Knopperne. Efter Rohrbach «deler» Vækstpunktet sig ved lige Deling, og der opstaar derved to nye Vækstpunkter, af hvilke det ene udvikler en Knop, der forholder sig som Akselknop for et Blad, der imidlertid først anlægges efter Knoppen; og det andet udvikler en Knop, der overtager Endeknoppens Rolle i den gamle Stængel, og derfor danner en ligefrem Fortsættelse af denne.

Rohrbach holder sig ikke til de ydre Former alene, men giver endog i sine Figurer 18 og 19, Tab. I, den histologiske Udviklingshistorie, om hvilken han udtaler sig saaledes (l. c. S. 21): Sieht man nun bei der eintretenden Verzweigung, dass die Zelltheilungen in demjenigen Theil des Periblems, welches unter der Mitte des Vegetationsscheitels, also in der (geometrischen) Axe der ursprünglichen Wachsthumsrichtung, liegt, aufhören, dagegen um so lebhafter stattfinden in den seitlich gelegenen Partien, so dass in Folge dessen diese als zwei neue Gewebshöcker hervortreten, während der ursprüngliche Scheitel im Wachsthum aufhört und in Dauergewebe übergeht: so hat man offenbar, mutatis mutandis, das Analogon des Vorgangs bei *Riccia*, also eine ächte Dichotomie vor sich. Solche Fälle lassen sich nun wirklich bei *Hydrocharis* beobachten (Fig. 18 und 19), sogar in der Weise, dass zugleich die beiden neu entstandenen Sprosse, ganz abgesehen von ihrer späteren Entwicklung, auch zwei neue, von der alten divergirende Wachsthumsrichtungen einschlagen».

Har man imidlertid erhvervet sig Kjendskab til den fanerogame Stængels almindelige Bygning, kan man ikke andet end fatte Mistanke om hans Billeders Overensstemmelse med Naturen. For det første fremstille de Stængelspidsen dannet helt og holdent af et temmelig uordnet Meristem, saaledes som man før 1868 fejlagtig forestillede sig den bygget, og det vilde dog være usandsynligt, at vi atter her skulde træffe det sjeldne Tilfælde, som vi hidtil kun kjende fra *Digitalis* og *Cucurbita*-Slyngtraaden; for det andet gaar Snittet enten ikke nøje gjennem Stænglens Midtplan eller er overhovedet ikke naturtro; thi man vil i ingen af de to afbildede Bladaksler se den regelmæssige vifteformede Ordning af Cellerne, som er det bedste Kriterium for, at man har Midtplanet for sig, og som man vil se t. Ex. paa Fig. 10 og 1—4 (*Vallisneria*), VI, samt paa mange andre Figurer paa enhver af mine andre Tavler; det er dernæst ogsaa overhovedet sjeldent, at Dermatogencellerne gribe ind i Periblemet med saa spidse Vinkler, som de tegnede, og det er endelig mistænkeligt, at en Knop af en Vandplante, har et saa smaacellet Væv. (Rohrbachs Figg. ere tegnede ved 250 Ganges Forstørrelse, mine omtrent ved den samme eller en noget større).

Undersøgelsen af *Hydrocharis* har bestyrket det Begrundede i min Mistanke. Man vil paa alle mine Figurer (baade af denne Plante og af *Vallisneria*) se regelmæssige Periblem- og Pleromlag; se et langt mindre Antal, men større, Celler i Knopper paa samme

Udviklingstrin; se et mere lige afsat Dermatogen, og endelig faa et noget andet og, som jeg tror, korrektere Billede af Kløvningen.

Denne foregaar paa følgende Maade. Fig. 9 giver et Billede af en (ved omtrent 300 Ganges Forstørrelse) tegnet Knop, om hvilket jeg tror at turde paastaa, at hver Celle er rigtigt tegnet, og paa hvilken en lidt forandret Indstilling af Mikroskopet bragte et nøje tilsvarende Billede. Det viser, at Tverdelinger ophøre i Spidsen af Stænglens geometriske Axe, altsaa i selve Vækstpunktets Centrum, i de under Periblemlaget liggende Celler (nærmest altsaa i Pleromiuitialgruppen), og afløses af gjentagne Længdedelinger. Derved opstaar i Stedet for Pleromiuitialerne en Tverrække af Celler, *m*, der er lodret paa de gamle Pleromrækker og bøjer lidt opad i Enderne, hvor de nye Pleromiuitialceller grundlægges; der anlægges i dette Tilfælde (paa dette Snit i alt Fald) kun *en* Række Pleromceller i den venstre Knop, men to i den højre, der senere træder frem som Akselknop paa hin, som danner Hovedaxens Fortsættelse.

Et andet, som jeg tror, aldeles korrekt Billede giver Fig. 10. Hver af de to Knopper have her to Pleromrækker, men disse opstaa paa samme Maade, som i første Tilfælde, nemlig ved Dannelsen af lodrette eller lidt heldende Delingsvægge i Cellerne under 1ste Periblemlag med samtidig Ophør af de Tverdelinger, ved hvilke det gamle Plerom og altsaa hele Aksen maatte vokse i Længde; i Yderpunkterne af den eller de altsaa fra selve Vækstpunktets Celler udgaaede Tverrækker ligge de nye Vækstpunkter (*P—P*).

Endelig er i Fig. 8 afbildet en anden Knop ifærd med at kløve sig. Skjøndt større end de to andre og mindre regelmæssig, sees dog de karakteristiske Celle-Tverrækker, *m*, fremkomne i Axens Midtlinie, og til Siderne for dem er der et mere uordentligt Væv, hvor de to nye Vækstpunkter nemlig ere ifærd med at forme sig.

Dette er Exempler paa, hvad jeg maa kalde virkelig Kløvning af Vækstpunktet, lige Deling af det, og hvad det endelige Resultat angaar, ere Rohrbach og jeg altsaa enige.

Rohrbach angiver, at Tilfælde forekomme, i hvilke Kløvningen jævnt gaar over i den ægte Sideknopdannelse, idet den ene Knop snart kun skubbes lidt ud af den Retning, som som den gamle Stængelspids indtog, snart endog beholder den; i dette sidste Tilfælde, som jeg ogsaa har set Tilnærmelser til, kan man da ikke antage, at nogen Kløvning har fundet Sted: vi finde altsaa ogsaa her, hos samme Plante, Forgrening ved lige og ved ulige Deling af Vækstpunktet, maaske endog den ægte Sideforgrening.

Vallisneria spiralis. Med Hensyn til Bladstillingsforholdene paa de forskjellige Axer vil jeg henvise til Rohrbach[1]), da det alene er Knoppernes Oprindelse ved Vækstpunktkløvning, som jeg har fæstet min Opmærksomhed paa.

[1]) L. c., S. 53 19.

Den foregaar paa selv samme Maade som hos *Hydrocharis* ved Ophør af Tverdelinger i Vækstpunktets Midte, og livligere Fortsættelse af dem til Siderne for dette, og herved fremkomme netop lignende Tverrækker af Celler som hos hine. I Fig. 4 vil man se en endnu ganske udelt Stængelspids, med et Blad, *f*, i hvis Aksel der ikke er Spor til Knop. Der er 4 Pleromrækker indenfor det ene Periblemlag, som til venstre grundlægger Bladet.

I Fig. 3, vil man se en Knop, som synes at være i begyndende Kløvning. Bygningen er omtrent som i Fig. 4; der er ogsaa her 4 Pleromrækker og 1 Periblemlag, men den øvre Del af Stænglen er bleven bredere, og lige under 1ste Periblemlag have allerede lodrette Celledelinger fundet Sted. Partiet øverst til venstre, der dannes af fire Celler, var dog ikke ganske tydeligt og er derfor maaske ikke ganske korrekt.

I Fig. 2 er Kløvningen imidlertid fremmeligere; ved *m* sees den dannede Tverrække, og til højre og venstre ligge de to nye Vækstpunkter (*P—P*). Stænglen har sine 4 Pleromrækker som sædvanligt, og der er 1 Periblemlag.

Endelig viser Fig. 1 den fuldbyrdede Kløvning, ved hvilken de to nye Vækstpunkter have frembragt to nye Knopper, to Tvillingknopper, hvis Moder dør ved deres Fødsel. De fire Pleromrækker i den gamle Stængel dele sig paa den smukkeste Maade, — to bøje til højre, to til venstre. De to Knopper have hver 1 Dermatogenlag, 1 Periblemlag, 1 kappeformigt Pleromlag, som man derfor ogsaa kunde kalde Periblemlag, og endelig i Midten *en* Pleromrække, der er den umiddelbare Fortsættelse af en af de to inderste Pleromrækker i Moderkaulomet.

Delingen er saaledes foregaaet saa smukt og saa lige gjennem Stænglens Midte, som vel muligt. Ikke desto mindre vil man se, at de to Knopper ikke ere ganske ens, thi den ene har allerede et Bladanlæg, ved *f*, hvad den anden ikke har.

Vi føres her til en kort Betragtning af Bladdannelsen. Hos begge de nævnte Planter er det det 1ste Periblemlag, fra hvilket den Celledannelse udgaar, der gjør Begyndelsen til Bladet. Men medens denne er temmelig uordenlig hos *Hydrocharis*, og ikke synes at foregaa efter nogen bestemt Plan (Fig. 8—10, *f—f*), udmærker den sig hos *Vallisneria* ved en høj Grad af Regelmæssighed. En Celle i 1ste Periblemlag (eller rettere en halvmaaneformig Ring af Celler i dette Lag) deler sig ved en tangential Væg, og driver Dermatogenet i Vejret, og denne Tangential-Væg ligger lidt indenfor det Plan, som Inderfladen af det ikke udbulede Dermatogen danner; maaske endnu *en* Periblemcelle i enkelte Tilfælde tverdeler sig, hvad Blad *f*, Fig. 1, synes at antyde. Den indre af de to nydannede Celler deles, som det synes, snart ved radiale (og tangentiale) Vægge i nye Celler, medens den yderste først deler sig ved en tangential-Væg; den inderste af de derved dannede deler sig ved radial Væg (f^1, Fig. 1) eller skævt (*f*, Fig. 3), og den yderste atter ved tangential Væg, og dette fortsættes.

Selv om Delingen i enkelte Tilfælde, hvad jeg ikke tvivler paa, skulde foregaa lidt anderledes (denne Sag var her jo en Bisag for mig, som jeg derfor ikke har kunnet skænke saa megen Opmærksomhed som det egenlige Hovedspørgsmaal), synes Resultatet dog altid at være det, at man paa et Længdesnit gjennem Bladene under deres Dermatogen vil finde et Cellevæv, med en stedse udelt enkelt Topcelle (egentlig er der altsaa en Kant af saadanne), der ved sin hele Vækstmaade minder om visse Alger, idet den deler sig ved en horizontal Væg, medens Segmentcellen tidligere eller senere deler sig ved lodrette Vægge (Se alle Fig. 1—4). En slig Vækstkant har jeg aldrig fundet i Bladene af *Hydrocharis*, og Udviklingsmaaden er fra første Færd af noget forskjellig (se Figurerne).

De to Blade i Hunblomstens Hylster hos *Vallisneria* ere derimod for saavidt noget afvigende i Udvikling, som de hurtigt høre op med Længdevækst af det indre Væv og for Resten vokse ved en Kant af Dermatogentopceller med (som oftest) regelmæssig til to Sider hældende Delingsvægge, omtrent som om de vare kryptogamiske Blade (Fig. 5, paa hvilken de nederste Partier vare noget utydelige, og Fig. 6). De bestaa for største Delen altsaa kun af 2 Cellelag, de to Epidermislag[1]).

18. Utriculariaceæ.

Skjøndt en Kløvning af Vækstpunktet ikke kunde ventes, efter hvad man af Pringsheims Undersøgelser[2]) ved om disse Planter, har jeg dog foretaget nogle Undersøgelser af dem for ved Autopsi at blive bekjendt med den mærkelige bispestavsformigt krummede Stængelspids, og med den uden for Bladakselen forekommende Knopdannelse, som han har gjort opmærksom paa, og tillige for selv at kunne have en Mening i Striden mellem Pringsheim og Hanstein om Stængelspidsens Bygning og Vækstmaade.

Utricularia vulgaris har jeg især undersøgt (Fig. 11—15, **VI**). Jeg maa med Hensyn til Stængelspidsen aldeles slutte mig til Hanstein[3]); der findes ikke her nogen kryptogamisk kileformet Topcelle, som Pringsheim angiver, men et bestemt afsat Dermatogen beklæder hele den bispestavkrummede Stængelspids (Fig. 11, 13—15); under dette følger *et* Periblemlag, og endelig udfyldes det Indre af nogle faa med Axen parallelle Cellerækker («Plerom»), der løbe spidst sammen under Periblemkappen»[4]). Der er saaledes en temmelig

---

[1]) Ganske uden Analogi er denne Udvikling ikke, thi efter Caspary vokse Bladene af *Elodea canadensis* paa en lignende Maade; jeg har allerede anført det samme for Compositékronen, hvor jeg har iagttaget det hos flere Arter, og for Dækbladene i Blomsterstanden af *Rheum compactum* (i alt Fald undertiden); i Fig. 7, **VI**, findes Tversnit af et Kronblad af *Acacia armata*, der viser det samme, og i Bægerbladene af den findes det ogsaa. Jeg vil i det Følgende faa Lejlighed til at komme tilbage hertil.

[2]) Monatsber. Berlin. Akad. 1869.

[3]) Bot. Ztg., 1870, S. 24.

[4]) Hanstein, l. c., S. 25.

nøje Overensstemmelse med Græsarternes Stængelspids (se ovenfor S. 48), naar man bortser fra, at denne ikke er krummet. Paa de kraftige normale Hovedstængler har jeg oftest ikke kunnet finde en enkelt Plerom-Topcelle (Fig. 11); i andre Tilfælde kunde man fristes til at antage Existensen af en saadan, som deler sig ved hældende Vægge (Fig. 13), uden at jeg dog tør antage dette eller kan paavise Normen for dens Deling. Men paa de slanke og tynde «Ranker», som Pringsheim kalder dem, i hvilke Pleromrækkerne ere faa i Antal (Fig. 14, 15), har jeg ofte fundet en enkelt Plerom-Topcelle, der deler sig ved horizontale Vægge. Segmentcellerne dele sig hurtigt ved Længdevægge, hvorved Pleromrækkerne opstaa, og ved fortsatte Spaltninger af disse vokser Stænglen i Tykkelse. De mod Rygsiden liggende Pleromrækker synes i højere Grad at spalte sig end de, der ere nærmest ved Bugsiden. Hovedstænglen har jeg i *et* Tilfælde fundet bygget omtrent som Rankerne, idet en enkelt Celle indtog Spidsen af den under to Periblemlag liggende Pleromrække.

Jeg maa nu af dette slutte, at der hverken findes en kryptogamisk Topcelle, ikke heller konstant en paa lovbestemt Maade sig delende Pleromtopcelle; naar en saadan forekommer, er det et ved Pleromrækkernes ringe Antal fremkaldt uvæsentligt Tilfælde. Men forøvrigt maa jeg anbefale disse vanskelige Forhold til fornyet Undersøgelse.

Hvad angaar «Rankerne», de slanke Grene, der hos *U. vulgaris* opstaa paa Bugsiden og først efter et langt Stængelstykke begynde med Blade, da opstaa de for det første, som *g* i Fig. 12 og 13 viser, langt fra Vækstpunktet og langt neden for Stængelspidsens Top, paa den indrullede Axes Bugside; der kan derfor ingen Tale være om Vækstpunktdeling. For det andet ere de fuldkommen støttebladløse, og det er særdeles tydeligt, at de dannes ved Celledelinger alene i Periblemlaget, lige under Dermatogenet. Hermed stemme ogsaa Pringsheims Figurer. De inderste Cellevægge i det i Fig. 12 afbildede Parti har jeg vel ikke kunnet se; men Linien, der angiver Periblemets Grænse mod Pleromet kunde dog tydeligt forfølges. Heller ikke vover jeg at udtale mig bestemt om den Maade, paa hvilken de første Celledelinger finde Sted, og paa hvilken Knoppen vokser. Disse Spørgsmaal maa jeg lade staa hen til en senere Undersøgelse. Her maa det ogsaa være nok at have paapeget, at Ranken, skjøndt Kaulom, opstaar lige under Dermatogenet og paa sit Anlægsstadium fuldkommen har et Phylloms Udseende, at den af Pringsheim antagne kryptogame Vækstmaade ogsaa modbevises ved denne Knopdannelse, og endelig, at Ranken ikke har noget saakaldt Støtteblad.

Hos *Utricularia neglecta* har jeg ikke fundet disse Ranker; de blærebærende Grene opstaa i den mod Skuddets Ryg liggende Side af Bladakselen og staa tildels endog lidt uden for den; men de ere ligesom de paa Bugsiden stillede Ranker hos *U. vulgaris* indrullede imod Hovedaxens Spids. Dog maa denne Plante anbefales til nøjere Undersøgelse.

Om de normale Sidegrene hos *U. vulgaris* bemærker Pringsheim, at de ikke

opstaa ved ægte «Dichotomi af Vegetationskeglen» lige saa lidt som Akselknopperne hos de øvrige Vandplanter med slanke Stængelspidser, som «ubetinget ere Sideorganer».

Ved Kaulomforgreningen hos *Utricularia* spiller Vækstpunktkløvning altsaa ingen Rolle. Derimod er jeg overbevist om, at den forekommer ved dens gaffeldelte Blade.

19. Ampelideæ.

Rankerne hos *Utricularia* minde om Rankerne eller Slyngtraadene hos Ampelideerne, hvad ogsaa Pringsheim antyder[1]). Men medens Forholdet hos hine er af utvetydig Natur (hvorfor jeg ogsaa forudskikker mine faa Undersøgelser over dem), er det det ikke paa samme Maade her. Vel er den morfologiske Værd af Vinrankens Slyngtraad ikke underkastet saa mange Tvivl, som Cucurbitaceernes, thi den er en utvivlsom Gren; men om denne Grens Oprindelse og sande Stilling ere meget modstridende Anskuelser udtalte, som endnu blive hævdede.

Al. Braun har i Botan. Ztg. 1867, S. 382 givet en historisk Oversigt over disse Anskuelser; da han imidlertid ingen Literaturhenvisninger har vedføjet, og hans Oversigt ikke er fuldstændig, opfører jeg her, hvad jeg selv har havt Lejlighed til at gjennemse eller fundet citeret.

Anskuelserne gaa i følgende seks Retninger, af hvilke Braun opfører de tre.

I. Den St. Hilaireske gaar ud paa, at Slyngtraaden er den forskudte Hovedaxe, og enhver med Slyngtraade besat vegetativ Gren altsaa et Sympodium.

St. Hilaire, 1825, nouveau bull. de la société philomatique (mig ukjendt) og 1841, Leçons de botanique.
Röper, 1828, de organis plantarum, p. 11.
Turpin, 1834, Ann. de la soc. d'horticulture XIV eller XV, S. 12 (mig ukjendt).
Bischoff, Lehrb. I, S. 141.
A. Jussieu, cours élementaire, S. 138.
Schultz-Schultzenstein, 1847, ifølge Braun.
Braun, «Verjüngung», 1849, S. 49—54, og Bot. Ztg., 1867, S. 382.
Kützing, 1851, Grundzüge der philosoph. Botanik, S. 163.
Wigand, 1854, «Der Baum», S. 127 (er dog lidt afvigende fra Al. Braun).
Fabre, 1855, (Bull. Soc. bot. Fr. II, S. 518).
Payer, Organogénie, 1857, S. 157.
Wydler, Flora, 1859, S. 372.
Godron, vide: Bull. d. la soc. Bot. de France, 1867, S. 14; Revue, P. 160.

Hertil have de fleste andre sluttet sig, som Hofmeister (Allgem. Morphol., S. 438), Döll (Rhein. Flora, S. 685 og Flora v. Baden, S. 1189), Ascherson (Flora v. Brandenburg, S. 118) o. fl.

II. Den Lestiboudois-Linkske, ifølge hvilken Slyngtraaden er en fra det neden for staaende Blads Aksel i et helt Stængelstykkes Længde forskudt Gren. Dette Blads Aksel har altsaa, lig *Aristolochia Sipho* o. fl. to Knopper, den ene i Bladakselen, men den anden forrykket fra denne.

Lestiboudois synes dog at vakle mellem denne Anskuelse og den under IV fremstillede; han bør anføres begge Steder.

[1]) Monatsberichte Berlin. Akad., 1869, S. 101.

Lestiboudois, 1857, Bull. de la Soc. Bot. Fr. T. IV, S. 809, og 1865, comptes rendus, LXI, p. 889—895; se Bull. soc. bot. Fr. 1865, XII, Revue, S. 270.

Ifølge Braun hører ogsaa Link herhen, og Heiberg udtaler den samme Anskuelse (Bot. Tidsskr., 2det Bd. S. 199).

III. Den Prillieux'ske, ifølge hvilken Slyngtraaden opstaar ved Stængelspidsens eller Vækstpunktets Deling.

Prillieux, 1856, i Bull. Soc. bot. Fr. III, S. 645.

Nägeli, 1858, Beiträge z. wissensch. Botanik, I, S. 89.

Ørsted, Vidensk. Medd. for Naturh. Foren., 1868, S. 129.

IV. Den Nägeli-Schwendenerske og **Lestiboudois'ske.**

Slyngtraaden er en extraaxillær Knop, der uafhængig af Bladene opstaar paa Stængelspidsens Side over for det yngste Blad.

Lestiboudois, comptes rendus, T. 45, 1857, II, S. 153—161. Bull. Soc. bot. France, 1857, t. IV, S. 809.

Nägeli og Schwendener, 1867, das Mikroskop, S. 605.

W. Pfeffer, zur Blüthenentwickelung der Primulaceen und Ampelideen, Pringsheims Jahrb. VIII. 1871, S. 211.

Fermond (Bull. Soc. Fr. III, 1854, S. 595): («un organe oppositifolié», dog maaske nærmest Blad; altsaa stemmer han vel mere med Caruel).

V. Cauvet's Anskuelse gaar ud paa, at Slyngtraaden er en forskudt Hovedaxe, og den Knop, som trænger den til Siden, er en Knop paa det Blads Akselknop, der staar over for Slyngtraaden, altsaa en Knop af 2den Orden, som udvikler sig meget hurtigt og røver Magten fra Moder- saa vel som Bedstemoderaxen. Derved skulde den Vanskelighed bortforklares, at de to Bladrækker paa Ranken ikke krydse dem paa Hovedskuddet.

Cauvet, Bull. soc. bot. Fr., 1864, XI, S. 251.

VI. Den Caruelske: *Vitis* har regelmæssigt afvekslende Blade, om hvilken Bladstilling Autor udtaler sig saaledes: «..... de sorte que, selon moi, la disposition distique des appendices de la Vigne ne souffrirait pas d'exceptions; elle présenterait seulement cette particularité qu'alternativement il se produit une vraie feuille sans coussinet, puis une bractée portée par un long coussinet (Slyngtraaden), et faisant partie d'un bourgeon pulvinaire à fleurs, qui tantôt se développe en une inflorescenze complète, tantôt s'atrophie sous forme de vrille, tantôt avorte complétement».

Caruel, 1868, Bull. Soc. Fr. XV, S. 28. (Cfr. ogsaa Link, Elem. phil. S. 319).

Af Hugo Mohl regnes Vinranken til *cirrhus peduncularis* («Über Ranken und Winden», S. 45), og der anføres om den, at en Anticipation af flere Aar finder Sted, men forøvrigt er det ikke ret klart, hvilken Mening han nærer om dens afvigende Stilling.

Naar de faa (Prillieux, Ørsted, Nägeli og Schwendener); der have undersøgt Udviklingshistorien, komme til andre Resultater end Braun, søger denne Grunden dertil i, «dass die Kenntniss derselben (ɔ: Udviklingshistorien) bis jetzt nicht über das Stadium der sichtbaren Höckerbildung zurückreicht, während die vorausgehenden Stadien der Zellbildung noch gänzlich unerforscht sind». Denne histologiske Udviklingshistorie har jeg studeret med al mulig Omhu og skal nu i det Følgende give mine Resultater.

Axernes og Bladenes Stillingsforhold paa den udvoksne Plante, de biologiske Forhold o. s. v. ere, især ved Al. Brauns Undersøgelser, saa godt kjendte, at jeg her kan forbigaa en omstændeligere Fremstilling af dem, saameget mere som Spørgsmaalet om Forgreningens sande Natur har vist sig uløseligt ved dem alene.

Ampelopsis hederacea. (Fig. 16—20, 26, VI). Stængelspidsen er lav kuppelformet, og da jeg overalt paa de talrige Præparater, som jeg har undersøgt (t. Ex. Fig. 16 og 19), har set den have samme væsenlig uforandrede Form, ligger heri allerede et Indicium for, at der ingen Vækstpunktklovning forekommer. Den har 1—2 Periblemlag, hvorpaa neden for Spidsen følger et uordnet Meristem (Plerominitialerne), som gaar over i regelmæssige Pleromrækker (Fig. 20). Paa denne Figur ere de to øverste Nydannelser et Blad, *f*, og en Slyngtraad, *v*. Denne opstaar baade her og hos *Vitis vinifera*, hvad allerede Nägeli og Schwendener angive, paa den modsatte Side af Bladet og en lille Smule senere og højere end dette. Blad og Slyngtraad ere vanskelige at kjende fra hinanden straks ved deres Fremkomst, naar man alene gaar efter deres ydre Form. Man maa derfor navnlig tage Hensyn til den hele Række af forudgaaende Dannelser, idet man af den Orden, i hvilken de følge paa hverandre, som bekjendt kan hente Momenter til Bedømmelsen af de højest staaende mere prægløse Nydannelsers Natur, hvilken Ordensfølge dog næppe er saa lovbunden, som almindeligt antagen. Men dernæst have vi ogsaa i den histologiske Bygning og Udvikling et Kriterium, som jeg allerede oftere har peget hen paa. I dette Tilfælde vil man se, at Organet *f*, der kræver mindre Plads paa Stænglen end *v* og hurtigt bøjer sig op ad, opstaar ved alsidige Celledelinger om ikke i 1ste, saa dog fortrinsvis i 2det Periblemlag og den umiddelbart derunder liggende Cellerække. Men Organet *v*, der kræver mere Plads og flere Celler til sin Dannelse, opstaar afgjort ikke i 1ste Periblemlag, derimod tildels i 2det, men fortrinsvis i det dybere liggende Meristem. Hint er et Phyllom, dette et Kaulom. Denne Modsætning i Bygning af Blad og Slyngtraad vil ogsaa fremgaa af v^1 og f^1, samme Figur[1]).

Men de Celler, der saaledes give Impulsen til Slyngtraadens Dannelse, ligge tydeligt nok til Siden for Celler, der ere bestemt udprægede som Pleomrækker; Topcellegruppen ligger højere oppe og er uberørt af Slyngtraadsdannelsen, med andre Ord: Deling af Vækstpunktet finder ikke Sted, Slyngtraaden er et sidestillet Kaulom.

Payer siger[2]), at Udviklingshistorien «d'une manière irréfragable» viser, at Slyngtraaden (eller Blomsterstanden) er den oprindelige Hovedaxe, som kastes til Siden af «le rameau usurpateur». Allerede den blotte ydre Betragtning af Delene maa føre til, at dette næppe kan være Tilfældet; den histologiske Undersøgelse giver, som vi have set, en yderligere Stadfæstelse deraf. Naar Prillieux har set Slyngtraaden opstaa som en Vorte paa den kuppelformede Stængelspids og paa Siden af den (se hans Fig. 2, S. 652 l. c.), og han desuagtet kan betragte dette som en Deling («partition») af Stængelspidsen, er Grunden dertil vel nærmest den, at han antager denne helt dannet af et ensartet meristematisk Væv. Men en ligelig Kløvning gjennem Midten kan han dog næppe antage.

[1]) Her vil jeg ogsaa fremhæve, at der først i Grunden af f^1 viser sig Celledelinger, der tyde paa, at Prokambiumdannelsen begynder. Mindst to Slyngtraade og *et* Blad vilde altsaa blive regnede til Vækstpunktet, hvis Prokambiet skulde sættes som nederste Grænse for dette.

[2]) Organogénie, S. 157.

Naar vi holde os simpelthen til Udviklingshistorien, er Slyngtraaden altsaa hverken en Kløvningsknop eller den gamle Stængelspids, der er skudt til Side; men jeg maa dog gjøre opmærksom paa, at der hos visse Rubladede med dækbladløse Svikler fremtræder Forhold, der kunne gjøre os varsomme med Hensyn til for hurtigt at drage vore Slutninger af Udviklingshistorien alene (se nedenfor: *Tiaridium*). Hos *Ampelopsis* er der imidlertid ingen Grunde, der kraftigt tale for den St. Hilaireske Sympodiedannelse, og jeg maa derfor betragte Udviklingshistoriens Kjendelse som fuldgyldig. Ranken maa da, naar vi lade de to imødegaaede Tydninger falde, enten være en extraaxillær Sideknop eller Akselknop for det neden for staaende Blad (for f^1 Fig. 16, 19 og 20).

Mod det sidste taler først det aldeles usædvanlige Forhold[1]), at denne Knops 1ste Blad kom til at staa lige over Knoppens Støtteblad; dernæst det, at den slet ikke opstaar i eller ved Bladets Aksel, som alle tidligere betragtede Akselknopper gjøre, det vil sige, hvad Fig. 20 tydeligt viser, staar saaledes nøje knyttet til Bladet, som Tilfældet er dels med de ægte Akselknopper i Almindelighed, dels specielt med dem, der forekomme hos alle Ampelideer, selvfølgelig ogsaa hos *Ampelopsis hederacea.* Man vil se saadanne under Mærket *g* paa Fig. 19, hvor de ligesom paa Fig. 20 først komme til Syne i den 3die øverste Bladaksel, og paa Fig. 16, hvor der allerede findes en i den næstøverste; de forholde sig altsaa baade i Henseende til den Maade, hvorpaa de ere knyttede til deres Støtteblad, og med Henseende til deres Bladstilling (se Braun, Wigand o. fl.) som ægte Akselknopper. De opstaa under 1ste Periblemlag[2]). Jeg vil dog ikke undlade her at gjøre opmærksom paa, at der dog idetmindste gives *et* Tilfælde, i hvilket flere i samme Aksel stillede Knopper, ikke ere saa nøje knyttede til Støttebladet, som den enlige Akselknop plejer at være det; Akselknoppen og Tillægsknopperne hos *Aristolochia Sipho* staa nemlig temmelig uafhængige af Bladet og meget mere knyttede til Moderstænglen, hvad Fig. 14—16, **XI**, vise. Der er dog den store Forskjel mellem dem og hine to Knopper hos Ampelideerne, at paa alle Aristolochias er Bladstillingen ens i Forhold til Moderaxen, at de alle ere lige nøje knyttede til denne, og endelig synes det, at de alle opstaa fra et fælles ejendommeligt Meristem (det skraverede Parti Fig. 15), hvortil der intet Tilsvarende er hos *Ampelopsis.*

Mod den første Antagelse derimod, at Slyngtraaden er en «extra-axillær» Sideknop eller, som jeg hellere vil sige, et «extra-spiralstillet» Epiblastem, taler efter min Mening ingen som helst Grund, efter at vi nu have lært af *Utricularia*, at Knopdannelse «udenfor Bladakslerne», paa Stænglens Sider, virkelig forekommer.

---

[1]) Hvorledes det egenlig forholder sig hos *Calla*, fortjener vel en nærmere Undersøgelse.

[2]) Akselknopperne og Slyngtraadene ligge ikke nøje i samme Plan, i alt Fald hos enkelte Ampelideer, hvilket jeg ikke har set anført tidligere. Af Fig. 21 (*Vitis vulpina*) vil man saaledes se, at (de skraverede) Akselknopper ligge i et Plan bag ved Slyngtraadenes.

Slyngtraadens senere Udvikling. Slyngtraadens Fremkomst have vi betragtet; paa et meget fremmeligere Udviklingstrin ser den ud som v^1, Fig. 20, eller v, Fig. 26 og 19. Den er bleven en stor Cellemasse med noget uordenlige Periblemlag og Pleromrækker. Spørgsmaalet om Vækstpunktets Deling træder nu atter frem her; thi Slyngtraaden forholder sig som Hovedstænglen, og frembringer en Gren over for hvert af sine Blade, saa at en hel Række af saadanne opstaar afvekslende vendte til de to Sider (Fig. 18). Slyngtraadens første Blad vender her og hos alle andre Ampelideer lige frem ad og ned ad (a paa v^3 Fig. 16). Af de to første Grene vender den ene (z, Fig. 16) ind ad mod Moderaxen, hvorfor den, da Slyngtraaden her intet Blad har, selvfølgelig heller ikke kan være en forskudt Akselknop. Den maa være en extra-axillær Knop (Side- eller Kløvningsknop) eller den forskudte Hovedaxe. Hos *Ampelopsis hederacea*, som vi her endnu beskæftige os med, foregaar der imidlertid ganske bestemt ikke nogen Kløvning af Vækstpunktet under Slyngtraadens forskjellige Forgreninger. Som v^1, Fig. 16, viser, deler den sig først i tre netop antydede Partier, men Midten rager tydeligt frem, hvad den, hvis en Kløvning foregik, ikke kunde; heller ikke v^3 taler for Kløvning, og lige saa lidt viser Slyngtraaden ved sine senere Forgreninger Spor til en saadan; thi Stængelspidsen er kegleformet (Fig. 17) som paa Hovedaxen, og Knop (Slyngtraad, v) og Blad opstaa langt neden for den. Stænglens midterste Pleromrækker stile i alle Tilfælde lige mod den kegleformede Top uden at afbrydes af Tverrækker som hos Hydrocharideerne. Med andre Ord: Slyngtraaden hos denne Plante forgrener sig som dens Moderaxe. Kun maaske ved den allerførste Forgrening af den finder der i enkelte Tilfælde en ulige Vækstpunktdeling Sted.

Vitis vinifera (Fig. 28, VI) forholder sig, saavidt mine Undersøgelser gaa, ganske som *Ampelopsis*; der finder ingen Vækstpunktkløvning Sted hverken paa Hovedaxen eller i Regelen ved Slyngtraadens Forgrening[1]).

Da det har sin store Interesse ved disse Spørgsmaal at kjende Bygningen af Stængelspidsen nøje, har jeg undersøgt den paa Kimplanterne af denne Art, hos hvilke som bekjendt ingen Slyngtraaddannelse finder Sted. Jeg har derved for det første set, at den Zigzagbøjning, som findes paa de ældre rankebærende Grene, og som ogsaa udtaler sig i Pleromrækkernes Løb, allerede findes paa Kimplanten (Fig. 28, i hvilken Pleromrækkernes Retning er angivet ved Linier mellem Knudepartierne, n); den kan altsaa ikke antages at være en Følge af den tænkte Forskydning af de relative Hovedaxer. Dernæst viser det sig, at Stængelspidsen som sædvanlig har *et* Periblemlag, hvorunder følger et uordnet Meristem og efter dette regelmæssige Pleromrækker, afbrudte ved hver «Knude» (nodus) af et anderledes formet Væv (n), og endelig sees normale Akselknopper, som i deres Forhold til Støttebladet stille

[1]) Cfr. Fig. 265 hos Nägeli og Schwendener, Mikroskop, S. 605.

sig ganske som de Knopper paa den slyngtraadbærende Gren, som vi ovenfor førtes til at kalde dennes Akselknopper. Denne Gren og Kimplanten stemme altsaa nøje overens i Bygning.

Vitis vulpina (Fig. 21—25, 27, VI) er langt interessantere end de foregaaende to.

Stængelspidsens Form er ikke saa uforandret; snart er den lav kuppelformet, snart meget flad og næsten svagt indbugtet (Fig. 23, VI), saa at den minder om en Stængel af *Hydrocharis* og *Vallisneria* i første Kløvningsstadium.

Af Fig. 23 vil man se, at Forgreningen ikke er langt fra at foregaa ved virkelig Kløvning. Nederst til venstre sees Grunden af et Blad, der endnu ingen Akselknop har; derpaa følger til højre et yngre Blad, ved hvilket jeg maa henlede Opmærksomheden paa de usædvanlige Cellerækker, der, næsten som Pleromrækker i en Knop, findes i Grunden af Bladets øvre Halvdel. Efter dette Blad er der i Axen paabegyndt Dannelsen af et tredie Organ (*v*), hvorved Stængelspidsen har antaget sin brede Form. Paa Grund af, at dette Organ anlægges saa dybt inde i Axen, neden for tredie Periblemlag, maa jeg anse det for et Kaulom, en Slyngtraad, hvilket ogsaa Betragtningen af de forudgaaende Dannelser har bestyrket. Midt i Stænglen sees en meget tydelig Pleromrække, foruden nogle mindre regelmæssige til Siderne for den; men for oven har der ved *m* uddannet sig et Par Tvercellerækker, lodrette paa disse Pleromrækker, og aabenbart homologe med dem, vi have set hos Hydrocharideerne. Slyngtraadens Vækstpunkt ligger til venstre herfor, men Hovedstænglens, *P*, ligger egenlig lidt til højre derfor. Heraf maa jeg slutte, at om der end ikke finder en Kløvning Sted, er det dog meget nær derved, og en Deling af Vækstpunktet tør man i alt Fald antage.

I de fleste andre Tilfælde har jeg derimod fundet, at Slyngtraads-Dannelsen foregaar paa samme Maade som Blomsterdannelsen i de fleste Tilfælde i *Cyclantheras* Hanblomsterstand; Axens Midtlinie ender altid i den meget lave kuppelformede Stængelspids, og de nye Kaulomer opstaa tydeligt fjærnede fra Midtlinien.

Paa den anden Side har jeg hos denne Plante ogsaa set Tilfælde, i hvilke Slyngtraaden, som hos *Ampelopsis*, opstaar endnu mere fjærnet fra Vækstpunktet, altsaa endnu tydeligere som Sideknop.

Hos ingen anden Ampelidé har det imidlertid været mig saa vanskeligt at afgjøre, om en given yngste Nydannelse var et Phyllom eller et Kaulom, som her, og der forekommer Tilfælde, hvor et bevisligt Blad anlægges lige saa nær Centrum af Axen, som Slyngtraaden i Fig. 23. Saaledes er den Nydannelse, der i Fig. 21 ligger øverst til venstre, utvivlsomt et Blad, thi f^1 paa den modsatte Side har sin Slyngtraad, v^1, over for sig. Men dette Blad har til sin Basis næsten Halvdelen af hele Stænglens Ende, saa at Stængelspidsen er bleven lidt excentrisk; det synes næsten at opstaa ved en Kløvning af denne. Ved Kløvning af et Organ forudsættes imidlertid nødvendigvis, at de to nydannede Organer ere af samme Natur som det kløvede; et Kaulom kløver sig i to Kaulomer, men ikke i to Phyllomer eller

i Phyllom og Kaulom. Enten maa vi her antage, at Kaulom og Phyllom ere aldeles identiske, eller, at et Blad kan opstaa saa nær Vækstpunktet og af dettes Celler, at det væsenligt indvirker paa Stængelspidsens Form og Retning.

Slyngtraadene frembyde imidlertid ogsaa under deres senere Udvikling meget interessante Sider, navnlig ved deres første Forgrening (ved hvilken det i Regelen bliver staaende); ved denne kunne vi ikke være i Tvivl om, hvad der er Phyllom, og hvad der er Kaulom; thi paa en ung Ranke, som Fig. 22 og 27, ved man altid, at den yderste (nederste) Dannelse (f) er et Blad, de to andre (v—v^1) Slyngtraadsgrene, altsaa Kaulomer. Ved Slyngtraadens Forgrening finder nu Kløvning Sted af en lige saa utvivlsom Natur som hos *Hydrocharis* og *Vallisneria*.

Af den i Fig. 25, afbildede unge Slyngtraad ser man endnu ikke, hvordan Forgreningen vil gaa for sig; men den synes snarere at spaa en Sideknopdannelse end en ægte Kløvning, og v^2, Fig. 21, synes i Virkeligheden ogsaa at forgrene sig ved Sideknopdannelse. Betragter man imidlertid Slyngtraadene Fig. 22, 24 og 27, synes der ingen Tvivl at kunne være om, at en ægte Kløvning finder Sted. Thi Dalen mellem de to Knopper ligger aabenbart i Midtlinien af hele Slyngtraaden, og dennes midterste Pleromrækker løbe i ret Linie lige op mod den, men afbrydes paa samme Maade som hos Hydrocharideerne af de med m mærkede Tvercellerækker, der skille de to nye Vækstpunkter eller Knopper fra hinanden. Af disse er det den nærmest Bladet, f, liggende, der jo udvikler Hovedaxen af sig, hvis Pleromrækker anlægges hurtigst og smukkest. Disse Tilfælde maa jeg uden Betænkning tyde som Kløvning af Vækstpunktet.

Mine Resultater med Hensyn til Forgreningen hos Ampelideerne ere altsaa følgende:

Slyngtraadens Dannelse paa Hovedaxen finder Sted snart ved Kløvning af Vækstpunktet, snart uden at indvirke paa dettes Arbejde, paa Axens Side, uden samtidig Dannelse af Støtteblad. Paa samme Maade forgrener den sig ogsaa. Hos *Ampelopsis* opstaa dens Grene i Regelen som ægte Sideknopper; hos *Vitis vulpina*, hvor det som oftest bliver staaende ved den første Forgrening, er denne i de fleste Tilfælde en Kløvning. Mellem disse to Forgreningsmaader findes alle Overgange, og Kløvning af Vækstpunktet kan derfor ikke opfattes som en Forgreningsmaade, der i noget væsenligt Punkt er forskjellig fra Forgrening ved Sideknopper.

20. Asclepiadeæ.

Asclepiadeernes extraaxillære Blomsterstande have endnu ikke været Gjenstand for Undersøgelse med Hensyn til deres Anlæggelse. Efter Bladstillingsforholdene m. m. blive de almindeligst tolkede som de ved Sideaxernes Magt-Ran til Siden trængte Hovedaxer, og

den hele Stængel, paa hvilken de sidde, som et Sympodium; efter Nogle ere de derimod Akselknopper, som ere forskudte fra et neden for staaende Blads Aksel, og efter Andre, som Clos, dannede ved Kløvning (Se hosstaaende Oversigt).

I. Blomsterstandene ere de til Siden trængte successive Hovedaxer i et Sympodium.
St. Hilaire, Leçons de bot., S. 249—50.
Wydler, Flora, 1851, S. 387; 1857, S. 1; 1860, S. 629.
Hofmeister, Handbuch, I, S. 431.

II. Blomsterstanden er en Gren fra en neden for staaende Bladaksel.
Payer, 1842, Comptes rendus, XV, S. 147—148.
Hochstetter, Flora, 1850, S. 182.

III. Blomsterstanden er en Gren, der er dannet ved Klovning.
Clos, Bull. Soc. bot. Fr. VIII. 1861.

Hvor meget der nu end kan tale for at tyde Forgreningen som en Sympodiedannelse, taler Udviklingshistorien ganske vist imod det.

Jeg har undersøgt *Vincetoxicum nigrum* og forskjellige *Asclepias*-Arter; de stemme fuldkomment overens og behandles derfor her under Et. (Fig. 1—15, **VII**).

Forholdet er klarest, naar den første Blomsterstand danner sig, fordi der siden er en saadan Mængde af Blomsterknopper og unge Blade, at det er meget vanskeligt især paa fine Snit at udfinde, hvor Stængelspidsen er.

Den rent vegetative Stængelspids er meget flad kuppelformet (Fig. 1 og 2, **VII**), og selv senere, naar Blomsterstandsdannelsen er begyndt, er den kun lidet hvælvet (Fig. 5—6, 8, 11—14). Den har to til tre Periblemlag (Fig. 13), neden for hvilke der kommer et stort uordnet Meristem, som først længere nede gaar over i ordnede Pleromrækker; ogsaa her have vi som hos Ampelideerne et ejendommeligt Knudevæv (*n*, Fig. 14 og 13) tvers gjennem Stænglen mellem Bladgrundene, der afbryder Stængelstykkernes Pleromrækker (*i*, Fig. 13).

Betragtet ovenfra er Stængelspidsen noget rektangulær-oval af Form (Fig. 2), idet den altid er mest langstrakt efter den Retning, i hvilken det næste Bladpar anlægges.

I de rent vegetative Blades Aksler blive ingen Knopper synlige (se Fig. 1 og 2), før Bladene allerede have naaet en nogenlunde betydelig Størrelse.

Fig. 3, **VII**, viser os en anden Stængelspids, paa hvilken en Nydannelse, *g*, er kommen til Syne, der er noget mindre end den tilbageblevne Del af Stængelspidsen, *P*. Denne Nydannelse er Anlæget til en Blomsterstand, der senere vil findes staaende mellem Grundene af Bladene *a—a*, men nærmest ved det til højre staaende Blad, over hvis Aksel den tildels rager lidt ind. Den er aabenbart den yngste og højest stillede Nydannelse paa Axen. Akselknopper findes endnu ikke ved Bladene *a—a*.

Fig. 4 viser et lidt mere udviklet Stadium. For det Første er der paa Stængelspidsen, altsaa oven for *g*, fremkommet Anlæg til to nye Blade, $a^1—a^2$, der ikke ere

fuldkommen ens store og derfor næppe fuldkommen ens gamle. Tillige sees, at medens Bladene paa den rent vegetative Stængel staa korsvis modsatte, forandres Stillingen i den florale Region, og de to gjennem de fire Bladrækker lagte Planer skære hinanden under Vinkler, der afvige fra en ret (se Fig. 7 og 9). For det andet har Knoppen, g, nu allerede anlagt sit første Blad, β, der staar som en hælformet Valk paa Grunden af Knoppens udadvendende Side og aabenbart er udviklet paa Knoppen selv. Dets Stilling og Størrelse sees bedst af Fig. 5—6, der give Billeder af den samme Stængel som Fig. 4. Denne Stilling af det første Dækblad i Blomsterstanden har Wydler været opmærksom paa[1], og han ser heri et Bevis for, at Blomsterstanden ikke er en forskudt Akselknop, da den i saa Fald maatte have to sidestillede Forblade.

Fig. 7 viser ganske det Samme som Fig. 4, men dog et lidt fremmeligere Udviklingstrin; de to Blade ere endnu de yngste Organer paa Axen.

I Fig. 8 vil man se en Stængelspids, P, fra Siden og Knoppen, g, med dens Støtteblad, β, foruden de neden for staaende Blade. Knoppen rager op over Stængelspidsen, og Dalen mellem dem ligger som i de tre foregaaende Tilfælde ikke ganske i Axens Midte. En ren Kløvning af Vækstpunktet har altsaa i alt Fald ikke fundet Sted.

I Fig. 9 og 10 er Blomsterstands-Dannelsen langt videre fremskreden. I Fig. 10 ere endnu kun to anlagte, af hvilke den ældste, g^1, der har et stort Dækblad, β, synes at maatte høre sammen med Bladparret b—b; den yngste Blomsterstand, g, er lige i sin Vorden; den er Axens højeste Nydannelse, og Dalen mellem den og den tilbageblivende, i det Hele større, Del af Stængelspidsen synes at ligge i Midtlinien af Axen. Paa samme Maade vil Knoppen g, Fig. 9, der hører til Bladene a—a, (ligesom g^1 til b—b, og g^2 til c—c), gjøre Krav paa saa megen Plads paa Stængelspidsen, at en Kløvning af denne vil blive Følgen. Men i begge Tilfælde vil man se, at de to Kløvningsknopper ikke ere lige kraftige selv i Fødselen. Jeg maa altsaa her antage, at en virkelig Kløvning finder Sted. Lodrette Snit gjennem Stænglen give et meget forskjelligt Billede af Stængelspidsen og Knoppen, efter som Snittet træffer dem paa den ene eller den anden Maade. Naar Snittet gaar gjennem Knoppens og Stængelspidsens Midtlinie, ville de have det Udseende, som Fig. 11—12 viser. Knoppen er lidt højere end Stængelspidsen, P, men Dalen mellem dem ligger, som ved en Kløvning, i Axens Midte.

En histologisk Betragtning af saadanne Snit giver følgende Resultat (Fig. 13, med Oversigtsbilledet Fig. 14, der forestiller et fint Snit gjennem Stængelspidsen, ved hvilken det til højre liggende Parti er skaaret bort; Fig. 13 er stillet noget skævt). Den store uordnede Meristemmasse i Stængelspidsen under de faa Periblemlag har delt sig i to Dele, og, hvad jeg særligt vil fremhæve, paa Grænserne mellem dem sees der, ved m, tydelige Tvercellerækker, som jeg maa anse for homologe med dem, som vi i det Foregaaende gjorde

[1]) Flora 1857, S. 8.

Bekjendtskab med overalt, hvor vi forefandt Kløvning. Jeg maa nu rigtignok bemærke, at regelmæssigere Cellerækker ofte opstaa ogsaa i den øvre Side af almindelige Sideknopper, paa Grænsen mellem dem og Stængelspidsen, naar de altsaa ere de højest paa Axen stillede Nydannelser; for saa vidt ere de ikke et særligt Kjendetegn for Kløvningen. Men ved denne synes de altid at forekomme og ere beliggende i Stænglens Midtlinie.

Jeg maa altsaa slutte, at Blomsterstanden i nogle Tilfælde anlægges som en Sideknop paa Moderaxen (maaske ved Deling af Vækstpunktet), i andre opstaar ved dennes Kløvning, eller med andre Ord: Forholdet er som hos Ampelideerne. At den ikke kan betragtes som Hovedaxen og den anden større Del, Stængelspidsen, som en Akselknop i Forhold til den, er klart nok af hele Udviklingsgangen[1]).

Angaaende Blomsterstandenes Stilling i Forhold til Bladene, kan endnu det Spørgsmaal fremkomme, om de ere stillede nærmest ved det yngste Blad i Parret, eller ved det ældste. Jeg vover ikke at sige noget bestemt herom. Af Fig. 4, 9 og maaske 7 synes det rigtignok, at de staa nærmest ved det yngste Blad (I Fig. 7 er dette næppe betegnet rigtigt).

Blomsterstandens Forgrening har jeg ikke gjort til Gjenstand for særlige Undersøgelser. Jeg kan derfor heller ikke udtale mig med Hensyn til Wydlers og Bravais's[2]) Anskuelser om den. Kun saa meget har jeg set, at Knopper anlægges umiddelbart paa Stængelspidsen. Knoppen g^2, Fig. 15, har saaledes frembragt Bladet n med dets Akselknop m. Denne synes imidlertid at anlægges langt til Siden for Vækstpunktet, paa hvis Arbejde den ikke indvirker. Der finder maaske en Deling, men ingen Kløvning af dette Sted. Paa samme Fig. vil man i g (til højre) gjenkjende en Knop med sit Støtteblad β, der her som alle andre Steder danner en hælformig Valk paa Knopgrunden.

21. Solanaceæ.

De mange Ejendommeligheder i Gren- og Bladstilling (Forskydninger, Svikkeldannelse, «parrede» Blade o. s. v.) hos de til denne Familie hørende Planter ere saa grundigt undersøgte og godt kjendte navnlig ved Wydlers Undersøgelser, at jeg kan indskrænke mig til at henvise til den rige Litteratur, af hvilken den vigtigste Del anføres neden for.

De Candolle, Organogr. vég. I. S. 426.
Bischoff, Lehrb., I, S. 141.

[1]) Cuphea's Blomster have i nogle Tilfælde en Stilling, der meget minder om Blomsterstandenes hos *Asclepiadeerne*. Dog staa de midt mellem Bladene og ere, som Hochstetter og Wydler antage, og som Udviklingshistorien har bekræftet for mig, utvivlsomt Akselknopper for det neden for staaende Blad. Nærmere Undersøgelser af Koehne over disse Forhold kunne snart ventes.

[2]) Ann. des sciences nat., Sér. II, T. VII, p. 321.

L. & A. Bravais, Disposition des inflorescences, Ann. d. sc. nat. Sér. II; T. VII, 1837, og VIII 1838.
Lestiboudois, phyllotaxie anatomique.
Aug. St. Hilaire, 1841, Leçons, S. 248.
Naudin, Comptes rendus, 1842, S. 147, 148, cfr. Flora 1843, S. 151.
Wydler, 1843, Linnæa, Bd. XVII; 1844, Bot. Ztg., S. 689 og 705; 1851, Flora, S. 394 og 408; 1857, Flora, S. 225 (*Solanum nigrum* og beslægtede); 1859, Flora, S. 17 (*Atropa Belladonna*). Berner Mittheil. 1861; 1866, Flora, S. 513 (*Schizanthus*).
Sendtner, Martii Flora Brasil., Solanaceæ, 1846.
Hochstetter, Über Anwachsungen der Blattstiele o. s. v., Flora 1850, S. 177.
Clos, 1855, Bull. Soc. bot. Fr., II, S. 501, III, S. 608, og VIII, S. 11.
Payer, Organogénie, S. 538, og Tab. 132, Fig. 1.
Nägeli, Beiträge zur wissensch. Botanik, I, 1866. Das Mikroskop, S. 604.
Cauvet, «Des Solaneés», Thèse, refereret i Bull. Soc. bot. Fr. XI, 1864, 284, og 1865, XII, S. 164.
Warming, Nogle Bemærkninger om Forgreningsforholdene hos *Scopolia atropoides* og andre Solaneer, Bot. Tidsskr. III Bd., 1868.
Kraus, Sitzungsber. phys.- medic. Societät z. Erlangen, 1870, se Botan. Ztg., 1871, S. 120.

Af de mange udtalte Meninger om Forgreningens Natur er den almindeligste og den, til hvilken ogsaa jeg maa slutte mig (jvfr. Botanisk Tidsskrift, III Bd.), følgende:

1. De «parrede» Blade ere ikke fremkomne ved en «dédoublement» af *et* Blad, men tilhøre hver sin forskjellige Axe.
2. Axerne i den florale Region af Planterne danne Sympodier. Hver Axe i Kjæden har i Regelen to Forblade og en Blomst (eller Blomsterstand).
3. Blomsterstandene eller Blomsterne ere altid endestillede; naar de synes stillede uden Støtteblade paa Siden af en Axe og uden at have noget Blad lige over for sig paa den modsatte Side af Stænglen, er dette Stillingsforhold frembragt ved en Sideaxes Magtran i Forbindelse med Forskydninger.

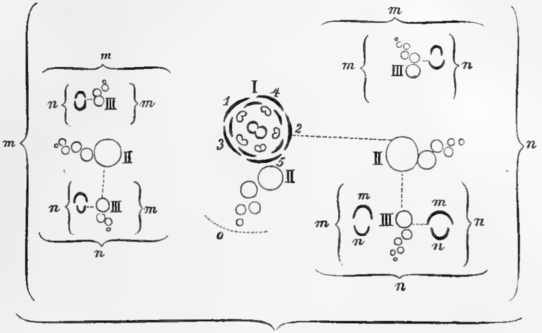
Foruden Payer, Kraus og mig synes Ingen at have undersøgt de tidligste Udviklingstrin; Kraus angiver bestemt Forekomst af «utvetydig Dichotomi» i Blomsterstandene af *Hyoscyamus*, o. fl., ligesom vi naturligvis ogsaa finde denne Antagelse hos Clos.

Jeg har undersøgt Slægterne: *Solanum* (*nigrum* og *Dulcamara*), *Datura* (flere Arter), *Hyoscyamus* (*niger* og *pusillus*), *Scopolia* (*atropoides*), *Anisodus* (*luridus*), *Petunia* (*violacea*), *Lycopersicum* (*esculentum* og *racemiforme* Lge.), *Physalis* o. fl.

Mine Resultater ere følgende.

Skuddene, af hvilke Sympodierne sammensættes, have i de fleste Tilfælde to Forblade, der almindeligst ere Løvblade; de ere paa mine Figurer betegnede m og n eller f^1 og f^2; efter dem følge Blomstens forskjellige Blade under Fortsættelse af den paabegyndte Spiral.

Stillingen af disse Dele i Forhold til Moderaxen og Støttebladene ere for godt bekjendte til, at jeg her skal gaa nærmere ind derpaa; man vil finde den tydeligt fremstillet i Fig. 28 og 29, **VII**, (af *Petunia*) og i hosstaaende Diagram.



Xyl. X. Grundrids af Forgreningen hos *Solanum nigrum.*

Disse med to Forblade forsynede Skud vil man finde afbildede paa mine Tavler, saaledes af *Solanum nigrum*, Fig. 16—19, **VII** og Fig. 3, **VIII**, af *Datura*, Fig. 24—27, **VII**, og af *Hyoscyamus*, Fig. 6, **VIII**. De ere overalt paa deres første Udviklingstrin hverandre saa lige, at de ikke ere til at skjelne fra hverandre.

I nogle Tilfælde udvikles en Knop i hvert af de to Forblades Aksler, dog saaledes, at Knoppen i 1ste Forblads Aksel er den svageste. Vi faa da en gaffeldelt Kvast («Dichasium») (Fig. 25 og 27, **VII**). Men i mange Tilfælde anlægges kun *en* Knop, nemlig i Akselen af 2det Forblad, og herigjennem føres vi over til Svikkelen (Fig. 6, **VIII**, Fig. 28, 29, **VII**, o. fl.). I begge Tilfælde finde «Forskydninger» Sted; i det første Tilfælde «forskydes» baade 1ste og 2det Forblad ud paa den af Akselknoppen udviklede Gren (*Datura*); i andet Tilfælde «forskydes» alene 2det Forblad, medens 1ste bliver siddende, og giver, som jeg (l. c.) har vist hos *Scopolia*, Anledning til det ejendommelige Forhold med de «parrede» Blade, som franske Botanikere have anset for fremkommet ved en «dédoublement» af *et* Blad.

Opgavens Spørgsmaal er nu dette: Dannes Knopperne ved Kløvning af Vækstspidsen, og er denne Kløvning Grunden til Bladenes Forskydning?

Den vegetative Stængels Forgrening. Betragtningen af de rent ydre Former giver følgende. Fig. 17 og 18, **VII**, (*Solanum nigrum*) vise, at en Knop g er opstaaet i 2det Forblads (f^2) Aksel, og 1stes er, i alt Fald paa Fig. 17, endnu tomt. Det samme er Tilfældet med Fig. 28 og 29. Denne Knop, g paa Fig. 17 og III paa Fig. 28, er den øverste Nydannelse paa dens Axe. Men det er tydeligt, at Stængelspidsen har en aldeles overvejende Størrelse, og at Knoppen opstaar paa Siden af den, neden for dens Top. En Kløvning har altsaa ikke

fundet Sted, ja Vækstpunktet er overhovedet ikke blevet delt. Lægges nemlig et Snit gjennem Axen af *Solanum* eller *Datura*, vil man se (Fig. 4, **VIII**), at udprægede Pleromrækker naa højere op end Bladakslerne, og Vækstpunktet maa altsaa ogsaa ligge højere. Knopdannelsen, der allerede antydes til venstre ved, at Akselen er bleven bredere, finder nu Sted lige indenfor denne, og altsaa nødvendigvis neden for Vækstpunktet. Ogsaa et Billede som Fig. 3, **VIII**, viser dette, og andre Præparater have vist nøjagtig det Samme[1]). Knoppen i 2det Forblads Aksel er altsaa en ægte Sideknop.

Hvad Knoppen i 1ste Forblads Aksel angaar, kan der endnu mindre være Tale om, at den skulde opstaa ved Deling af Vækstpunktet, eftersom den først anlægges efter 2det Forblad og dets Knop, undertiden endog efter flere andre højere staaende Organer (Fig. 18 og 19, **VII**; Fig. 3, **VIII**). Ligeledes er det af Fig. 25, **VII**, (*Datura*) klart, at de to Akselknopper ere ægte Sideknopper, naar det erindres, at Bygningen af Stængelspidsen er omtrent som hos *Solanum* med regelmæssige Pleromrækker i Midten, der naa højt op over Bladakslerne, med kun tre—fire Periblemlag og en faacellet Plerom-Initialgruppe[2]).

Da alle de undersøgte Slægter, som alt bemærket, nøje stemme overens i de Billeder, som den vegetative Forgrening frembyder, slutter jeg, at Vækstpunktdeling intet Sted ved denne forekommer. Kun hos *Physalis Alkekengi* synes Kløvning i alt Fald undertiden at fremtræde, idet, hvad Fig. 1, **VIII**, viser, de to Knopper, I, der bliver til Blomst, og II, der fungerer som Akselknop for *n* (2det Forblad), ere lige store.

Mine Resultater stemme altsaa tildels med Kraus's (l. c.), der udtaler: «Monopodial angelegte Sympodien sind die Wickeln der *Echeveria*-Inflorescenz und die vegetativen von *Solanum nigrum* und *Physalis*».

Det er selvfølgelig klart, at Bladforskydningen ikke foraarsages ved nogen Vækstpunktdeling, hvilket Resultat ogsaa stemmer med Kraus's, der omstændeligere omtaler disse Forskydningsforhold; jeg kan om den kun antage, at den er en for Natskyggefamilien ejendommelig Udviklingsmaade fremkaldt ved, at Længdevækst finder Sted ogsaa i det for Akselknoppen og Bladet fælles histologiske Parti, hvis Existens jeg allerede oven for flere Gange har havt Lejlighed til at paapege. Man vil nu ogsaa finde, at dette Parti netop er stærkt udviklet hos Natskyggerne, og at Forbindelsen mellem Blad og Akselknop næsten overalt er betydeligere, end vi have set hos de i det Foregaaende undersøgte Planter (se t. Ex. Fig. 17,

---

[1]) Cfr. Botan. Tidsskr. III Bd., Tab. 2, Fig. 3 og 4 (*Scopolia*).

[2]) Jeg skal her i Forbigaaende gjøre opmærksom paa det Interessante med Hensyn til den histologiske Bygning af Plantestænglen i Almindelighed, at selv en saa bred og flad Stængelspids, som den i Fig. 26 og 27, **VII**, *r*, paa hvilken Kronen og de højere staaende Blomsterblade anlægges, har beholdt sine Periblemlag lige saa skarpt udprægede som den yngre kuppelformede Stængelspids. Under Periblemlagene følger efter et uordentligt Delingsvæv et regelmæssigt Plerom med luftfyldte Celle-Mellemrum.

18, 19, 29, **VII**, og Fig. 3, **VIII**.). Straks ved Knoppens første Fremkomst sees undertiden et noget usædvanligt Forhold, som især har været mig paafaldende hos *Datura* (Fig. 4, **VIII**). Det er, som om Bladet rykkedes ud fra Stænglen ved et indskudt Cellevævsparti, der endnu ikke har hvælvet sig i Vejret, saaledes som Knopperne ellers straks gjøre.

Fra *Datura* med Knopdannelse i oftest begge Forblades Aksler (Fig. 27, **VII**) føres vi gjennem *Solanum nigrum* (Fig. 18, 19, **VII**; 3, **VIII**), hvor der baade findes Tilfælde, i hvilke Knopdannelsen i 1ste Forblads Aksel udebliver, og i hvilke den finder Sted, til *Physalis*, *Petunia* o. s. v., med Knopdannelse i kun det 2det Forblads (Fig. 28—29, **VIII**). Men der er endnu et Par Skridt at gjøre, før vi naa Yderpunkterne. Det næste er, at Skuddene i Sympodiet følge saa rask efter hverandre og trænges saa tæt sammen, idet Forbladene samtidigt mere og mere tabe Løvbladkarakteren og faa Højbladenes Udseende, at det hele Sympodium bliver en virkelig Blomsterstand. *Scopolia* er paa gode Veje dertil[1]), men tager ikke Skridtet helt ud, thi Forbladene ere begge tilstede og beholde Løvbladkarakteren, og Stængelstykkerne ere forlængede (dog kun hvert andet). Anderledes med *Hyoscyamus*. De første Skud i Sympodiet paa en Kimplante ere endnu 2-bladede (Fig. 6, **VIII**), med Knopdannelse alene i 2det Forblads (*n*'s) Aksel; men senere udvikles 1ste Forblad (*m*) aldeles ikke. Forøvrigt fortsættes Udviklingen uforandret; idet Knop hurtigt udvikles af Knop, og idet Spiralerne[2]) i to paa hinanden følgende Skud, ganske som før, altid ere antidrome, fremkommer den ensidigt indrullede Blomsterstand (*cyma scorpioidea* De Cand., «Sviklen») med *en* Række Dækblade (Bladene n eller f^2, eller Forbladene Nr. 2 i det tobladede Skud) paa hver Side. Men saa snart vi faa denne bladbærende Svikkel for os, have vi ogsaa Knopdannelse ved Vækstpunktkløvning. Allerede i Fig. 6, **VIII**, fremtræder denne, skjøndt Dalen mellem de to Knopper, af hvilke I fungerer som Hovedaxe og direkte udvikler en Blomst, medens II fungerer som Akselknop for n, ikke er lige i Midtlinien af det hele Legeme I—II. I Fig. 5, **VIII**, er Kløvningen derimod renere; I er den ældste Blomst; II den næste i Alder; III er en Knop, der fremtræder som Akselknop for Bladet n^2 paa Axen af II. Denne Knop har strakt sig stærkt i lateral Retning og vil paa et næste Trin lade to Knopper fremgaa af sig, der adskilles ved en paa n^2 lodret og midt over III gaaende Dal. Fig. 7 og 9 vise dette; af de to i Fig. 7 tegnede Knopper bliver I til Blomst, II til «Akselknop» for det Blad n^1, der opstaar paa dets Grund, aabenbart først efter, at Kløvningen har taget sin Begyndelse. I Fig. 9 ere IV og V de yngste, ved Kløvning netop anlagte, Knopper.

Det histologiske Billede af Fig. 7 sees i Fig. 8. Hvad her særligt er at fæste Opmærk-

---

[1]) jfr. Warming, Botan. Tidssk. III Bd.

[2]) Spiralerne synes ofte at være modsat af dem, der findes hos de andre Solaneer. Ogsaa er *Hyoscyamus* den eneste Solané, hos hvilken det første Bægerblad ikke staar lige for et Frugtblad (Wydler, Flora, 1859, S. 19).

somheden paa, er de i Midten af den i Kløvning værende Knop liggende Tver-Cellerækker, *m*, der skille de to ved Kløvningen dannede nye Vækstpunkter I og II fra hinanden. Den Virksomhed, ved hvilken disse allerede hæve sig frem over Dalen, ligger tydeligt nok dybt nede, under 3die Periblemlag. Bladet, n^1, derimod skylder nogle (paa dette Præparat ikke ganske tydelige) Celledelinger i 1ste og 2det Periblemlag sin Oprindelse. Saaledes have vi her den utvivlsomste Vækstpunktkløvning.

Endnu et Skridt er tilbage at gjøre, nemlig det at bortkaste ogsaa det 2det Forblad (*n*); og dette Skridt gjøres t. Ex. af *Solanum nigrum* og *Lycopersicum*, hvis Blomsterstande da blive nøgne Svikler.

Fig. 16—19, **VII**, fremstille fire paa hinanden følgende Udviklingstrin af et Skud af *Solanum nigrum*. De to første ere ovenfor gjennemgaaede. I Fig. 18 ere ikke blot Forbladene og 2det Forblads Knop (*g*) anlagte, men en svagt hvælvet Fremragning, II, kommer til Syne paa Siden af Hovedaxen, I (der som sædvanligt bliver til Blomst). Den opstaar ifølge hele Aksens Bygning som en støttebladløs Sideknop. I Fig. 19, paa hvilken begge Forblade ere Støtteblade for Knopper, har den sidst dannede Knop, II, udviklet sig videre, og en ny Knop, III, kommer frem paa dens Side, til højre for den; paa det næste Udviklingstrin vilde en ny Knop, IV, fremkomme til venstre for III, derpaa en ny til højre for IV o. s. v., afvekslende til de to Sider[1]). Derved dannes den støttebladløse Svikkel, hvormed hvert Skud ender, og som ved Forskydninger af forskjellig Art tilsidst sidder ganske alene paa Siden af Stænglerne[2]).

Man ser denne Svikkelens Udvikling hos *Solanum nigrum*, Fig. 20—21, **VII** og Fig. 2, **VIII**, og *Dulcamara*, Fig. 22, **VII**, samt hos *Lycopersicum esculentum* og *racemiforme*, Fig. 23, **VII**. De tilføjede romerske Tal angive de forskjellige Axer. I intet af Tilfældene her kan jeg antage Vækstpunktkløvning. Thi de nye Knopper ere saa smaa i Forhold til den, hvis Søstre de skulde være i Tilfælde af Kløvning, og opstaa saa langt nede paa dens Sider, at den maa betragtes som Moder til dem. Ogsaa har det til Fig. 2, **VIII**, svarende histologiske Billede tydeligt vist, at III var den dominerende Moderaxe for IV, der opstaar under 1ste Periblemlag neden for dens Vækstpunkt[3]).

Resultaterne af mine Undersøgelser over denne Familie ere altsaa disse: ved den sædvanlige Forgrening af de vegetative Stængler ere Knopperne ægte Sideknopper. I den nøgne

---

1) Wydler, Flora, 1857, S. 227.

2) Se mit Diagram, ovenfor S. 93. I et Punkt afviger det fra Wydlers i Flora 1857, Tab. VII, Fig. 2, idet 1ste Bægerblads Stilling er forskjellig fra den, som Wydler giver det og dermed den hele Endeblomst; jeg tror imidlertid, at den af mig angivne er den rigtige; se navnlig Fig. 19, **VII**.

3) I et enkelt Tilfælde fandt jeg dog, at Forgreningen hos *Solanum nigrum* nærmede sig til eller maaske var Kløvning, og muligvis har Kraus oftere fundet saadanne, eftersom han regner denne Svikkel til dem, der ere »dichotomisk anlagte Sympodier«.

svikkelformede Blomsterstand er det samme Tilfældet; i den bladbærende kraftige Svikkel hos *Hyoscyamus* ere de derimod Kløvningsknopper, og Forgreningen en fortsat Kløvning.

22. Crassulaceæ.

Forskydninger af Støttebladet ud paa dets akselstillede Gren forekomme almindeligt i denne Familie sammen med en lignende kvastformig Forgreningsmaade, som vi have gjort Bekjendtskab med hos Solaneerne. Vi kunne da her vente et Bidrag til Løsningen af Spørgsmaalet, om Forskydninger staa i en Aarsagsforbindelse med Vækstpunktkløvning.

Sedum Fabaria (Fig. 1—4, XI). Fig. 3 viser os en Gren af denne Plantes Blomsterstand, der afsluttes af en Blomst og har tre Sideaxer. Til højre sees en Knop med dens Støtteblad i Profil, hvorved det inderlige Forenings-Forhold mellem dem, der ogsaa sees af Fig. 2, træder tydeligt frem; dette Forhold er her fra første Færd af stærkere end hos de fleste foregaaende Planter. I Midten sees en anden Knop med dens Støtteblad en face; denne Knop har en Form, der minder om den unge Kvast hos *Valeriana* (Fig. 23—24, **III**), kun at de to Sidedannelser ere spidsere. Disse vare hist ogsaa Kaulomer, her ere de fortrinsvis Phyllomer eller Phyllom og Kaulom i inderlig Forening. Fig. 1 viser Knopperne paa et videre fremrykket Stadium; Formen af dem er dog væsenlig den samme. Fig. 4 gjengiver et endnu videre Udviklingstrin, og nu sees Akselknopperne at komme til Syne som Udviklinger af Bladets Grund. Histologiske Billeder af dette Forhold har jeg ikke til min Raadighed, men jeg maa antage, at de vilde stemme med dem, vi saa hos *Salix* og *Amorpha*, og at Knoppen virkelig helt eller for sin allerstørste Del opstaar paa Bladet. Om Vækstpunktkløvning er der ikke Tale, da Moderaxen stedse indtager Centrum, og dannes Knoppen i Bladet, er der heller ingen Deling. Idet nu det saaledes dannede Dobbeltorgan vokser i det for dets to Dele fælles basilære Parti, fremkommer den saakaldte «Forskydning».

23. Asperifoliæ.

Den vigtigste Literatur med Hensyn til Forgreningen findes hos følgende:

De Candolle, Organographie, t. I, S. 413 ff.
Bravais, Ann. d. sc. nat., 1837, 2 Sér., T. VII.
St. Hilaire, Morphologie végetale, 1841, S. 320 ff.
Payer, 1842 Comptes rendus, XV, S. 147.
Wydler i Linnæa XVII, 1843 («Über dichotome Verzweigung der Blüthenaxen) og navnlig Flora 1860, S. 673—85.
Döll, Rhein. Flora, 1843; Flora v. Baden, S. 775.
Hofmeister, Handb. I, S. 617, Fig. 191.
Kaufmann, Botan. Ztg. 1869, S. 885, og Nouveaux mémoires de la société impériale des naturalistes de Moscou, XIII. Livr. 3, 1871.
Kraus, Sitzungsber. d. phys.- medic. Societät zu Erlangen, 5 Dec. 1870; aftrykt i Botan. Ztg. 1871, S. 120.

Vi føres inden for Natskyggernes Familie gradvist fra Dichasiet til den svikkelformede Blomsterstand med Dækblade og uden Dækblade. I de Rubladedes Familie kjender jeg ikke saa gradvise Overgange; vi maa her næsten straks begynde med den typisk udviklede, spiralformigt indrullede Svikkel.

Anlæggelsen af Blomsterstandene foregaar paa følgende Maade hos *Caryolopha sempervirens.*

I Fig. 19, VIII, sees Enden af en Stængel, paa hvilken Blad og Knop samtidigt anlægges. Selv den øverste Knop er imidlertid beliggende langt neden for Toppen af den uforandret kegleformede Stængelspids (*P*). Disse Knopper ere Anlæg til Blomsterstande. Ved den nederste gjenfinde vi allerede det Billede, som Kvasten hos *Valeriana* gav os, idet der anlægges to Sideknopper II—II. Men hverken her eller ved Blomsterstandenes Anlæggelse paa Hovedaxen er der altsaa Tale om Knopdannelse ved Vækstpunktets Kløvning.

Paa et noget senere Stadium har Kvasten det Udseende, som Fig. 17 viser. Denne gjengiver et akselstillet Skud fra samme Plante; det er bygget som et Skud af *Atropa* og de fleste andre *Solaneer*, idet der er to Forblade (m—n) og en endestillet Blomst (I), hvis fem Støvdragere allerede ere anlagte; i hvert Forblads Aksel fremkommer en Knop (II), som udvikler sig til Blomst; men denne Knop har kun *et* Forblad, og da Blomsterne ere antidrome, vende Forbladene, der svare til *Solaneernes* 2det Forblad (n^2 og n^2), til samme Side, udad mod det hele Skuds Støtteblad; i Akslerne af n^2—n^2 er allerede en Knop, Axe af 3die Orden (III), kommen til Syne, og idet den udvikler sig paa samme Maade som sin (antidrome) Hovedakse (II), er Svikkelen grundlagt. Knoppen III synes i Størrelse og Stilling at forholde sig saaledes til II, at jeg her ikke kan antage, at nogen Vækstpunktkløvning har fundet Sted. De to unge Svikler ere ulige i Udviklingsgrad, idet den i Akselen af 2det Forblad (n) anlagte er kraftigst. Det samme fremtræder endnu tydeligere paa den Fig. 18 afbildede Blomsterstand, der er en videre Udvikling af Fig. 17.

I Fig. 6, Tav. VIII sees en lignende ganske ung Blomsterstand fra en Bladaksel af *Symphytum.* Den er oprindelig stillet i Bladakselen selv, men forskydes siden højt op paa Moderaxen. Denne unge Blomsterstand har kun de to Dækblade, der ere Støtteblade for de første to Knopper, og fjerner sig derpaa fra *Caryolopha* ved det fuldstændige Ophør af Dækbladdannelse paa de til samme Side som hos denne udviklede Svikler. Paa det tegnede Præparat ere tre Blomster anlagte foruden Blomst I, og af den med V mærkede Cellemasse ville nye fremtræde.

Stillingen af Blomsterbladene er her, som hos *Solaneerne*, ganske den samme, hvad enten Dækbladene findes eller ikke; man kan med god Grund sige, at de i det sidste Tilfælde ere ideelt tilstede og gjøre sig gjældende[1]).

[1]) Man vil paa alle mine Figurer bemærke, at Spiralen og Stillingen af Bægerbladene er *en* og den samme, ja selv i Svikler af helt andre Familier hersker der samme Stillingsforhold af Blomster-

Sviklernes videre Udviklingshistorie har kun været Gjenstand for faa Undersøgelser, navnlig af Kaufmann, hvis Iagttagelser ganske stemme med mine, men ikke ere saa omfattende (l. c.), af Kraus, der hidtil dog kun har givet et sammentrængt Referat (l. c.), og endelig har jeg selv[1]) givet to Billeder af Ender af Svikler, uden iøvrigt at gaa nærmere ind paa Udviklingen. Kaufmann angiver, at Vækstpunktkløvning forekommer i Sviklerne af *Anchusa*, *Myosotis* og *Symphytum*; Kraus det samme for *Omphalodes*, *Anchusa*, *Cerinthe*, *Borrago* og *Hyoscyamus*, men nægter dens Forekomst hos *Myosotis* og *Heliotropium*. Endelig findes ogsaa Angivelser af Svikkeludvikling ved Kløvning i Borragineernes og Hydrophylleernes Familier hos franske Botanikere, saasom Clos[2]), men næsten overalt synes disses Angivelser mere at bero paa en blot Gisning end paa en Undersøgelse af Forholdene i Naturen.

Jeg gjennemgaar først den dækbladbærende Svikkel, hos Slægterne *Cerinthe*, *Caryolopha*, *Anchusa*, *Asperugo*, *Lithospermum*, *Nonnea* og *Borrago*. Af mit oprindelig store Antal Figurer findes nogle gjengivne paa Tav. VIII.

I Fig. 10 er Enden af en Svikkel af *Cerinthe gymnandra* afbildet, set ovenfra. De to yngste Knopper, III og IV, ere omtrent lige store og adskilte ved en yderst svag Dal, som gaar midt over den Cellemasse, som de tilsammentagne danne, og staar lodret paa Bladet n^2. Her finder i Virkeligheden en ægte Kløvning Sted, ved hvilken imidlertid de to i Anlæg lige store Tvillingknopper senere forholde sig aldeles forskjellige. Den ene (III) udvikler umiddelbart Bægerblade og danner en Blomst; den anden (IV) anlægger et Dækblad (n^3, Fig. 12 og 13) paa sin Side, modsat Knop III, strækker sig dernæst paa tvers, parallelt med dette Dækblad, for atter at kløve sig ved et Plan, som staar lodret paa det og paa det foregaaende. Paa samme Maade dannede III og IV tilsammentagne før Kløvningen en Søsterknop til II. Der finder saaledes en fortsat Række af Kløvninger Sted, hvis Planer staa lodrette paa hinanden, og da den til Blomst udviklede Kløvningsknop afvekslende ligger til højre og til venstre for det støttende Blads Medianlinie, er Blomsternes Stilling i 2 vekslende Rækker eller i en Zigzaglinie en nødvendig Følge.

---

dækket; sammenlign t. Ex. Fig. 27, VIII (*Tiaridium*) og Fig. 86 i min Afhandling: «Er Koppen hos Vortemælken» etc. (*Symphytum*) med Fig. 15 (*Helianthemum*) eller Fig. 22 (*Cosmanthus*) eller Fig. 8 (*Phacelia*), VIII, eller Fig. 28, VII (*Petunia*). Naar Sviklerne betragtes ovenfra og Spidsen vender nedad, som paa Figurerne, gaar Spiralen i den venstre Blomsterrække altid til højre, i den højre altid til venstre. Undtagelser herfra har jeg kun fundet hos *Myosotis* og *Hyoscyamus*. Men forøvrigt ere disse Forhold saa grundigt og omfattende studerede, navnlig af Wydler, at det er overflødigt her at repetere dem, og jeg henviser derfor til den anførte Literatur.

[1]) Min Disputats, se Videnskabel. Meddelelser 1870, Fig. 86—87.

[2]) 1855, Bull. II, S. 500, III, 1861, S. 14, og andre Steder.

Betragtes en Knop, som er i Kløvning, «en face», vil den give det Billede, som Fig. 11—13 frembyde. I Fig. 11 er Kløvningen næppe begyndt, men allerede er der (nederst til venstre) Spor til Dannelsen af det Dækblad, der senere fungerer som Støtteblad for den ene Knop. I Fig. 12—13 er Kløvningen fuldbyrdet, og Dækbladet, n^3, stort. Dalen mellem de to Knopper ligger i Midten af den gamle Axes Vækstpunkt, og det er for mig Kjendetegnet paa, at en ægte Vækstpunktkløvning har fundet Sted.

Hvad vi her have set hos *Cerinthe gymnandra*, gjenfinde vi hos *Cerinthe major* og *retorta*, hos *Caryolopha sempervirens*, *Asperugo procumbens*, *Lithospermum officinale*, *Anchusa*, *Nonnea*, *Borrago* (Fig. 14), o. s. v.

Til Vurderingen af denne Kløvnings Betydning faa vi et Bidrag ved Fig. 17—18 og 20 af *Caryolopha*.

Vi standsede oven for ved Grundlæggelsen af dennes Dobbelt-Svikkel; herved fandt der næppe nogen Kløvning Sted. Men under Sviklens videre Udvikling er dette oftest Tilfældet, som i Fig. 18, hvor Knoppen IV, til højre, i Akselen af n^3, endnu ikke har kløvet sig, men er i Stadiet lige forud, medens den, samme Orden indtagende Knop, paa venstre Side allerede er delt i to lige store Vorter, IV og V, og allerede ved n^4 har første Spor til Dækbladet, der bliver Støtteblad for V.

Dog ikke altid synes Forgreningen at foregaa ved en Kløvning. Fig. 20 viser saaledes et Parti af en anden Svikkel af samme Plante. Knop III er saa meget mindre end II, at den kun kan antages at lægge Beslag paa en mindre Del af den ukløvede Knops Væv, og Delingsplanet gaar ikke gjennem Midtaxen. Man ser altsaa, at Ulighed i Størrelse kan opstaa mellem de to Kløvningsknopper, og at vi derved langsomt glide over i almindelig Sideknopdannelse paa Stængelspidsen. Vi faa altsaa her et nyt Bevis for det, som *Hydrocharis*, *Ampelideerne* og *Cucurbitaceerne* have lært os: der er ingen Væsensforskjel mellem Knopdannelse ved lige eller ulige Deling af Vækstpunktet og den ægte Sideknopdannelse paa Stængelspidsen tæt til Siden af Vækstpunktet eller langt neden for den, og disse Forgreningsmaader gaa over i hverandre.

Men hele denne Udviklingshistorie hviler paa Betragtningen af de rent ydre Former; en saadan Udviklingshistorie er det meget let at give; thi det at skære den yderste Spids af en Svikkel og betragte den i paafaldende Lys, er et Arbejde, som hverken kræver nogen videre Øvelse eller Erfaring, eller frembyder nogen særlig Vanskelighed; men Videnskaben kan efter sit Standpunkt fordre den histologiske Udviklingshistorie. Jeg har forsøgt at give denne, men Vanskelighederne, der stille sig i Vejen herved, ere langt større ved alle Svikler end paa de fleste andre Blomsterstande; thi paa Grund af Svikkelendens Indrulning, Knoppernes Stilling i en Zigzaglinie, og de Deles Ubetydelighed, gjennem hvilke Snittene skulle lægges, er det yderst vanskeligt at faa et brugbart Snit. Det er let at lægge lod-

rette Snit gjennem hele Svikkelen i dens Indrulningsplan eller gjøre Tversnit af den, men det Snit, der alene kan vise noget, skal for det første lægges skævt over det Plan, i hvilket Svikkelen kan tænkes nedlagt, naar den rulles ud, og for det andet efter et, af Indrulningens Styrke afhængigt, hældende Plan.

Hvad jeg har af histologiske Undersøgelser, er følgende.

Ved lodrette Snit gjennem Svikkelspidsen, parallele med det Plan, i hvilket den er indrullet («Indrulningsplanet»), eller i hvilken som helst anden Retning, ser man altid 2—3 skarpt adskilte Periblemlag kappeformigt løbe hen over alle Knopper og Stængelspidser. Snittet af *Borrago officinalis* Fig. 14 falder næsten sammen med det nys beskrevne «Normalsnit» lodret gjennem Midten af de to Kløvningsknopper (I og II) og det tilhørende Dækblad (n^1); man vil se 3—4 Periblemlag dække Knopperne (men afbrydes ved Bladet, fordi dette som sædvanligt anlægges i de yderste Periblemlag); Pleromrækkerne ere tydelige og deres Initialgrupper skarpt udprægede; de to Vækstpunkters Beliggenhed er altsaa nøje bestemt. Tydeligt var det derimod ikke og kunde det heller ikke være paa Grund af Sviklens Indrulning og Pleromets dermed følgende Krumning, om der, ligesom hos *Hydrocharis*, *Vallisneria* og *Vitis* findes Pleromrækker, der styre lige mod Bugten mellem I og II, hvor man jo maatte antage det gamle Vækstpunkts Beliggenhed. Hvad der derimod meget tydeligt saaes paa denne Figur saa vel som paa alle lignende Snit, var det, at der i Dalen mellem de to Søster-Vækstpunkter, i den gamle Knops Midtlinie, fandtes flere Periblemrækker (Tverrækker af Celler) (m) end til Siderne derfor — det samme Forhold altsaa, som vi have fundet andre Steder, hvor Vækstpunktkløvning forekommer (*Asclepias*, *Ampelideerne*, *Hydrocharis*, *Vallisneria* og *Hyoscyamus* (Fig. 7—8, **VIII**).

I den Omstændighed, at disse Cellelag uddanne sig i Midtlinien af den Knop, der kløves, maa jeg se et Tegn paa, at det er en ægte Kløvning, der finder Sted; thi disse Cellerækker betegne efter min Opfattelse nærmest, at Længdevæksten paa dette Sted er hørt op, at der dèr er et «dødt» Punkt mellem to nye Centra for en livlig Vækst.

Jeg tror, at det saaledes saavel ved de ydre Former af Knopperne som ved den histologiske Bygning er bevist saa godt, som det er muligt, at Kløvning af Vækstpunktet virkelig forekommer efter den af mig i 1ste Afsnit givne Begrebsbestemmelse. Med mine Resultater stemme Kraus's fuldkomment overens: «unzweideutige Dichotomie findet bei den beblätterten Wickeln statt».

Hvad Bladdannelsen angaar, skal jeg endnu bemærke følgende. Paa de vegetative Skud hos *Solaneerne* opstod Støttebladet før Knoppen i dets Aksel (se t. Ex. Fig. 16, 17, 24, **VII**); hvor denne «Akselknop» derimod er en Kløvningsknop, opstaar det sikkert i meget faa Tilfælde før, i mange vistnok omtrent samtidigt med, at Kløvningen begynder, og i andre, maaske de fleste, en Smule efter at Knoppen, der vil kløve sig, har begyndt at brede sig

ud (se t. Ex. Fig. 7—14, VIII). Dækbladet i Sviklerne anlægges paa sædvanlig Vis (Fig. 8 og 14, VIII) straks neden for Dermatogenet i de alleryderste Periblemlag.

Svikler uden Dækblade. Saadanne har jeg undersøgt hos *Myosotis*, *Symphytum*, *Omphalodes*, *Héliotropium* og *Tiaridium.*

Fig. 16, VIII, (*Symphytum*) blev allerede ovenfor tildels forklaret. Ogsaa her finder utvivlsomt Kløvning Sted. Betragtes Knop IV og V (Kvastens venstre Side), vil man se, at de omtrent ere lige store, og Dalen mellem dem ligger i Midtlinien af den Cellemasse, som de tilsammen danne. Paa højre Side er der mere Forskjel, og her er den nedre Knop, V, større end IV, et Forhold, der maaske dog bør opfattes som hidført ved, at V er i Færd med at gjøre de første Skridt til Kløvningen, idet den tager til i Volumen i en Retning lodret paa Delingsplanet. Paa samme Maade vil man af Fig. 86, Tav. III, i min Afhandling om Vortemælken se, at V og VI ere Kløvningsknopper, og at VI allerede er i Færd med at dele sig igjen.

Den eneste Forskjel mellem denne Svikkel og den bladbærende er Dækbladenes Tilstedeværelse eller Mangel. Men i den sidste Svikkel forekommer der, som det synes, altid Kløvnings-Forgrening; i den bladløse er dette ikke altid Tilfældet.

Paa den ene Side saa vi nemlig ovenfor, at i de svage og faablomstrede Blomsterstande hos *Solanum nigrum*, *Lycopersicum* o. s. v. anlagdes Blomsterne som ægte Sideknopper. Det samme findes hos Borragineerne. Selv hos *Symphytum* kan man undertiden træffe Tilfælde (som det synes navnlig i svagere Svikler), i hvilke den Knop, der bliver til Blomst, er saa meget kraftigere end den anden, at en ægte Kløvning ikke kan antages. Hos *Myosotis*, *Omphalodes* og *Heliotropium* er Forgrening ved Kløvning vel det almindeligste, men undertiden nærmer den sig dog meget til Sideforgreningen.

Paa den anden Side slaar Forgreningen over i en Pseudo-Sideknopdannelse, idet den Cellemasse, som skjuler de kommende Generationer i sig, eller den Knop af de to Kløvningsknopper, som skal forgrene sig videre, anlægges i den Grad kraftig, at de anlagte Blomster optræde som smaa Sideknopper i Forhold til den. Forgreningen faar da et Udseende, som om en kraftig spiralformig indrullet Stængel paa sin ene, udvendige, Side langt neden for sin Top anlægger to Rækker smaa Blomsterknopper. Allerede hos *Symphytum* kan der findes Tilløb hertil; men det smukkeste Exempel derpaa har jeg fundet hos *Tiaridium indicum.* Den rigblomstrede lange Svikkel, der foroven ruller sig spiralformigt ind (Fig. 28, VIII), har en Spids som *P*, Fig. 27 (og Fig. 28). I en Zigzagrække sees de 7 yngste Blomster hen ad Overfladen af den tykke indrullede Stængel. Den yngste Blomst VII, træder netop frem som en yderst svag kredsrund Vorte, der i Volumen staar mange Gange tilbage for Stængelspidsen, hvilken man dog efter Analogien med alle andre Svikler maatte betragte som dens Datter eller Søster. Det er, som om de i denne ideelt til-

stedeværende ufødte Slægter, i en ubændig Trang til at komme til at udvikle sig, saa at sige næsten ile for ud for deres Fædre.

Langt mere slaaende fremtræder det mærkelige i denne pseudo-monopodiale Forgrening, naar man lægger Længdesnit lodret gjennem Svikkelen. Hvad den indre Bygning af de bladløse Svikler overhovedet angaar, finde vi den fuldstændigste Overensstemmelse med de bladbærende. Overalt overtrækker et Dermatogenlag og 1—2—3 skarpe Periblemlag alle yngre og ældre Knopper som *et* kontinuerligt Lag (et Bevis paa, at Dækbladdannelsen fuldstændig er ophørt). Fig. 24, **VIII** (*Symphytum orientale*), viser et saadant Snit lodret (d. e. parallelt med Indrulningsplanet) gjennem Svikkelen. Skjøndt det naturligvis ikke har kunnet træffe mere end *en* Knoprække nøje gjennem Midten, faar man dog Indtrykket af en Kløvning af Stængelspidsen. Den ene Knop, g, er langt regelmæssigere i sin Bygning end den anden, P, og man ser, hvorledes Pleromet bøjer opad i den; den anden, der ikke er skaaret midt igjennem, er mindre regelmæssig navnlig i sin indre Del; men hvad der bestemt træder frem, er de Tver-Cellerækker, der have dannet sig inden for Dalen mellem Knopperne og netop i Midten af den indrullede Svikkelaxe.

Af den i Fig. 27 tegnede Svikkel af *Tiaridium indicum* haves to Længdesnit i Fig. 25—26. I Fig. 25 sees tilsyneladende en kraftig Stængel med en storcellet Marv, hvis Cellemellemrum ere luftfyldte, hvis Pleromінitialer nøje kunne paapeges; den krummer sig aabenbart nedad i en paafaldende Overensstemmelse med *Utricularias* bispestavformigt indrullede Stængel, og i dens Rygsides 2det og 3die Periblemlag opstaa de i Forhold til Stængelspidsen (P) højst ubetydelige Blomsterknopper, paa samme Maade som de lignende Knopper hos *Compositæ*, *Cruciferæ* etc. Paa Fig. 26, der er et andet Snit af den selv samme Blomsterstand, vil dette maaske fremtræde endnu tydeligere, fordi Snittet har truffet Midten af den alleryngste Blomst, g, der netop er bleven synlig som en ren ubetydelig Vorte paa Stænglen og ikke engang er grundlagt ved nogen paavislig tangential Celledeling. Her at betragte g og P som to Søsterknopper, opstaaede ved lige Deling af en fælles Moder, er dog en Umulighed. P er Moderen, g er Datteren. For den umiddelbare Betragtning er det en lige saa ægte monopodial Forgrening som hos *Utricularia*; men for den Betragtning, der har Sviklen og dens Udvikling hos de andre Asperifoliæ i frisk Minde, er det en pseudomonopodial Forgrening, — en dichotomisk Forgrening, der ved den ene Sides fremskyndede og paafaldende kraftige Udvikling slaar over i et Pseudomonopodium.

Sammenfatter jeg nu mine Resultater med Hensyn til Forgreningsmaaden hos *Solaneerne* og *Borragineerne*, ere de følgende:

Saalænge de enkelte Axer i Sympodierne bevare en større Selvstændighed og navnlig Præget af vegetative Skud med Løvblade som Forblade (*Atropa*, *Anisodus*, *Datura*, *Petunia*,

de vegetative Skud hos *Solanum*), finder ingen Kløvningsknopdannelse Sted, og Knopdannelsen berører ikke engang Vækstpunktets periferiske Celler.

Jo raskere Udviklingen gaar og de enkelte Skud ligesom underordnes *en* Villie, hvis Maal er Dannelsen af en (svikkelformet) Blomsterstand, i hvilken Forbladene indskrænkes i Antal og tillige antage Dækbladnaturen, desto hyppigere anlægges Knoppen med samme Styrke som sin Moderaxe, eller med andre Ord, desto mere af Moderens Væv lægger den Beslag paa til eget Brug, Forskjellen mellem dem forsvinder, de blive jævnbyrdige Søsterknopper, dannede ved Kløvning af samme Akse. De med Dækblade forsynede Svikler dannes næsten alle ved gjentagen Kløvning af Vækstpunktet (*Hyoscyamus*, forskjellige *Borragineer*), hvori jeg altsaa ganske stemmer med Kraus. Af de Svikler, der mangle Dækblade, anlægges nogles Knopper som Sideknopper, naar den hele Svikkel nemlig er svag og langsom i sin Udvikling (vist især hvor den er faablomstret og Væksten hurtigt afsluttes, som hos *Solanum nigrum*); andres, i hvilke Knopdannelsen foregaar med større Kraft, derimod ved Kløvning; og i meget kraftige rigtblomstrende Svikler (*Symphytum*, *Tiaridium*) fremskyndes Udviklingen af Sideaxerne i den Grad, at den hele Svikkels Udvikling kommer til at ligne Udviklingen af en bispestavformet indrullet monopodial Stængel, hvis Blomster fremtræde som Sideaxer paa en kegleformet Stængelspids, der dog i Virkeligheden maa betragtes som en Sideaxe eller en hel Generationsrække af Sideaxer i Forhold til den sidst fremtraadte Blomst som Hovedaxe.

Dette sidste Fænomen har sin store almindelige Interesse, thi det viser Betydningen af den sammenlignende Morfologi og hvilke Skær, der kan findes, paa hvilke selv den histologiske Udviklingshistorie kan strande, naar den lader den komparative Methode ude af Betragtning. Det bringer os tillige til at kaste et Blik tilbage paa Vinranken, og med Tvivl spørge: Var det ikke muligt, at den oven for et ungt Slyngtraadsanlæg værende Stængelspids egenlig var en Sideaxe eller et Komplex af Sideaxer, og Slyngtraaden den ægte Hovedaxe? Ja, var der andet, som talte for denne Forklaringsmaade, havde man en Udviklingsgang, som den foregaaende hos de to Familier, til Udgangspunkt, var Hovedaxen indrullet i Stedet for ret, — kunde man have Grund til at tvivle; men slige Grunde er der i mine Øjne ikke.

Med Hensyn til Udviklingshistorien af de bladløse Svikler, stemmer jeg ogsaa i det Væsentlige med Kraus. Vel betragter han de kraftigt voksende Svikler hos *Heliotropium* og *Myosotis* som Monopodier, medens jeg nærmest har fundet dichotomisk anlagte Sympodier; og vel benævner han Sviklerne hos *Omphalodes* og *Solanum nigrum* «dichotomisk anlagte Sympodier», medens jeg hyppigere har fundet Sideforgrening; men han tilføjer, at de svage Svikler hos hine første muligvis udvikle sig dichotomisk, og at man ogsaa i mange Tilfælde kan være i Tvivl, om Knopperne hos de sidste ikke anlægges som Sideknopper. I Grunden vil der være Overensstemmelse mellem os, da disse forskjellige Udviklingsmaader,

saavidt jeg kan forstaa Kraus, ogsaa af ham antages at staa i Forbindelse med Svikkelens kraftigere eller langsommere Udvikling, og derfor kunne gaa over i hverandre. Hvis denne Antagelse er rigtig, er det let at forstaa, at der kan fremkomme Uoverensstemmelser i vore Angivelser, efter som vi have havt kraftige eller svage Blomsterstande for os.

24. Hydrophyllaceæ.

Jeg har undersøgt de nøgne svikkelformede Blomsterstande af *Phacelia*, *Cosmanthus*, *Whitlavia*. De stemme med Asperifoliernes, hvad Fig. 21—22, **VIII**, (*Cosmanthus viscidus*) og Fig. 23 (*Phacelia tanacetifolia*) ville vise, i Henseende til Bladstilling og Udvikling. Med Hensyn til Fremkomsten af Bægerbladene er at mærke, at de to første hos *Phacelia* s^1 og s^2) komme temmelig længe før og ile betydeligt forud for de efterfølgende. Knopdannelsen sker ved Kløvning af Vækstpunktet, i alt Fald i nogle Tilfælde, som i Fig. 23, hvor IV og V ere Søster-Kløvningsknopper. Det samme synes at være Tilfældet med III og IV paa Fig. 21, hvorimod IV paa Fig. 22 maaske snarest er en Sideknop paa III og ligeledes selv synes i Færd med at anlægge en Sideknop.

25. Cistaceæ.

Helianthemum vulgare (Fig. 15, **VIII**). I den med Støtteblade forsynede Svikkel finder Kløvning Sted. Knop III og IV ere Tvillingknopper, dannede ved Kløvning af et fælles Anlæg, der atter var Søster til II etc. Bladstillingen og alle andre Forhold ere ganske som hos *Asperifoliæ*.

26. Saxifragaceæ.

Saxifraga crassifolia. Blomsterstanden er sammensat af støttebladløse Svikler og Dobbeltsvikler, der anlægges allerede i August, medens Blomstringen først finder Sted det næste Aar. Anlæggelsen af nye Blomster gaar langsomt for sig, og Knoppen træder ved sin Fødsel frem som en lille svagt hvælvet Vorte paa Siden af den langt større ældre Knop, der direkte omformer sig til Blomst. Sviklerne ere altsaa monopodialt anlagte ganske som Solaneernes, der ere aftegnede i Fig. 19—23, **VII**. Naar de ligeledes støttebladløse Svikler hos de nævnte Hydrophylleer derimod anlægges dichotomisk, da staar denne Forskjel i Udviklingen ganske bestemt i Forbindelse med den forskjellige Styrke og Blomsterrigdom, som de forskjellige Svikler have. Hydrophylleernes ere tæt- og mangeblomstrede, *Saxifragas* og Solaneernes mindre rigtblomstrende og have i det Hele en mindre livlig Vækst.

27. Euphorbiaceæ.

Ricinus americanus (Fig. 32—34, Tab. XI).

Hvad jeg vil bemærke om denne Plante, gjælder ikke Kaulomernes Forgrening, men Støvdragernes. Det har nemlig sin Interesse ogsaa at undersøge Udviklingen af dichotomisk delte Blade. Payer[1]) beskriver Udviklingen og afbilder de sammensatte Støvdragere hos *Ricinus*, men udtaler sig ikke bestemt om, hvorvidt der ved disses Forgrening finder nogen Kløvning Sted eller ikke. Dog maa man af hans Billeder nærmest slutte, at en saadan forekommer, og Sachs[2]) drager ogsaa denne Slutning: «Aus frühzeitig eintretender Dichotomie und theilweise selbst Polytomie scheint nach Payer die vielfache Verzweigung der Staubblätter in den männlichen Blüthen von Ricinus hervorzugehen». Da han støtter sig paa Payers Tegninger, og disse kun give os Forgreningens ydre Fremtoninger, turde det være heldigt her at fremstille det histologiske Billede af den.

Blomsterbunden har under et Dermatogen- og *et* Periblemlag et uordnet Meristem. Naar en Støvdrager-Vorte anlægges, sker det ved Celledelinger i de yderste Partier af dette sidste, hvad man vil se af Fig. 33, der er en af de umiddelbart paa Blomsterbunden staaende Vorter. Denne Vorte er allerede i Færd med at forgrene sig, hvilket fremgaar af den flade eller lidt indbugtede Form, som den har paa sin Top, og som den oprindeligt ikke havde; *m* betegner Midten af den. Hvad enten vi betragte denne Vorte nu eller paa et lidt senere Stadium eller en hvilken som helst Forgrening af en ældre Støvdrager, ville vi finde utvivlsom Kløvning. I Fig. 34 er saaledes en Del af en Støvdrager afbildet, hvis venstre Partis Midte ikke ligger nøje i Snittets Plan. I det højre sees til begge Sider for *m* to Cellerækker foruden det sædvanlige Periblem- og Dermatogenlag; *m* ligger i Midtlinien af den hele Støvdragergren, og de to nye Grene opstaa til Siderne for den, idet Udviklingen ved Dannelsen af nye Celler udgaar i to fra *m* divergerende Retninger, hvad Delingsvæggens Stillinger angive. Paa samme Maade indtage Linierne *m* og *m* aldeles nøjagtigt Midten af de to Støvdragergrene i Fig. 32, af hvilke den ene (*a—b*) har kløvet sig, og den anden (*c—d*) er i Færd med det, og disse to Linier ende for oven netop i Dalen mellem Grenene. Jeg tror, at disse Forhold give gyldigt Bevis for, at en Kløvning af Bladet virkelig finder Sted.

De tre Figurer ville fremdeles fuldkommen svare til den Beskrivelse, som Hegelmaier giver[3]) af den første Forgrening af Bladene hos *Ceratophyllum demersum*, der efter ham ogsaa er «Gabelung».

Euphorbia (Tab. IX, Tab. X, Fig. 1—24; Tab. XI, Fig. 17—19).

En Undersøgelse af Knopdannelsen i Vortemælkens Blomsterkop kan paa en særdeles

---

[1]) Organogénie de la fleur, S. 525, Tab. 108.
[2]) Lehrbuch, 1870, S. 159.
[3]) Botan. Ztg. 1871, S. 501—2.

smuk Maade danne en Afslutning paa de Undersøgelser, som vi i det foregaaende have anstillet. Vi finde her den midtpunktsøgende Blomsterstand, som vi have lært den at kjende hos Korsblomster, Kurvblomster, Ærteblomster og mange andre, forenet med den kvastformede og med Svikkelen, som vi have undersøgt hos Natskygger og Rubladede o. s. v., og dertil en Blomsterstand af en saa ejendommelig hæmmet Natur som «Koppen».

De ydre Fænomer ved Udviklingen af denne Blomsterstand har jeg skildret i min Afhandling: «Er Koppen hos Vortemælken (*Euphorbia* L.) en Blomst eller en Blomsterstand?». Jeg har af den Grund her særlig henvendt min Opmærksomhed paa dens histologiske Bygning og Udvikling, for muligvis derigjennem at faa flere Momenter til Afgjørelsen af det vanskelige morfologiske Spørgsmaal om Koppens Natur, og jeg har navnlig undersøgt følgende to Arter: *Euphorbia Cyparissias* og *E. trigonocarpa* (syn. *E. pilosa* var. *trigonocarpa*), som begge høre til dem, der have «umbella multiradiata», hvis Hovedstængel altsaa frembringer et stort Antal Kvaste af 1ste Orden.

Jeg giver først Resultaterne af disse Undersøgelser, senere skulle vi paa Grundlag af dem og det øvrige for Haanden værende Materiale anstille nogle Betragtninger over Koppens Natur. —

Da Literaturen siden Nyaar 1871 er bleven forøget med nogle nye Bidrag, der for en Del ere fremkaldte ved min Afhandling, forudskikkes her en ny Sammenstilling af den hele *Euphorbia*-Literatur, den vigtigste ældre saavel som den nyere, idet jeg for øvrigt henviser til min Disputats.

A. Den Linné'iske Opfattelse.

Linné, Genera plantarum etc.
Payer, 1857, Traité d'organogénie comparée de la fleur.
Baillon, 1858, Étude générale du groupe des Euphorbiacées.
— Adansonia. vol. I. S. 291—97.

Hieronymus (Botan. Ztg. 1872, Nr. 11—13) maa nærmest anføres her, men betragter dog Spørgsmaalet som uafgjort.

B. Den Brownske Opfattelse.

Lamarck, 1789. Encyclopédie méthodique, t. II. S. 413. Spørger tvivlende, om Koppen ikke er en Blomsterstand.
Ant. Laur. de Jussieu, 1789, Genera plantarum secundum ordines naturales disposita. Samme Standpunkt som Lamarck.
Rob. Brown, 1814. Flinders's Voyage to Terra Australis, General Remarks, vol. II, S. 556.
— 1818. Tuckey's Expedition to the river Zaire, S. 444.
— 1818. Transactions of the Linnean Society, XII, S. 99.
Adrian de Jussieu, 1823. Mémoires du Museum, X, S. 317.
— 1824. De Euphorbiacearum generibus medicisque earundem viridibus tentamen.
Johannes Roeper, 1824. Enumeratio Euphorbiarum quæ in Germania et Pannonia gignuntur.

A. P. de Candolle, 1829. Organographie végétale.
H. Wydler, 1843, Linnæa XVII, S. 409.
— 1845, Flora, S. 452—54.
— 1851, Flora, S. 289 sq.
Al. Braun, 1853, Abhandlungen der Königl. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, »Das Individuum«, S. 101, Tab. V, Fig. 1.
Roeper, 1860, Vorgefasste botanische Meinungen.
Klotsch og Garcke, 1860, Linné's natürliche Pflanzenklasse Tricoccæ.
Wydler, 1861, Berner Mittheilungen, Nr. 553.
Planchon, 1861, Bull. de la Soc. bot. de France, VIII, S. 29.
Budde, 1864, De Euphorbiæ Helioscopiæ L. floris evolutione.
Boissier et Müller (Argov.), 1866, De Candolles Prodromus, XV, 2, 1.
Warming, 1870, Flora, Nr. 25.
— 1871, Videnskabelige Meddelelser fra den Naturhistoriske Forening i Kjøbenhavn (»Er Koppen hos Vortemælken etc.«).
Schmitz, 1871, Flora, Nr. 27 og 28.
Joh. Müller, 1872, Flora, Nr. 5.
Celakowsky, 1872, Flora, Nr. 10.
Ernst, 1872, Flora, Nr. 14.
Joh. Müller, Euphorbiaceæ in Martii »Flora Brasiliensi«.

Den rent vegetative Stængelspids (Fig. 1—2, **IX**) har en lavere og noget fladere Kegleform end den, paa hvilken der anlægges Knopper til Kvaste eller Hanblomstgrupper (Fig. 3, 13, 15, **IX**). Den har en meget regelmæssig Bygning med flere (3—7) skarpt begrænsede Periblemlag. Under dem følge regelmæssige Pleromrækker, der foroven ende i en faacellet Initialgruppe (*i*, Fig. 2). I enkelte Tilfælde er Regelmæssigheden saa stor, og fremtræder der blandt Pleromintialerne en Celle af en saadan Form, at man næsten kunde forledes til at antage Existensen af en Pleromtopcelle med en Delingsmaade som Kryptogamernes Topcellers (*i*, Fig. 4, **IX**, og tillige Fig. 13, der er en floral Stængelspids).

Bladene dannes ved alsidige Celledelinger i de yderste Periblemlag, t. Ex. som i Fig. 2 og 9, **IX**, i 1ste, 2det og 3die. Knopperne anlægges i denne (den vegetative) Region længe efter Bladene, hvorfor man hverken paa Fig. 1 eller 2 vil se Spor til dem.

Saasnart Stænglen begynder Dannelsen af Knopper til Blomsterstandene, bliver Stængelspidsen stejlere, og da Knopperne tillige anlægges straks efter deres Støtteblade eller samtidigt med dem (Fig. 3, 8, **IX**, og Fig. 2—7 og 72 i min Disputats), er det Tilfælde altsaa almindeligt, at en Knop er den øverste Nydannelse paa Axen. I Følge Stænglens Bygning (der er skizzeret i Fig. 3) kan der imidlertid ingen Deling af Vækstpunktet finde Sted, thi dette sees beliggende aldeles uberørt af Knopdannelsen oven for denne.

Der forefindes altsaa hos *Euphorbia* den samme Modsætning mellem den vegetative og florale Region paa Stænglen som alle andre Steder med Hensyn til Knoppernes og deres Støtteblades gjensidige Forhold.

Det er bekjendt, at Hovedstænglen (som alle følgende Axer) afsluttes med en Kop.

Overgangen til denne fra de neden for staaende Epiblastemer sees af Fig. 8, **IX** og af Fig. 3—7 og 31 i min Disputats. Af den første Figur sees det, at den Spiral, som dannes af Dækbladene, *f*, og deres Akselknopper, *g*, fortsættes af Kopdækbladene og de i deres Aksler stillede saa omstridte Epiblastemer, hvis Hovedmasse direkte omdannes til den første Støvdrager, *st*. Endnu tydeligere og jævnere er denne Overgang paa de citerede Figurer af min Disputats, særlig Fig. 6—7, Tab. I, hvor Koppen ikke er saa vidt fremskreden i sin Udvikling som i Fig. 8, **IX** (i denne Afhandling). Den histologiske Bygning af de paagjældende Dele skulle vi straks betragte.

Knopperne i Akslerne af Dækbladene paa Hovedaxens florale Del udvikle sig til Kvaste. De to Forblade anlægges succedant; derpaa træde Knopperne frem, og det er her som hos Solaneerne 2det Forblads Knop, som først anlægges. Fig. 10 viser et Længdesnit gjennem en ung Kvast, hvis Forblade ere anlagte. I Akselen af *m* sees der intet Spor til Celledelinger, som kunne have Hensyn til Dannelsen af Knoppen (se ogsaa Fig. 12); i Akselen af *n* (Fig. 11) sees der derimod saadanne, der intet andet Maal kunne have. Men ogsaa denne Knop, skjøndt den til en Tid er den højest stillede Nydannelse paa Aksen, anlægges langt uden for Topcellegruppens Omraade, og en Vækstpunktdeling kan altsaa ikke forekomme.

Hvad det her har mest Interesse at undersøge, er Bygningen af den unge Kop og af de Epiblastemer, der, som vi saa, fortsætte den Spiral, som Dækbladene og deres senere til Kvaste udviklede Knopanlæg have paabegyndt.

S t æ n g e l s p i d s e n i Koppen giver i de fleste Tilfælde den vegetative Intet efter i Regelmæssighed (Fig. 3, 13 og 15 **IX**) (naar Fig. 15 er mindre regelmæssig end Fig. 13, er Grunden den, at Snittet næppe gaar nøje lodret gjennem Midten).

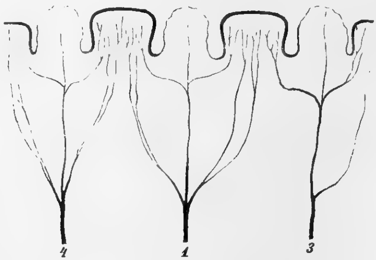
Paa Stængelspidsen anlægges i Spiral, saaledes som jeg har vist i min Disputats, fem Dobbeltorganer, dannede forneden af Anlæget til et Kopdækblad, foroven af Anlæget til en Støvdrager. Jeg har i Fig. 5—7, **IX**, givet nogle nye Billeder af disse, der for det første vise, at i den ganske unge Kop, i hvilken endnu kun 2—3 af dem ere anlagte, ere de helt adskilte fra hverandre og staa aldeles selvstændige paa Axen; i den noget ældre bygges der derimod Bro mellem Anlægene til Kopdækbladene og det øverste af dem kommer undertiden hurtigere til Syne end dets Støvdrager, og derfor kan det Tilfælde findes, at Kopdækket er anlagt helt rundt, uden at den øverste Støvdrager endnu er kommen til Syne. Men jeg har aldrig truffet en ganske ung Kop, i hvilken de første af disse Dobbeltorganer vare anlagte, uden at finde dem helt anlagte og helt frie af hverandre, som de tre, der sees i Fig. 6—7.

For det andet sees, at Anlæget til et Kopdækblad og den ovenfor det stillede Støvdrager i enkelte Tilfælde næsten danne et eneste Organ, en stor oval og temmelig flad Vorte, men i de fleste Tilfælde finder man dem adskilte ved en mere eller mindre tydelig Fure, fordi hint Stadium, hvor det findes, i alt Fald gjennemløbes hurtigt. Men Dobbelt-

organer maa de kunne kaldes, fordi denne Fures Bund altid ligger højere end Stænglens Overflade, som de staa paa, og de altsaa ere forenede ved deres Grund.

Den histologiske Bygning af disse Dobbeltorganer sees af Fig. 13—15, **IX.** I Fig. 14 er et netop anlagt; den nedre Del, *i*, af Dobbeltorganet dannes fortrinsvis ved tangentiale Delinger i 1ste Periblemlag, men skylder dog ogsaa dybere liggende Celledelinger, at det overhovedet hæver sig saa meget op over Stængelspidsen, som det gjør; den øvre Del, *st*, har derimod aldeles ingen tangentiale Delinger i 1ste og 2det Periblemlag, medens saadanne sees dybere nede, og ved livlig Formering af dem har der allerede dannet sig ligesom Begyndelsen til Pleromrækker, *pl.* Betragtes et ældre Stadium som Fig. 15, vil man se den samme Modsætning mellem Dobbeltorganets to Dele, som Fig. 14 viste, nemlig: Den nedre Del dannet ved Celledannelse i de to yderste Periblemlag, den øvre ved Celledannelse først dybere nede, under 2det Periblemlag; ogsaa her sees regelmæssige Cellerækker i det Indre med Udseende som Pleromrækker. Paa den modsatte Side af denne Kop sees ved *i* nogle faa Tangentialdelinger i 1ste Periblemlag, ved hvilke her dannes en Valk d. e. den Bro, som forbinder Kopdækbladene med hinanden til et sambladet Dække. Tages endelig Fig. 13 i Øjesyn, da ville vi i *st* og *i* finde et nyt Billede, der som de to andre paa den mest slaaende Maade gjengiver de Billeder, som vi ofte før have havt Lejlighed til at gjøre os bekjendte med, hvor vi havde for os en Knop med dens Støtteblad (sammenlign med den Fig. 4—5, **I**, Fig. 1, 4, 11, **III**, etc.).

Saaledes er altsaa Oprindelsen til Kopdækbladene og 1ste Støvdrager i Gruppen. Hvad Kopdækbladene angaar, vil jeg her kun endnu henvise til et fremmeligere Udviklingstrin i Fig. 7, **X**, hvor man navnlig til højre vil se, at *i*, Kopdækbladet, aldeles har Bladenes Bygning, og endelig tilføje, at Kirtlerne have den for de fleste afsondrende Legemer almindelige Bygning med i særlig Grad radialt strakte Overhudsceller.



Xyl. **XI.** Parti af et Kopdække med dets Fibrovasalstrænge.

Ribbeforgreningen i Kopdækket, som jeg har afbildet i min Disputats S. 72, Fig. 13

(hosstaaende Xyl. XI), vil man gjenkjende i et Tversnit af Koppen Fig. 23—24, X, hvor de mørke Prikker, *i*, i Periferien af Figuren angive Ribbernes Stilling.

Idet jeg foreløbig forlader Støvdragerne, vil jeg følge Stængelspidsen paa dens videre Udviklingsgang. De ydre Former, som den antager, har jeg beskrevet i min Disputats, S. 44 ff., saavel som Frugtbladenes og Æggenes Fremtræden. Her endnu blot et Par Ord om disse Organers Histologi.

I Fig. 8, X, vil man se det histologiske Billede af en Stængelspids, der omtrent er paa det Udviklingstrin, som er afbildet i Fig. 16 og 17 i min Disputats, hvor Toppen bliver fladere og med en Kant støder op til Siderne. Figuren viser, at Aarsagen til denne Formforandring er Celledelinger (ved *cp* d. e. Frugtbladene) i de alleryderste Periblemlag.

Fig. 7, X, viser os et fremmeligere Stadium, i hvilket Bladnaturen af *cp* træder endnu tydeligere frem. (Billedet er ikke symmetrisk, fordi Snittet har truffet Midten af et Frugtblad og Mellemrummet mellem de to andre). Endnu er der en afrundet lille Stængelspids oven for disse saaledes anlagte Frugtblade; men paa Fig. 9 sees den forandret, idet Æggene lige ere i Fremkomst. Dette Præparat gav ved forskjellige Indstillinger og betragtet fra de to modsatte Sider stedse samme Billede, hvoraf det Væsenlige er, hvad ogsaa Figuren viser, at Æggene i Modsætning til Frugtbladene opstaa ikke i 1ste Periblemlag, men ved tangentiale eller overhovedet alsidige Celledelinger først i det 2det Lag. Jeg har allerede i min Disputats udtalt, at jeg maatte anse Æggene for Frugtbladenes Akselknopper, og det forekommer mig, at den histologiske Udvikling bestyrker denne Opfattelse, skjøndt jeg maa tilstaa, at Forbindelsen mellem Knop- og Bladgrunden her ikke er saa inderlig som i de allerfleste andre Tilfælde.

I sin videre Udvikling frembyder Ægget flere interessante Sider, hvorfor jeg vil gaa noget nærmere ind herpaa.

Det er altsaa fortrinsvis tangentiale Celledelinger af en lille Gruppe Celler i 2det Periblemlag, der grundlægge Ægget. Idet disse forøges, drives det overliggende 1ste Periblemlag og Dermatogenet i Vejret (Fig. 10—11, X), og Ægget bliver mere cylindrisk. Imidlertid indfinde ogsaa Tangentialdelinger, *t*, sig i 1ste Periblemlag, hvorved der indad til dannes de Celler, der ere mærkede med *z*. I Fig. 10 sees endnu kun *en* saadan Celledeling; i Fig. 12 er der derimod tre, og af de yderste af de nydannede Celler have de to atter delt sig, nemlig ved radiale Vægge, *r*.

I Fig. 16 er Ægget langt videre i sin Udvikling; foruden de øverste af Cellerne i 1ste Periblemlag have ogsaa andre, der ligge længere nede paa Siden af Æggekjærnen, delt sig ved tangentiale Vægge, og af de først delte have de inderste Dotreceller, *z*, delt sig gjentagne Gange tangentialt, hvorved radiale Cellerækker opstaa. Samtidig sees en Celle i Spidsen af en af de Cellerækker, som fylde det Indre af Kjærnen under dette 1ste

Periblemlag, hvis Celler saaledes gjentagne Gange ere delte tangentialt, at tage til i Størrelse d. e. blive til Kimsæk, *se.* Nøje at angive, om det er en Celle af en bestemt Række, t. Ex. den midterste, formaar jeg ikke, da de til højre for og oven for Kimsækken liggende Celler vare noget utydelige.

Endelig haves i Fig. 20 et endnu videre udviklet Stadium, hvoraf det vil sees, at Kimsækken (hvis allernærmeste Omgivelser ikke vare ret tydelige) er kommen til at ligge langt dybere nede i Kjærnen; Grunden hertil er de fortsatte tangentiale Delinger (og radiale) af hine fra 1ste Periblemlag nedstammende Celler. Om det derved just er de inderste af de to allerførste Dottreceller, *z*, der alene dele sig, saaledes som jeg har antydet paa Figuren, eller om Celledelinger ogsaa optræde i de yderste, vover jeg ikke at afgjøre. Men Resultatet er tydeligt: over Kimsækken er der opbygget en tyk Kappe af Celler, der ere straaleformigt ordnede om den som Centrum (se ogsaa Fig. 21), og alle nedstamme fra 1ste Periblemlag. Senere synes en stor Del af disse Celler at resorberes under Kimsækkens Vækst, og tillige ophører tildels Bygningens Regelmæssighed derved, at der ogsaa indtræder talrige tangentiale Celledelinger i Dermatogenet (Fig. 22, X), til hvilke der allerede paa *et* Sted i Fig. 20 er gjort Begyndelsen.

Det var Æggekjærnens Skjæbne, som vi her forfulgte. Æggehinderne opstaa, hvad allerede Schmitz har iagttaget for en Del Ægs Vedkommende, fortrinsvis af Dermatogenet. I Fig. 16, X, er Begyndelsen til den nedre Æggehinde gjort ved *ii* i Form af en Dermatogen-Tangentialdeling, dog at der ogsaa inden for i 1ste Periblemlag bemærkes tangentiale og radiale Celledelinger. I Fig. 17—20, X, sees Æggehinderne videre udviklede; foruden nye tangentiale og radiale Celledelinger i 1ste Periblemlag sees ogsaa nye Dermatogendelinger, ved hvilke den ydre Æggehinde er vokset i Størrelse, og i Fig. 19 saavel som i Fig. 20 sees Hinden i sin Rand allerede væsenlig at bestaa alene af to Dermatogenlag. Yderhinden kommer altsaa til Syne før Inderhinden, til hvilken der i Fig. 17—18 netop sees de første Spor; det er her fortrinsvis Strækning af Dermatogenets Celler i radial Retning, der har fremkaldt den lille Valk, som sees ved *is.* Senere vokser Inderhinden ogsaa ved tangentiale og radiale Celledelinger i Dermatogenet (Fig. 19—20), mindre, som det synes, tillige i dybere Lag. Æggehinderne bestaa saaledes næsten udelukkende af Celler, der stamme fra Dermatogenet, og de mangle derfor ogsaa som voksne (*i—i*, Fig. 22) den Regelmæssighed i Bygning, der er karakteristisk for Bladene.

Til denne Undersøgelse over Æggets Udvikling hos *Euphorbia* vil jeg knytte nogle Betragtninger over Æggenes Udvikling hos andre Planter, som paa naturlig Maade kunne slutte sig til de her publicerede Undersøgelser over Knopdannelsen overhovedet.

Chrysosplenium alternifolium. I Fig. 25—26, X, er fremstillet to Trin af Æggets Udviklingshistorie. Det dannes (Fig. 25) som hos *Euphorbia* i 2det Periblemlag ved tangen-

tiale Celledelinger af en lille Gruppe Celler. Kimsækken, *se*, er en Celle, der ender de midterste Rækker i Kjærnen, og som paa samme Maade som hos hin har et tangentialt delt 1ste Periblemlag over sig, der dog ikke er saa mægtigt udviklet som hist. Endelig sees Æggehinderne dannede alene af Dermatogenet, idet dettes indre Grænselinie skarpt kan forfølges paa sin Vej og i alt Fald kun paa venstre Side kan røbe, at der existerer en betydeligt fremragende Valk uden for den, ved, at den der bøjer sig lidt ud ad.

Myogalum nutans (Fig. 31, X) stemmer med Hensyn til Æggets Bygning i alt Væsenligt med de foregaaende to. 1ste Periblemlag deles tangentialt omkring Kimsækken, men endnu mindre kraftigt end hos *Chrysosplenium*, og ved Dannelsen af Æggehinden spiller Dermatogenet den vigtigste Rolle.

Zannichellia macrostemon (Fig. 8—10, **XI**) stemmer ligeledes med de foregaaende saavel i Æggehindernes Bygning, som i Kimsækkens Oprindelse og 1ste Periblemlags Deling omkring den. Dog kjender jeg ikke de første Trin i Udviklingen.

Scrophularia nodosa (Fig. 27—30, X) afviger derimod fra dem i væsenlige Punkter. Det er ganske vist Celledelinger neden for 1ste Periblemlag, der fremkalde den første lille Vorte, som er Æggets Kjerne (Fig. 27), men det er den Celle i første Periblemlag, der bliver den øverste, som danner Kimsækken, *se*. Denne er oprindelig virkelig beliggende i Æggets Midtlinie, og den laterale Stilling, som den senere har i det stærkt krummede Æg (Fig. 30), beror paa et ensidigt Vækstforhold af Kjærnen. Æggehinderne skylde ogsaa her Dermatogendelinger deres Oprindelse (*i*, Fig. 30).

Euphorbias Æg stemme saaledes i de væsenlige Træk med disse og de faa andre Æg, som jeg har undersøgt, men danne dog et extremt Led ved den Mægtighed, som den fra 1ste Periblemlag nedstammende Cellekappe opnaar.

Hvorvidt disse Æg alle ere at betragte som Kaulomer, ligesom *Euphorbias*, er et andet Spørgsmaal, som det ikke allevegne vil være let at afgjøre. Kunde man ubetinget stole paa, at ethvert Organ, der anlægges i de dybere Periblemlag er et Kaulom, var det lettere at fælde en Dom; men det tør man ganske afgjort ikke. Der er ogsaa Æg, som opstaa i 1ste Periblemlag, og som jeg desuagtet maa betragte som Knopper, ikke som Blade. Man betragte t. Ex. Udviklingen af Ægget hos *Ranunculus acris* (Fig. 5—7, **XI**) og sammenligne den med Knopdannelsen i Hunraklen af *Salix nigricans* eller i *Amorphas* Blomsterstand, eller med de ogsaa paa Tavle **XI** afbildede Epiblastemer af *Sedum*, Fig. 1—4, og man vil se en paafaldende Overensstemmelse. Fig. 5 viser os den øverste Del af en ung Ranunkelblomst; der sees for neden enkelte Støvdragere, *st*, og for oven Frugtblade med deres Æg. Det fremgaar tydeligt af Fig. 6, at det er Celledelinger i 1ste Periblemlag, der fortrinsvis lægge Grunden til Ægget, og der er en saa fuldstændig Lighed mellem denne Figur og de citerede (t. Ex. Fig. 4, **XI**, af *Sedum*), at man ikke kan andet end betragte Ægget som Frugtbladets Akselknop.

Paa samme Maade maa jeg betragte Ægget hos *Zannichellia* (Fig. 8—10, **XI**); men den «Forskydning», der finder Sted allerede hos Ranunklen, er her bleven langt større.

Uden at jeg altsaa vil betragte dette Spørgsmaal om Æggets morfologiske Betydning som afgjort ved dets Oprindelse fra det ene eller det andet Cellelag, vil jeg dog fremhæve, at den Omstændighed, at det i de fleste Tilfælde, hvor jeg har undersøgt det, dannes neden for 1ste Periblemlag, snarest taler for dets ogsaa af andre Grunde sandsynlige Knopnatur.

Med Hensyn til Spørgsmaalet, om Æggekjærnen danner Æggets Spidse eller er en lateral Udvikling paa det[1]), maa jeg bestemt erklære, at jeg i alle de her omtalte og tegnede Tilfælde og i flere andre, hvor jeg flygtigere har undersøgt Æggenes Genesis, har fundet, at Spidsen af den oprindelige lille Vorte, der er Anlæget til Ægget, danner Æggets Kjærne, og at Kimsækken opstaar i en af de centrale Rækker i denne, og endelig at Integumenterne anlægges under Kjærnen snart ensidigt (navnlig Yderhinderne), snart alsidigt og ringformigt.

Med Hensyn til Spørgsmaalet om Æggehindernes morfologiske Natur maa jeg udtale som min Overbevisning, at de ere Blade. Den Omstændighed, at de helt eller delvist ere dannede af Dermatogenet[2]), taber sin Betydning for mig, naar jeg ser hen til de i det Foregaaende paapegede Tilfælde (der yderligere kunne forøges), hvor ægte Phyllomer mere eller mindre fuldstændigt findes opbyggede af Dermatogenet. Jeg kan da kun slutte: Phyllomer kunne dannes helt i Periblemet, saa at Dermatogenet kun vokser i Fladeretning ved radiale Celledelinger, eller baade i Periblem og Dermatogen, eller alene i dette, paa samme Maade som jeg maa slutte og andensteds nærmere skal vise, at ægte Trichomer kunne opstaa helt og alene i Dermatogenet, eller tillige i Periblemet, eller endog alene i Periblemet, medens Dermatogenets Celler i saa Tilfælde kun deles ved radiale Vægge. Fremhæves bør det her sluttelig, at den ydre Hinde hos *Euphorbia* opstaar før den indre.

Den Valk eller Rand, som omgiver Frugtknudens Grund, og som først kommer til Syne, naar Ægdannelsen allerede er vidt fremskreden (Fig. 32—33, **X**), opstaar i Periblemet og forholder sig ganske som et almindeligt Blad.

Vi vende nu tilbage til «Støvdragerne».

Vi saa den 1ste Støvdrager i hver Gruppe opstaa; vi maa nu følge den videre. Paa et lidt senere Stadium viser den sig noget skæv, hvad jeg har paapeget i min Disputats, og Grunden dertil er, at en Nydannelse opstaar paa dens ene Side paa Grunden af den. Figg. 16, **II** og 17, **III**, og flere i min Disputats, Figg. 17 og 25, **IX**, i denne Afhandling vise

---

[1]) Cfr. Sachs, Lehrbuch, 1870, S. 472—73.

[2]) Cfr. Hofmeister, Sachs (Lehrb. 1870, S. 472), Schmitz (Bot. Ztg. 1870, S. 40).

dette. At det er 2den Støvdrager i Grupperne, der her kommer til Syne, er sikkert; men hvor denne Støvdrager opstaar, derom synes ikke alle at være enige.

Da de histologiske Billeder med største Tydelighed vise, at det er ved Celledelinger neden for 1ste eller 2det Periblemlag inde i 1ste «Støvdrager», at den 2den bliver til, saa at 1ste Periblemlag udelt gaar hen over dem begge og kun vokser i Fladen ved Cellernes radiale Delinger; da jeg fremdeles overalt har set Udviklingen gaa for sig paa denne Maade og aldrig har fundet *et* eneste Tilfælde, hvor 2den Støvdrager i en af de almindelige femtallige Kopper stod paa Koppens Hovedaxe fri og uafhængig af 1ste Støvdrager, er det, forekommer det mig, den eneste naturlige Slutning, at 2den Støvdrager virkelig opstaar paa 1ste Støvdrager, at vi altsaa ikke have to Søstre for os, men Moder og Datter. Forholdet minder om Slyngtraaden hos *Bryonia*, der har en lignende Stilling, halvt paa Hovedaxen, halvt paa Biaxen; men hos denne er det dog anderledes; thi her viser det sig klarligt, at Slyngtraaden i de fleste andre Tilfælde opstaar ganske uafhængig af Akselknoppen, og man maa da i de tvivlsomme Tilfælde slutte, at den ogsaa i disse egenlig forholder sig paa samme Maade. Men hos *Euphorbia* har jeg i en normal Kop aldrig set en saadan Stilling, og tilmed er det ogsaa langt tydeligere end hos *Bryonia*, at 2den Støvdrager virkelig fødes af 1ste, en Ting hvori Hieronymus (l. c.) ogsaa er enig med mig.

For de følgende Støvdrageres Vedkommende bliver det imidlertid langt vanskeligere at vise Nedstamningen, i alt Fald hos de Arter, som jeg har kunnet undersøge; jeg maa antage, at det lettere vil kunne lade sig gjøre hos saadanne, som Baillon har afbildet[1]).

De Undersøgelser, som jeg har anstillet for at komme til klar Anskuelse af Forholdet, have ført til følgende mindre betydelige Resultater.

I Fig. 16, IX sees en lille Gruppe af fire Støvdragere, af hvilke den yngste (st^4) netop er i Fremkomst. Fig. 18 viser det histologiske Billede heraf, men det lærer os imidlertid ikke andet end, at st^4 er en lille Cellemasse, der kommer frem foran st^2 og til venstre for st^3, ved dennes Grund og en lille Smule i Forbindelse med den.

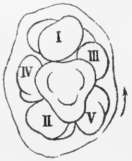
Fig. 14, X, viser en ung Gruppe fra Siden, ligeledes dannet af fire Støvdragere. Fig. 15 giver det histologiske Billede af den yngste, hvis Celler ere tegnede kraftigere end de andres. Heller ikke her kan man faa et klart Billede af Nedstamningsforholdet.

Tager man imidlertid Hensyn til, at 2den Støvdrager utvivlsomt nedstammer fra 1ste, bliver det mig i høj Grad sandsynligt, at der hersker et lignende Nedstamningsforhold mellem alle de følgende, og at den Omstændighed, at alle Støvdragere i en Gruppe utvivlsomt ere forenede ved deres Grund (se t. Ex. Fig. 27, IX, 14, X, og flere Figurer i min Disputats), ikke er et ved en passiv Hævning af det mellem dem liggende Cellevæv fremkaldt Forhold, men et Udtryk for deres Afstamning den ene fra den anden. Hvor let det

[1]) Etude générale du groupe des Euphorbiacées, Tab. 1, Fig. 15 og 17.

faar Udseendet af, at to Organer, af hvilke det ene virkelig staar paa det andet, udspringe selvstændige fra samme Axe, vil indsees, naar man ser hen til Forholdet mellem Blomsten hos *Anthemis* og dens støttende Blad eller til *Verbascums* neden for omtalte «seriale» Knopper.

Støvdragernes Stillingsforhold inden for hver Gruppe og Stillingens Afhængighed af Spiralen i Koppen har jeg paavist i min Disputats, til hvilken jeg henviser. Hosstaaende Træsnit vil kunne opfriske Erindringen derom, og tillige kan jeg henvise til det Tversnit af en Kop, der er leveret i Fig. 23, **X**, hvor Grundene af de overskaarne Støvdragere med deres centrale Karstrænge sees.



Xyl. **XII.** En Kop af *Euphorbia* set ovenfra; I—V ere de 5 første Støvdragere i hver Gruppe. Paa deres højre Side komme Støvdragerne af 2den Orden til Syne. Spiralen i Koppen gaar ogsaa til højre.

Den enkelte Støvdrager udvikler sig nu videre saaledes. Paa Fig. 13—15, 17 og 25, **IX**, vil man se unge Støvdragere afbildede; de dannes af et temmelig regelmæssigt Meristem med 1—2 Periblemlag og temmelig ordentlige Pleromrækker, og naar man paa et Længdesnit tæller Cellerækkerne ved deres Grund, vil man stedse finde et Antal af 10—12. Man vil fremdeles se, at 1ste Periblemlag af den ældste Støvdrager (Fig. 25 og 17) er bredere end alle følgende Cellelag og Rækker; fra dette Lag nedstammer nemlig ogsaa den Cellemasse, som giver Støvknappen dens ydre Form, ved hvilken Støvsækkene hæve sig frem over det oprindelige højt vorteformede Støvdrageranlæg; thi i Vævet neden under dette Lag finder ikke Celleformering Sted i nogen væsenlig Grad. I Fig. 19, **IX**, er tegnet et lodret radialt Snit gjennem en Støvdrager, saaledes at dens mod Koppens Centrum vendende Side, dens Ryg, ligger til højre, ligesom paa st^1 i Fig. 14, **X**. Det er tydeligt, at en Række Celler i 1ste Periblemlag har delt sig ved tangentiale Vægge (der ere mærkede 1); derved er der dannet en indre Række af Celler, de skraverede, og en ydre Række. Paa den modsatte, ikke udførte, Side, Forsiden af Støvdrageren, er det samme Tilfældet, og man ser Begyndelsen gjort, men da Snittet ikke var godt her, har jeg ikke udført Tegningen videre.

Lægger man et Tversnit gjennem den unge Støvknap (Fig. 22, **IX**, hvor Alt, som ligger indenfor 1ste Periblemlag, er udeladt), overbevises man om, at det ikke er en enkelt lodret Række, men et helt Lag af Periblemceller, som paa fire Steder af Støvknappen dele

sig tangentialt[1]). Tillige viser dette Billede, at der i de yderst liggende, ikke skraverede, Døtreceller er fremtraadt nye tangentiale Delingsvægge (mærkede med Tallet 2), medens de skraverede endnu ere udelte. Det Samme viser Forsiden af den i Fig. 21 afbildede Støvdrager, hvor der i de paa Fløjene liggende Celler endnu kun findes *en* Deling, medens der i de midterste i Rækken findes to, af hvilke den sidste er optraadt uden for den første[2]).

Paa Rygsiden (den højre Side) af denne Støvdrager og paa Fig. 23 (der er en Del af et Tversnit) er Udviklingen derimod et Skridt videre. For det første have de skraverede Celler, som ere Støvets Urmoderceller (og som snart vise, at de have en anden Natur og Bestemmelse end de omgivende Celler, ved deres protoplasmarige Indhold, ved deres Cellevægges stærke Opsvulmning i Kali og stærkere Lysbrydning o. s. v.), delt sig ved tangentiale Vægge, der dog ikke ligge fuldt saa regelmæssigt, som de andre tangentiale Cellevægge, der fremtræde, saa at de danne en sluttet Række. Gaar man ud fra *l*, der er udelt, vil man straks i den første Celle oven for træffe den først fremtraadte Delingsvæg, 1, og man vil se, at den deler Cellen i to omtrent lige Dele, at i Fortsættelsen af den ligge de andre med 1 betegnede Delingsvægge, der netop gjøre Skillevæg mellem Støvets Urmoderceller og de uden for liggende, og at disse Vægge alle tillige gaa tvers over Midten af de oprindelige Periblemceller; i disse Forhold har man Beviset for, at 1ste Delingsvæg virkelig lægger Grunden til Adskillelsen mellem Pollencellerne og den udenfor dem liggende Del af Væggen.

For det andet har Væggen taget til i Tykkelse derved, at der uden for de i Fig. 22 med 2 mærkede Vægge er optraadt nye tangentiale Vægge, 3. At disse opstaa udenfor 2, altsaa centrifugalt, derfor give den højre Side af Længdesnittet Fig. 21 og Tversnittet Fig. 23 et klart Bevis. Paa samme Maade opstaar oftest endnu en 4de Væg uden for den 3die (Fig. 20), men hermed er Væggen grundlagt; for Eftertiden rives der for en Del kun ned af det saaledes opførte.

Da alle tangentiale Delingsvægge af samme Orden ordne sig saaledes, at de ligge i Fortsættelse af hverandre, danne de ved dem opstaaede nye Celler regelmæssige Lag; derfor turde det Navn sekundære Periblemlag ikke være upassende.

Resultatet er altsaa det, at der i 1ste Periblemlag er opstaaet omtrent 6 saadanne sekundære Periblemlag. At de have denne Oprindelse fremgaar foruden af den egenlige Udviklingshistorie ogsaa af den Omstændighed, som kan sees paa en selv nogenlunde vidt udviklet Støvknap, at Cellerne under Epidermis ligge i tydelige Rækker, hvorfor ligesom Straaler tyde-

[1]) Det var altsaa en fejlagtig Antagelse, som Nägeli bragte ind i Videnskaben 1842, og som siden er gaaet fra den ene Lærebog til den anden, at det er fire enkelte lodrette Cellerækker, der ere Støvets Urmoderceller; thi hvad vi se her hos *Euphorbia* gjenfindes paa samme Maade hos en Mængde, hvis ikke alle, andre Støvdragere, hvad jeg nærmere havde omtalt og afbildet i min oprindelige til Videnskabernes Selskab indsendte Afhandling.

[2]) Ogsaa radiale lodrette og horizontale Vægge optræde; se Fig. 20 og 21.

ligt gaa gjennem Knaprummet fra det Indre til Overhuden (Fig. 14, X), og af at 1ste Periblemlags indre Grænse i de fleste Tilfælde kan forfølges fra Flojene, hvor det endnu er udelt (*k—h—l*, Fig. 21), og helt rundt inden for den hele Cellemasse, hvis Udvikling vi nu betragtede[1]).

Disse sekundære Periblemlags fremtidige Skjæbne er følgende. De to inderste (Fig. 14, X, de skraverede Lag i Fig. 20, 21 og 23, IX) blive til Moderceller for Pollentetrade-Cellerne, ere altsaa Støvets Urmoderceller (enkelte radiale Celledelinger ere dog ogsaa optraadte forinden). Det næste Lags Celler (*e*, Fig. 20) strække sig noget i radial Retning, dele sig ogsaa ved radiale Vægge (*r*, Fig. 20), i Regelen ved en ud for hver inden for liggende Pollen-Urmodercelle, og danne med de paa den modsatte Side af Pollencellerne liggende Periblemceller (*e* til venstre i Fig. 20) et Slags Epithel, der som et Tapet beklæder hele Rummets Væg, og som resorberes under Støvkornenes Udvikling. Dette Tapet har altsaa en forskjellig Herkomst, idet det, som beklæder Ydervæggen, nedstammer fra 1ste Periblemlag, men det, som beklæder Indervæggen, derimod fra det inden for liggende Periblem.

Ligeledes resorberes de uden for Epithelet liggende Celler af Støvknappens Væg, der nedstamme fra 1ste Periblemlag, paa det alleryderste Lag nær; dettes Celler tage nemlig stærkt til i Volumen (*s*, Fig. 24), og i dem opstaa derpaa spiralformede Fortykningslag. Paa dette Lags indre Side sees længe en grumset gulig Masse (*r*, Fig. 24), der er Resterne af de opløste Celler. Paa dets ydre Side ligge Epidermiscellerne, men de opnaa ingen videre Betydning, forblive tyndvæggede og klare og forsvinde delvist eller helt. Det er altsaa det sekundære Periblems yderste Cellelag, der danner Støvsækvæggens væsenligste Bestanddel, ligesom det er dets inderste Cellelag, der (middelbart) danne Rummets og hele Støvdragerens væsenligste Bestanddel, Støvkornene.

Leddet paa Støvdragernes Stilk fremkaldes i alle Tilfælde ved Celledeling i alle tre Retninger fortrinsvis i 1ste Periblemlag (Fig. 34, X), og dets Existens mærkes ikke i det Indre af Stilken. Der findes i Centrum af denne nogle faa Spiralkar omgivne med kambiumagtige Celler, og denne hele Karstræng omgives af et ensformigt Parenchym. I Dermatogencellerne har jeg ingen andre Celledelinger set end de sædvanlige, ved radiale Vægge.

Kopskællene have, siden min Disputats udkom, været Gjenstand for Studium af Hieronymus (l. c.), der kommer til det Resultat, at de ikke ere saa simpelt eller uorden-

[1]) Se herom Warming: «Om Stovudvikling i Axer og Blade», i «Botaniska Notiser», 15 Dec. 1871. Paa et Snit lodret gjennem en Støvdrager og parallelt med dens Forside vil man paa Grund af, at Støvdrageren bøjer sig for over, kunne komme til at berøre begge de bag ved hinanden liggende Støvknaprum, og endskjøndt man intet godt Billede kan faa af Udviklingen, vil man dog faa Bekræftelse paa, at det Hele udgaar fra 1ste Periblemlag (se Fig. 18, IX).

ligt delte, som jeg har antaget, at de tvertimod ere svikkelformigt forgrenede. Jeg har ikke i mine her publicerede Undersøgelser henvendt min Opmærksomhed særligt paa dette Punkt, og jeg har heller ikke, siden Hieronymus's Afhandling publiceredes (Marts Maaned i dette Aar), anset dette Punkt for at være af en saadan Betydning, at jeg har villet afbryde andre Undersøgelser for at foretage nye Studier af det. Jeg skal her kun bemærke, at jeg ikke uden videre kan tro paa den Regelmæssighed, som han mener at have opdaget.

Kopskællene opstaa som de almindeligste Trichomer i Dermatogenet, thi de i Fig. 2—3, X, aftegnede smaa Fremragninger maa jeg antage for Begyndelsen til Kopskæl. Ogsaa under deres senere Vækst vise de Trichomnaturen i den større Uregelmæssighed, som hersker i deres Bygning (Fig. 1, 4, 5, X). Karstrænge mangle ganske, hvad Tversnittet af et af dem, Fig. 5, X, tydeligt viser. Jeg har allerede i min Disputats omtalt, at de ogsaa ere befæstede paa Kopdækkets Grund; dette sees tydeligt af Fig. 23—24, X, hvor *sq* betegner Skællene. Den første Figur gjengiver et Snit tæt over Koppens Bund, saa at de nederste Dele af Støvdragerne og Hunblomsten sees; den anden et Snit højere oppe, hvor disse Dele ere faldne ud, og kun Kopskællene sees endnu, befæstede paa Kopdækkets Sider.

Med disse histologiske Undersøgelser tror jeg tilstrækkeligt at have suppleret min tidligere givne Fremstilling af *Euphorbia*-Koppens Udvikling. Vi ville nu forsøge at klare Spørgsmaalet om Koppens og dens enkelte Deles morfologiske Natur. —

Hvad skulle vi nu efter alt det Foreliggende antage Koppen for at være? En Blomst eller en Blomsterstand? Det gjælder om at vise, om der er mere end *et* Axesystem i Koppen; men kan dette bevises? Hvad er nemlig Forskjellen mellem Kaulom og Phyllom? Det eneste mulige Skjelnemærke er det, der hentes fra deres Udviklingsmaade og Stillingsmaade i Forhold til hinanden, saaledes som Hanstein og Sachs ogsaa opfatte Forholdet[1]). Kaulomet er det Centrale og Forbindende, Phyllomet er det Laterale, som er fæstet til Kaulomet. Ganske vist har Kaulomet i Regelen ubegrænset Længdevækst, medens Phyllomets tidlig standser; men der gives Phyllomer, som vokse uafbrudt i deres Spidse, og der gives Kaulomer, hvis Længdevækst hurtigt standser. Ganske vist opstaar Kaulomet i de dybere Periblemlag og sætter vel ogsaa Pleromet i Arbejde, medens Bladet opstaar i mere yderligt liggende Periblemlag; ganske vist udpræges der tidligt Pleromrækker i Knoppen, medens Bladet anlægger Prokambium; ganske vist er Stillingen af Karstrængene forskjellig o. s. v., men alle disse Forhold have dog ingen absolut Betydning, om de end alle maa

[1]) Se Hanstein, »Die Scheitelzellgruppe« og »Entwickelung des Keimes der Mono- und Dikotylen«, og Sachs, Lehrbuch, 1870, S. 134.

tages i Betragtning ved Afgjørelsen af det Spørgsmaal, om et bestemt Organ er Kaulom eller Phyllom. Jeg maa med Sachs og Hanstein betone det anførte relative Modsætningsforhold som det eneste Skjelnemærke mellem Kaulom og Phyllom. Men herved er nu at erindre, at de fleste Kaulomer ved deres Anlæggelse ere laterale i Forhold til Moderkaulomet; kommer nu der til, at et saadant nyfødt Kaulom hæmmes i sin videre Vækst, og et Organ kan jo hæmmes paa ethvert Trin af sin Udvikling, at det t. Ex. omdannes til Støvdrager, saa er jo det væsenligste Mærke til Adskillelsen af Kaulom og Phyllom tabt, og vi henvises til ad andre Veje at finde den rette Tydning af det paagjældende Legeme. Vi komme da ind paa Studiet af Analogierne, og hvert Øjeblik møder os det Spørgsmaal, hvad har Analogien for sig? Det er da klart, at de, der forlange Beviser, intet Syn have paa, hvad Naturen tilsteder og hvad ikke; det er den rigtige Takt, som det kommer an paa, men saa er man jo rigtignok ogsaa prisgivet til vilde Fantasier. Dog skal jeg ikke nægte, at Analogierne kunne være saa mange og saa slaaende, at de tilsammentagne næsten give et Bevis.

Euphorbia er en Illustration til det Sagte. Hovedspørgsmaalet er: er den først anlagte Støvdrager et Kaulom eller et Phyllom, en Akselknop eller et Blad? Er den et Kaulom, saa er Koppen en Blomsterstand; er den et Phyllom, er Koppen en Blomst.

Betragt Fig. 2—7 (navnlig 6 og 7), Tab. I, i min Disputats, eller Fig. 3 og 8, Tab. IX i denne Afhandling; vi se da Bladdannelsen langsomt at svinde ind, samtidig med at Knopdannelsen tager til i Kraft, jo højere vi stige paa Stængelen; tilsidst staa vi over for et svagt Blad og i dets Aksel en kraftig Vorte; men medens denne i det ene Tilfælde er en Knop, hvoraf der udvikler sig en kvastformig Blomsterstand, er den i det straks efterfølgende Tilfælde Anlæget til en Støvdrager. Hvad er nu naturligst, at den jævne Overgang, som vi se, virkeligt har ført os til Dannelsen af et nyt Blad med dets Akselknop, eller at der under en tilsyneladende roligt fremadskridende Udviklingsgang og Overgang skjules et voldsomt Spring fra et Blad med dets Akselknop til et Blad med et i dets Aksel stillet andet Blad paa det næste af Spiralfølgen givne Sted? Og hvorledes kan den sidste Antagelse forenes med den morfologiske Grundsætning: aldrig opstaar Blad umiddelbart i Akslen af et andet Blad?

Hieronymus henviser (l. c. S. 172) til Primulaceer, Plumbagineer, Hypericineer etc. som Planter, hos hvilke Kronblad og Støvdrager udvikles «aus einem ursprünglich angelegten Primordium», og derfor opstaa og ere forenede ved deres Grund paa en lignende Maade som Kopdækblad og 1ste Støvdrager i den unge Kop. Lad være, at der gives saadanne Kron- og Støvblade, og min Fig. 22, XI, vil vise det, ligesom jeg ogsaa kan anføre andre Exempler derpaa, hvad er saa sandsynligst: at hine, os nu saa vel bekjendte, Dobbeltorganer hos *Euphorbia* virkelig ere Blad- og Knopanlæg, der som sædvanligt ere forenede ved deres

Grund og stemme med dem, som vi i hele den foregaaende Fremstilling have lært at kjende i den florale Region hos mangfoldige Blomsterplanter (hos *Sisymbrium*, *Anthemis*, *Melilotus*, *Graminaceæ*, *Valeriana*, *Digitalis* etc., etc.), eller at de ere at sammenstille med de forholdsvis meget sjeldne Tilfælde, i hvilke Kronblad og Støvdragere ere forenede ved deres Grund? [1]).

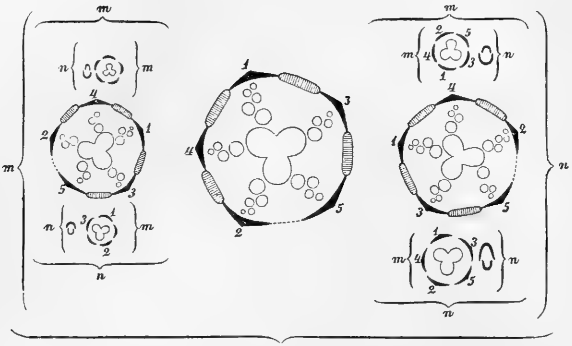
Det er muligt, at «Støvdrageren» hos *Euphorbia*, ogsaa naar vi se hen til dens Bygning, er et Phyllom, thi, som allerede bemærket, et anatomisk Kriterium, der i alle Tilfælde kan lære os at skille Phyllom fra Kaulom, kjende vi ikke; men jeg skal dog her gjøre opmærksom paa, at medens de almindelige Knopper i deres Bygning stemme med *Euphorbia*-Støvdrageren i den større Regelmæssighed og i Udprægningen af Pleromrækker (min Tavle IX, Fig. 13—15, 17, 25), er det sjeldent eller aldrig Tilfældet, at Støvblade have en lignende. Hos t. Ex. *Ricinus* (Fig. 32, XI) er der Spor dertil, men ellers er Bygningen langt uregelmæssigere; se Fig. 24, XI, hvor et Smaa-Støvblad netop af den af Hieronymus anførte *Hypericum* er afbildet, eller Pfeffers Tab. XIX, Fig. 4 og 5, Tab. XX, Fig. 1—4, Tab. XXII, Fig. 3, i Pringsheims Jahrbücher, Bd. VIII.

Der er altsaa for det første tre Forhold, der tale for, at Støvdragerne ere Kopdækbladenes Akselknopper, og de ere: 1) den Overgang til dem fra de neden for staaende Epiblastemer, som jeg har paavist; 2) den Omstændighed at slige af Knop og Blad dannede Dobbeltorganer med omtrent lige kraftigt Anlæg af de to Dele ere saa almindelige i hele den florale Region, medens lignende Bladdannelser ere meget sjeldne i Blomster og blive det end yderligere, naar vi tage Hensyn til at de anlægges succedant, og 3) den indre Bygning.

Jeg maa derfor fastholde, at det ikke synes at være saa ganske «mit Unrecht», som Hieronymus mener, at jeg sammenligner Støvdragerne hos *Euphorbia* med Akselknopperne hos *Cruciferæ*, *Graminaceæ* etc. og ikke med Støvdragerne hos *Hypericineæ*, *Primulaceæ* etc. —

Hieronymus siger, l. c. S. 170: «Diese Wickel (d. e. Hanblomst-Sviklerne) umgeben in einem Wirtel die in der Mitte stehende weibliche Blüthe etc.». Dette er et urigtigt Referat af mine Undersøgelser, saa fremt han med «Wirtel» mener «Kreds» og tænker paa en simultan Anlæggelse af alle fem Svikler. Thi disse fremkomme succedant efter en Spiral, hvilket jeg tilstrækkelig klart har fremstillet i min Disputats. For yderligere at minde Læseren om Bygningen og Stillingsforholdene af de efter hverandre følgende Kopper og af Delene i dem hidsætter jeg her et af Træsnittene fra min Disputats.

[1]) Jeg skal ogsaa gjøre opmærksom paa, at det hidtil kun er Kronblade, som vi saaledes se forenede med den modstillede Støvdragerkreds; der er næppe noget Tilfælde kjendt, i hvilket Bægerbladene eller Bladene i et enkelt Blomsterdække ere forenede med de dem modstillede Støvdragere paa lignende Maade.



Xyl. XIII. Grundrids af Forgreningen hos *Euphorbia*. *m*, 1ste Forblad; *n*, 2det. 1—5 angive Kopdækbladene efter den Orden, i hvilken de anlægges.

Hvad har nu flest Analogier for sig: en Blomsterstand, i hvilken de os saa vel bekjendte Dobbelt-Epiblastemer anlægges i den sædvanlige Spiralfølge, eller en Blomst, hvis Støvblade, hvert med sit neden for staaende samtidigt dannede Perigonblad, anlægges i Spiral?

Jeg har i min Disputats stærkt betonet denne Side af Udviklingen. Min højstærede Konkurrent i Besvarelsen af denne Opgave peger i Anledning heraf hen[1]) paa Sielers Undersøgelser over *Umbellifererne*, hvis Rigtighed han bekræfter «ved egne Iagttagelser», og mener, at det Bevis, jeg vilde finde i hine Dobbeltorganers Succession for, at Koppen er en Blomsterstand, har tabt sin Betydning ved de af Sieler fremdragne Udviklingsforhold.

Jeg maa nu antage, at han publicerer sine herhen hørende Tegninger, thi i Sielers Undersøgelser, saaledes som de foreligge i Botan. Zeitung, 1870, Nr. 23—24, kan jeg i Virkeligheden ikke finde en saadan Udviklingshistorie fremstillet, som nøje svarer til hin hos *Euphorbia*, saaledes som han ifølge hint Referat[1]) synes at antage.

Vel siger Sieler (l. c., S. 377): «In einer zweiten Reihe der *Umbelliferen* entstehen die Staubgefässe wohl successiv nach $^2/_5$ Divergenz, wie oben, doch tritt ein sehr charakteristischer Umstand hinzu, welcher darin besteht, dass parallel mit der Entwickelungsfolge der Stamina die der Sepala verläuft. Anstatt des einen Höckers, wie es im ersten Typus der Fall war, treten hier immer zwei superponirte Anlagen auf, von welchen die obere sich zu einem Stamen, die darunter stehende zum Sepalum ausbildet. Kaum ist auf der Torus ein Staubgefäss angedeutet, so wächst auch unter demselben der Kelchzahn hervor

[1]) Oversigt over Videnskab. Selsk. Forhandl., 1872, S. 25.

(Fig. 13—16). Nach dieser Modifikation werden angelegt die Blüthen von *Cicuta virosa* L., *Daucus Carota* L., *Peucedanum parisiense* DC., *P. Cervaria* Lap., *P. officinale* L. u. a.».

Saaledes lyde hans Ord, og efter dem maa man antage, at vi virkelig her i en ægte Blomst finde en Udvikling, der komplet modsvarer Udviklingen i *Euphorbia*-Koppen. Men hans Figurer, til hvilke han selv henviser, ere i Strid med dem.

Fig. 13—16 fremstille Blomster af *Cicuta virosa*. Den yngste er Fig. 13, og den viser os et stort Bægerblad anlagt i det ene Hjørne af en noget trekantet Skive. Inden for Bægerbladet er der lagt en mørk Skygge, der imidlertid kun kan antyde, at Blomsterbunden hæver sig noget lige inden for Bægerbladet, paa samme Maade, som den gjør det de allerfleste andre Steder, hvor et Blad anlægges paa en Axe; men at en Vorte som Anlæg til den Bægerbladet modsatte Støvdrager her skulde være anlagt, sees ikke; thi saa maatte der vel være lagt Skygge rundt om et ringformigt Parti. Dernæst kan man ikke heller andet end i de to andre Hjørner af Skiven se Begyndelsen til de næste to Bægerblade, der imidlertid endnu mindre end hint første have Spor oven over sig af nogen Støvdrager. Fig. 14, der er det næste Udviklingstrin, bestyrker min Opfattelse af Fig. 13. Her ere nemlig tre Bægerblade tydeligt anlagte, og inden for det ældste er der anbragt et *st* som Betegnelse for, at Støvdrageren der er anlagt, hvilket maaske ogsaa er Tilfældet, skjøndt det ikke er tydeligt af Billedet. Men de to andre Bægerblade og Partiet inden for dem ere tegnede nøjagtigt saaledes, som man ellers nødvendigvis maa tegne et Blad, der danner sig paa en Axe ganske simpelt uden Akselknop. Til et virkeligt Støvdrageranlæg er der intet Spor, og disse Figurer vidne altsaa ganske bestemt mod Sieler. Fig. 15—16 kunne vi forbigaa, da de fremstille Udviklingstrin, hvor alle Blomstens tre yderste Bladkredse ere helt anlagte, og de saaledes ikke kunne klare det paagjældende Spørgsmaal.

Sielers næste Billede er Fig. 17, en Blomst af *Daucus Carota*. Det viser et meget fremmeligt Udviklingstrin; men taler ikke desto mindre mod Sieler, eftersom det 5te Bægerblad aabenbart er anlagt i Form af en Udbugtning paa Skivens Rand, medens der ikke, som ved 4de Bægerblad, sees en svag vorteformet Fremragning, der er Støvdrageren, oven over det.

Og endelig er det klart, at Fig. 18 og 19 (af *Peucedanum Parisiense* og *officinale*) gjengive nøje samme meget fremmelige Udviklingstrin som Fig. 17: alle Kronblade ere komne til Syne, og ligeledes alle Bægerblade, af hvilke det 5te dog er yderst ubetydeligt, men kun de fire Støvdragere, nemlig ikke den 5te.

Som yderligere Bevis for, at Udviklingen her ikke kan sammenlignes med den hos *Euphorbia*, vil jeg imidlertid efter egne Undersøgelser tilføje en Skildring af Udviklingen af Blomsterne hos *Daucus Carota* (Fig. 25—31, XI).

Fig. 25 er det yngste Trin, paa hvilket man bestemt kan paapege en Nydannelse, skjøndt Blomsten allerede, før den bliver saa stor, antager en trekantet Form. Ved s^1

træder nemlig det første Bægerblad frem, men Axen hæver sig inden for det ikke paa nogen anden Maade end enhver anden Axe, paa hvilken et Blad uden Akselknop er blevet anlagt (t. Ex. paa Blomsten Fig. 29, **VII**, eller Blomsterne Fig. 18 (III), 23, 27 etc. **VIII**, etc.), og allerede træde tillige de to andre Hjørner saa stærkt frem, at man godt kan sige, at Epiblastemer der ere i Færd med at anlægges.

Paa det næste Trin sees nu ogsaa ganske tydeligt 1ste Støvdrager (*st*, Fig. 26) komme frem som en kredsrund Vorte oven over Bægerbladet s^1; men allerede træder s^3 saa tydelig, som vel muligt, frem som et virkelig anlagt Blad; s^2 træder nu mindre frem end før, hvilket jeg antager staar i Forbindelse med, at Kronbladene til højre og venstre for det allerede ere i Fremkomst. I Fig. 27 vil man nemlig allerede bestemt kunne paapege dem (*p*), og paa dette Trin er ogsaa st^2 kommen tydeligere frem igjen.

I Fig. 29 vil man se 3die Støvdrager anlagt, men allerede er det 4de Bægerblad kommet til Syne, lige som ogsaa et tredie Kronblad (mellem s^1 og s^3).

I Fig. 30 er den 4de Støvdrager med Nød og Næppe til at opdage oven for s^4 paa den nu svagt indhvælvede Blomsterbund, men allerede træder 5te Bægerblad bestemt frem.

Endelig se vi i Fig. 31 den hele Blomst anlagt (med Undtagelse af Frugtbladene), og den 5te Støvdrager er nu ogsaa netop kommen til Syne, saa vel som alle Kronbladene.

Resultatet af disse Undersøgelser, der nøje stemme med Sielers, naar vi kun holde os til hans Figurer, er altsaa, at Støvdragerne ganske vist anlægges efter en Spiral, men at de alle komme senere til Syne end det Bægerblad, som de staa lige for. Jeg har saaledes fundet, at Sielers Afbildninger ere naturtro, men at hans Beskrivelse af Udviklingen er ukorrekt. Naar Petersen (ifølge Bedømmelsen af hans Afhandling i Vidensk. Selskabs Oversigter) altsaa mener, at der i Blomsternes Udvikling hos visse *Umbelliferer* haves et Analogon til *Euphorbia*-Koppens Udvikling, da kan jeg foreløbig aldeles ikke indrømme Rigtigheden heraf; thi hverken anlægges Bægerblad og Støvdrager samtidigt, ej heller danne de som hos *Euphorbia* et Dobbeltorgan derved, at de ere forenede ved deres Grund. Lægger man et Længdesnit gjennem en Blomst, vil man vel faa et Billede som 28, **XI**, hvor de to til venstre staaende Organer, *s* og *st*, ere et Bægerblad og en Støvdrager. Tilsyneladende ligne de fuldstændigt et af *Euphorbias* unge Kopdækblade med dets Støvdrager (se t. Ex. Fig. 28, **IX**, af *E. Lathyris*), men man har let ved at overbevise sig om, at Dalen mellem dem aldeles ikke ligger højere end den øvrige Overflade af Blomsten, som ligger til Siderne for den, at de to Organer altsaa aldeles ikke ere forenede ved deres Grund.

Jeg tror saaledes endnu at turde paastaa, hvad jeg udtalte i min Disputats, at der hidtil ikke er publiceret nogen Udviklingshistorie — det jeg ved — af nogen Blomst, som fuldstændig ligner *Euphorbia*-Koppens. Men dermed være ikke sagt, at en saadan ikke

skulde kunne findes, og jeg skal tillade mig selv at paapege, hvor dette rimeligvis vil være Tilfældet.

Hieronymus, der ikke gaar ind paa dette Punkt om Spiralfølgen, men endog taler om «Wirtel», har henvist til *Hypericineer* og andre Familier med sammensatte Støvdragere som Planter, der skulle byde os gode Analogier med Hensyn til Støvdragergrupperne i Koppen. Om dette Punkt skal jeg straks tale (S. 126). Han har dernæst ligeledes henledet Opmærksomheden paa, at Støvdragerne undertiden anlægges samtidigt med deres neden for stillede Kronblade og saaledes, at de med disse danne en oprindelig udelt Cellemasse («Primordium»), og i alt Fald, selv om det sidste ikke er Tilfældet, ere forenede med dem ved deres Grund (se t. Ex. Fig. 22, **XI**, *p* og *st*, af *Hypericum hircinum*). Dette har man nu længe vidst. Men derimod synes ikke blot han og Payer, men ogsaa alle andre at antage, at alle fem af Krone og Støvblad dannede Dobbeltorganer anlægges samtidigt og i en Kreds[1]), hvilket imidlertid næppe er rigtigt. Min Fig. 20, **XI**, vil nemlig vise, at en tydelig Spiralfølge udtaler sig i Støvbladenes og Kronbladenes Størrelse og Udviklingtrin. Paa alle andre Præparater har jeg fundet den samme Spiral, men desværre kjender jeg ikke de allerførste Udviklingstrin. Jeg tvivler imidlertid ikke om, at «Primordierne» til de forenede Kron- og Støvblade virkelig dannes succedant. I saa Fald er Ligheden mellem *Euphorbia*-Koppens og *Hypericum*-Blomstens Udvikling langt større end mellem hins og *Umbelliferernes* eller alle andre kjendte Blomsterudviklinger. Dog er den ikke fuldkommen; thi den unge Støvdrager i *Hypericum*-Blomsten har ikke *Euphorbia*-Støvdragerens regelmæssige, med Kaulomernes saa overensstemmende, Bygning, og at Forbindelsen mellem Perigonblad og Støvblad her ogsaa er af en løsere Art, fremgaar deraf, at der er Arter, hos hvilke der kun findes 3 Støvblade, som ikke staa over og ere forenede med Perigonblade. Endelig er ogsaa Anlæggelsen af Smaabladene paa hver Støvdrager ganske anderledes end Dannelsen af Støvdragerne i *Euphorbias* Grupper.

Hvad har fremdeles flest Analogier for sig, at Støvdragerne hos *Euphorbia* ere Hanblomster i en Art Blomsterstand eller Blade i et sammensat Støvblad?

Her mener min ærede Konkurrent imidlertid i Modsætning til Hieronymus og mig, at Udviklingshistorien ikke har leveret noget Bevis for, at ikke alle Støvdragerne udgaa fra samme Axe[2]). Jeg ved nu ikke, om han dermed mener, at alle Støvdragerne sidde paa Koppens Hovedaxe og kun ere forenede ved deres Grund derved, at de i Fællesskab hæve sig op fra Blomsterbunden. Men da det i alt Fald er en Mening, som En og Anden godt kunde tænkes at have, vil jeg kortelig berøre den.

Hieronymus udtaler bestemt (l. c., S. 205), at mindst den større Del af Dannel-

[1]) Cfr. Organogénie, Tab. I. Payers Skildring af Udviklingen er iøvrigt urigtig.
[2]) Oversigt over det Kgl. Vidensk. Selsk. Forhandlinger, 1872, S. 25.

sesvævet for hver følgende Støvdrager tages ud af Basis af den forangaaende, med andre Ord, den ene Støvdrager er Moder til den anden. Jeg mener nu ogsaa, at mine Figurer i min Disputats tydeligt nok (t. Ex. Fig. 16, II, Fig. 17, III) vise, at 2den Støvdrager er en Udvikling af 1ste Støvdrager, og mine histologiske Billeder, Fig. 17 og 25, IX, stille det i et endnu klarere Lys. Opstaar Støvdrager st^2, st^3 etc. virkelig frit paa Blomsterbunden, maa man ogsaa kunne træffe dem der i deres allerførste Tid; hvad Støvdrager st^2 i alt Fald angaar, har det, som allerede anført, aldrig været mig muligt at træffe den i de almindelige 5-tallige Kopper anderledes end som en Nydannelse paa den 1stes Side. Men den, der paastaar, at de ikke udvikle sig den ene af den anden, maa være i Stand til at vise, at st^2 oprindelig altid er fri af st^1. For de senere Støvdrageres Vedkommende bliver det ganske vist, som alt anført ovenfor, endnu vanskeligere at vise Nedstamningen, og man maa indrømme, at i alt Fald for en Del navnlig de yngre Støvdragere i hver Gruppe tilsyneladende staa selvstændigt paa Koppens Axe. (Jeg vil iøvrigt, til Belysning af Vanskelighederne ved Spørgsmaalets Afgjørelse, minde om Forholdet hos *Curcurbitaceernes* Slyngtraad og hos *Anthemis's* Dækblade). Er Spørgsmaalet vanskeligt at afgjøre ved direkte Iagttagelse, bliver Henblikket til Analogierne saa meget vigtigere.

Spørgsmaalet maa da blive, hvor vi andensteds træffe Dannelser af en ganske lignende Natur, som med Hensyn til Stillingsforholdene ganske stemme med *Euphorbia*-Støvdragerne, og med Hensyn til hvilke man kan være i Tvivl om, hvorvidt de nedstamme fra hverandre eller udgaa fra *en* fælles Axe, og vi skulle da se, hvem der finder flest Analogier, de der antage Støvdragerne for Blade, eller de, der anse dem for Knopper.

Naar man vil betragte Støvdragerne som Blade, og hver Støvdrager som staaende uafhængig af de andre paa Blomsterbunden selv, opstaar straks det meget naturlige Spørgsmaal: hvorledes skulle vi da opfatte den Omstændighed, at de danne Grupper? Andre Steder, hvor Støvdragerne ere gruppevis ordnede, viser det sig, at vi have med sammensatte Blade at gjøre. Analogierne tale altsaa for, at *Euphorbias* opfattes paa samme Maade.

Hieronymus henviser ogsaa til de «mannigfaltig verzweigten Staubblattbildungen, wie sie ausser bei den genannten *Hypericineen* auch bei *Tiliaceen* und *Malvaceen* vorkommen» saavel som til de ifølge ham svikkelagtig forgrenede Kopskæl hos *Euphorbia*. Jeg maa her tildels holde mig til Payers Afbildninger (i «Organogénie de la fleur»), da jeg ikke selv har kunnet gaa alle disse Forhold efter (hvilket H. vel heller ikke har).

Hos *Hypericineerne* er Ligheden med *Euphorbia* meget fjern, thi som Payers (Tab. I) og mine Tegninger (Fig. 20, 21, 23, XI) vise, danner der sig *en* stor oval morteformig Fremragning, paa hvis Sider og Ryg Støvdragerne komme frem. De sidestillede staa lige over for hverandre som Fligene i de sædvanlige sammensatte Blade (Fig. 20, 23), ikke alternerende som hos *Euphorbia*.

Hos *Tiliaceerne* (Payer, Tab. 4 og 5) danner der sig som hos foregaaende først

en stor Cellemasse over Kronbladet, der er de parvist stillede Støvdrageres fælles Moder. Altsaa samme Mangel paa Lighed.

Hos *Malvaceerne* (Payer, Tab. 6—8) er Ligheden derimod større, for saa vidt som de enkelte Støvblade i den sammensatte Støvdrager, i alt Fald ofte, synes at staa i en Zigzagrække (t. Ex. Fig. 3, Tab. 6, Fig. 7, Tab. 7), og for saa vidt som de fem Zigzagrækker atter synes at svare til hinanden paa samme Maade som Hanblomstgrupperne i en Kop. Om deres Stilling staar i Forhold til Spiralen i Blomsterne, kan ikke sees af Figurerne. Men der er dog atter her den Forskjel, at der synes at anlægges *en* stor Cellemasse (t. Ex. Fig. 1, Tab. 6), der ikke saaledes som hos *Euphorbia* umiddelbart og saa at sige helt og holdent udvikler sig videre til den første Støvdrager, men som er alles fælles Moder.

Forøvrigt maa jeg dog ogsaa gjøre opmærksom paa, at Hofmeister (Allgem. Morph. S. 505) udtaler sig mod Payers Opfattelse af Stillingsforholdene hos *Malvaceerne*, idet han mener, at Støvdragerne alternere med Kronbladene. Derved vil nemlig, i alt Fald paa de fleste af Payers Billeder, den tilsyneladende Zigzagordning af Støvdragerne i hver Gruppe ophæves, og Smaabladene ville som ellers komme til at staa lige over for hverandre.

Med *Mesembryanthemum*, *Dilleniaceerne*, *Cajophora* o. s. v. synes det efter Payers Tegninger at forholde sig paa samme Maade: der anlægges *en* stor Cellemasse for hver Støvdragergruppe og denne frembringer de enkelte Støvdragere ganske som et sammensat monopodialt forgrenet Blad sine Smaablade.

Jeg finder saaledes meget liden Overensstemmelse mellem de af Hieronymus nævnte Plantefamiliers sammensatte Støvdragere og *Euphorbia's* «Støvdrager-Grupper».

Det er imidlertid heller ikke Hieronymus's oprigtige Mening, at *Euphorbias* «sammensatte Støvdragere» ganske skulde ligne dem hos *Hypericineerne* etc.; han kan nemlig ikke nægte, at de, hvis de ere Blade, maa være svikkelformigt forgrenede Blade, medens hines Støvblade ere Monopodier. Han siger saaledes (Botan. Ztg. 1872, S. 203—4): «Da sich bei *Amorphophallus bulbosus* u. a. (vergl. Sachs's Lehrb., p. 160) verzweigte Blätter finden, deren Seitenverzweigungen nach Art einer Schraubel sich sympodial entwickeln, so wird man, zumal es feststeht, dass wenigstens der grössere Theil des Bildungsgewebes jedes folgenden Antherenträgers bei *Euphorbia* aus der Basis des vorhergegangenen genommen wird, die Gruppe von Antherenträgern als eine Blattwickelbildung auffassen können».

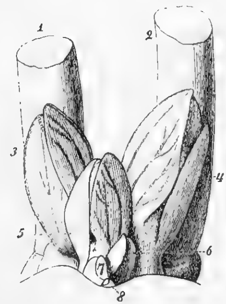
Det er aldeles upassende, at give disse Bladforgreninger Navn af «Schraubel», hvad Sachs og efter ham Hieronymus gjøre; skulde de kaldes noget, maatte det være «Sichel», «Drepanum» (Buchenau). Men hverken «Sichel» eller «Schraubel» kan anvendes som Benævnelse for Forgreningen i *Euphorbia's* Støvdragergrupper, og jeg vover at tro, at der næppe kjendes noget virkeligt Blad, hvis Forgreningsmaade modsvarer den, som forefindes

hos *Euphorbia's* Støvdragere[1]. Men i Modsætning hertil frembyde Kaulomerne i deres Forgrening og Stillingsforhold talrige Analogier, hvad jeg nu skal paapege.

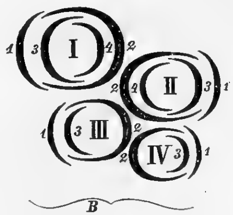
Hieronymus indvender mod min Svikkeltheori, at Støvdragerne ikke alle uden Undtagelse ere stillede paa samme Maade i Forhold til Støttebladet og Hovedaxen. Jeg skal gjerne indrømme, at virkelige «cymæ scorpiodeæ», modsvare Grupperne ikke, eftersom dette er Tilfældet, men forøvrigt ser jeg ikke, hvorfor man kan forlange, at axile Antherer skulle være mere ensformigt uddannede efter to modsatte Sider end Blomsterne i en *Symphytum*-Svikkel.

Men selv om jeg saaledes ikke vil staa fast paa, at *Euphorbia's*-Støvdragergrupper ere virkelige «cymæ scorpioideæ», saadan som vi i Almindelighed finde disse byggede og stillede i Forhold til deres Støtteblade, maa jeg dog blive ved det, at vi finde de fleste og bedste Analogier for dem blandt Kaulomer, navnlig i visse Planters saakaldte «cymæ seriales», af Andre benævnede «gemmæ accessoriæ»[2].

Jeg har allerede i min Disputats henvist til Overensstemmelsen mellem *Euphorbia's* Støvdragergrupper og de i *Aristolochia Clematitis's* Bladaksler stillede Grupper af Blomster eller vegetative Knopper, og jeg henviser atter her til dem[3]. Alle i en Bladaksel stillede



Xyl. XIV. *Aristolochia Clematitis.* Den «seriale cyma» fra en Bladaksel, der bestaar af to Blomster (1—2) og 6 vegetative Knopper (6—8).



Xyl. XV. Samme. Grundrids af en saadan «serial cyma». I—IV, Knopper. De arabiske Tal betegne Bladene paa dem.

---

[1]) Hieronymus's Opdagelse af Kopskællenes svikkelformede Forgrening forekommer mig nemlig af meget tvivlsom Natur, og disse Dannelser maa i alle Tilfælde behandles med Varsomhed som Sammenligningsgjenstande, da de selv ere af en saa tvivlsom Natur.

[2]) Disse to Kategoriers Forhold til hinanden er iovrigt meget uklart, hvad det Følgende vil vise.

[3]) Se Videnskabelige Meddelelser, 1871, S. 81; fremdeles Bravais, Ann. d. sc. nat., Sér. II, t. VII, S. 344—45. Wydler, Bot. Ztg., 1843, Flora, 1851, S. 440; 1857, Nr. 18. Cauvet, Bull. Soc. bot. France, 1864, XI, S. 253.

Blomster udspringe fra en fælles Cellemasse, der hæver dem op over Akselen, alle udvikles i en Zigzagrække i nedstigende Orden, i Bladets Median, og ere stillede paa samme Maade i Forhold til Støttebladet og Hovedaxen — lutter Forhold, hvori de ere i Overensstemmelse med *Euphorbia*-Støvdragerne.

Lignende Grupper af Blomster findes nu, som det synes, hos t. Ex. *Gentiana lutea*[1]), hos *Thalictrum aquilegifolium*[2]), hos *Lythrum Salicaria*[3]); fremdeles ifølge Wydler mange andre Steder, saasom hos *Papilionaceæ*[4]), *Chenopodium murale*[5]), *Cardiospermum Halicacabum*, *Carex muricata*, *Menispermum Canadense*, *Galium Mollugo*, *Ballota nigra*, *Cuscuta*[6]), *Cladium*[7]) og mange flere[8]). Ørsted har[9]) gjort opmærksom paa Forekomsten af «Tillægsknopper» hos *Gleditschia* og senere mundtlig paa deres Zigzag-Stilling. Brødrene Bravais omtale ligeledes disse «déjettements alternatifts à droite et à gauche» af «Tillægsknopperne» hos *Papilionaceæ*[10]). Jeg har endelig ovenfor (S. 45) omtalt deres Forekomst hos *Medicago*, uden at jeg dog har undersøgt dem nærmere.

Disse Samlinger af zigzagstillede Knopper i *en* Bladaksel høre til Brødrene Bravais's «cimes sériales», og de bleve af dem betragtede som en ejendommelig Slags Blomsterstand; de fremhæve udtrykkeligt, at den ene Blomst udspringer af den anden[11]). Wydler udtaler ogsaa bestemt paa flere Steder, at de «accessoriske» Knopper i en Bladaksel staa i genetisk Forhold til hverandre[12]), og som en Art Blomsterstand opfattes de endelig ogsaa t. Ex. af Mohl, der udtrykkelig betegner de Grupper af Blomster, der findes i Bladakslerne af *Aristolochia* og *Cuscuta* som en «Form der Inflorescenz» (Bot. Ztg. 1844, S. 6).

Den sympodiale Axe er imidlertid i alle Tilfælde højst ubetydelig, og der er ganske bestemt Tilfælde, saaledes hos *Gleditschia*, hvor det vil have sine store Vanskeligheder at paavise den; Blomsterstanden bliver ligesom sænket ned i Stængelen, men Blomsterne

[1]) Se Bravais i Ann. des sc. nat., Sér. II, T. VII, S. 345, Fig. 39, Wydler, Flora 1860, S. 644.

[2]) Bravais, l. c., S. 345. Wydler, Flora 1857, S. 278.

[3]) Bravais, l. c., Wydler, Flora 1860, 239.

[4]) Flora, 1860, S. 21. [5]) Flora, 1856. 1857, S. 278. [6]) Flora, 1857, S. 277—78.

[7]) Flora, 1863, S. 101; Botan. Ztg.. 1843, S. 225.

[8]) Cfr. Wydler, Botan. Ztg. 1843, Nr. 14; se ogsaa min Disputats, «Videnskab. Meddel.» 1871, S. 90—91.

[9]) «Videnskabelige Meddelelser» fra den Naturhistoriske Forening, 1865, S. 246.

[10]) Ann. des sc. nat., 1837, Sér. II, T. 7, S. 343.

[11]) S. 347, l. c., hedder det: 1º) Le gemme accessoire né entre un rameau et sa feuille-mère provient de ce rameau de la même manière que celui-ci provient de la tige centrale, et sa spire génératrice a la même feuille-mère pour point de départ. 2º) Les autres gemmes accessoires inférieures proviennent de même les uns des autres; la même feuille leur sert successivement de feuille-mère.

[12]) T. Ex. i Botan. Ztg. 1843, S. 226: Der wahre Sachverhalt ist aber der, dass der dem Normalzweig zunächst stehende accessorische Zweig nicht sowohl von der Hauptachse, sondern vom Normalzweig seinen Ursprung nimmt, und dass die etwa noch folgenden accessorischen Zweige je einer von dem andern abstammen. — Navnet «accessoriske Knopper» er selvfølgeligt upassende i saadanne Tilfælde, hvor det virkelig er en Forgrening, der er Tale om; det forekommer mig at burde reserveres de Knopper, der virkelig ere Søstersnopper, idet de ere stillede paa samme Axe som Hovedknoppen, i hvis Aksel de ere fremkomne.

beholde samme Stilling og Udviklingsfølge. Der fremtræder saaledes en vis Uklarhed og Tvetydighed i disse zigzagstillede Knoppers hele Forhold, der imidlertid i høj Grad minder om det Uklare i Udviklingsmaaden af *Euphorbias* Støvdragergrupper og støtter den Anskuelse, der anser disse for homologe med dem.

Hvor nær disse «cymæ seriales» iovrigt staa de ægte «cymæ scorpioideæ», som jeg først var tilbøjeligst til at parallelisere *Euphorbias* Hanblomsterstande med, vil sees af, at de paa hinanden følgende Knopper næsten altid ere antidrome; min Fig. XV, Side 128 vil vise dette for *Aristolochias* Vedkommende, og Wydler omtaler det for denne som for flere andre Planter og gjør opmærksom paa, at Zigzagstillingen staar i nøjeste Forbindelse med Knoppernes Bladstilling (Bot. Ztg. 1843, S. 226; Flora 1857, S. 278 og 1860, S. 21—22). Den eneste Forskjel mellem dem og de scorpioide Cymæ bliver Stillingen af de enkelte Led i Forhold til Hovedaxen og Støttebladet for den hele cyma.

Nu angives det imidlertid, navnlig bestemt paa flere Steder af Wydler, at disse Knopper oprindelig staa i *en median* Række, og at det først er under deres Udvikling, at de kaste sig til Højre og til Venstre og antage Zigzagstillingen. Saaledes siger han t. Ex. (Bot. Ztg. 1843, S. 226): «Die Anordnung der accessorischen Zweige ist so weit bekannt stets eine seriale; der eine entspringt aus der Basis des anderen aus ziemlich sich entsprechenden Punkten. Die Geradreihigkeit derselben dauert aber nur einige Zeit. Mit der successiven Entfaltung der accessorischen Zweige verändern sie meist ihre ursprüngliche Lage, sie werfen sich alternative nach Rechts und Links». Hvis dette var Tilfældet, blev unægtelig Ligheden med *Euphorbia* mindre fuldkommen. Men jeg maa tilstaa, at jeg har Grund til at tvivle om, at denne Angivelse i alle Tilfælde holder Stik. Der er saaledes ikke mindste Tvivl om, at Knopperne hos *Aristolochia Clematitis* anlægges i en Zigzaglinie i nøjeste Overensstemmelse med *Euphorbias* Støvdragere, og heri ville ogsaa baade Döll og Wydler være enige med mig, eftersom de kalde disse Samlinger af Knopper hos denne Plante — Svikler, «cymæ scorpioideæ». At Mohl (Botan. Ztg. 1844, S. 6) sammenligner *Cuscuta* i denne Henseende med *Aristolochia Clematitis* synes mig at tyde hen, at Forholdet der noget nær vil være det samme som hos denne. Fremdeles tror jeg at turde paastaa, at Zigzagstillingen ogsaa er oprindelig hos *Gleditschia* og *Medicago*.

Idet jeg udtaler det Ønske, at der snart maa blive foretaget grundigere Undersøgelser af Alt det, som nu føres ind under «gemmæ accessoriæ» og «cymæ seriales», vil jeg endnu tilføje et Par Iagttagelser, som jeg har havt Lejlighed til at gjøre over nogle andre ægte seriale «gemmæ accessoriæ», der oprindelig ere, men ogsaa altid vedblive at være stillede i *en median* lodret Række; thi de vise os, at der hos saadanne findes fuldstændige Paralleler til de zigzagstillede, idet disse Knopper hos nogle ubestrideligt danne ægte Forgreninger, medens de hos andre blive saaledes sænkede ned i Stængelens Væv og træde frem saa adskilte, at Karakteren af en Forgrening næsten fuldstændig gaar tabt.

I Fig. 13, XI, har jeg afbildet Akselprodukterne af *Verbascum nigrum*; fem Blomster ere stillede i *en* Række i Akselens Medianlinie og lidt «sammenvoksede» ved deres Grund. I Fig. 11 sees den yngste Del af en lignende Række i Profil og i Fig. 12 en face. Den sidste Figur viser tydeligt, at Blomsterne staa lige for hverandre, og at Stillingen af Bladene er den samme i dem alle; tillige sees Sporene til Forbladene (β). Den første viser lige saa tydeligt, at den ene Blomst udspringer af den andens Grund, idet III her opstaar paa II. Disse Blomster, der af Morfologerne, t. Ex. Wydler[1]), findes benævnede «accessoriske (seriale)», danne altsaa ubestridelig en Blomsterstand af en egen Natur[2]).

Sammenstille vi nu denne Blomsterstand med Akselprodukterne af *Aristolochia Sipho*, finde vi Lighed for saa vidt, som Knopperne ogsaa hos denne danne *en* lodret Række, og for saa vidt, som Bladstillingen er den samme i alle Knopper; men den tydelige Blomsterstandsnatur har her tabt sig. Der sees et stort Parti, ligesom en Art plastisk Cellevæv, nedsænket i Bladakselen (Fig. 14—16, XI), og i dette anlægges Knopperne, som Figurerne vise, i nedstigende Følge; Dalene mellem dem ligge dog højere end Stænglens Overflade. Dersom man satte sig den Opgave at ville sænke hin i Fig. 13 aftegnede «cyma serialis» ned i Akselen, kunde den ikke løses paa anden Maade end netop som her hos *A. Sipho.*

Hvem har nu flest Analogier for sig, Hieronymus eller jeg? I disse saa hyppige «cymæ seriales» (Bravais) med zigzagstillede Knopper mener jeg at have fundet langt «bessere Vergleichsobjecte» for *Euphorbias* Støvdrager-Grupper end Hieronymus i de sammensatte Støvdragere eller i de svikkelformigt forgrenede Blade; han vil næppe kunne paavise et eneste Blad, som nøjagtigt modsvarer *Euphorbia*-Støvdragergruppen med Hensyn til Smaabladenes Udviklings- og Stillingsforhold; disse «cymæ seriales» modsvare dem derimod i alt. Det er herved en uvæsenlig Sag, om man vil betragte dem som en Samling af Søsterknopper, der ligesom Normalknoppen fremkomme i selve Bladakselen, eller man vil opfatte dem som dannende en egen Art Forgrening; thi hvad enten det ene eller det andet er Tilfældet, bliver Koppen at opfatte som Blomsterstand.

---

[1]) Flora 1851, S. 411; Bot. Ztg. 1843, S. 228; cfr. ogsaa Bravais med Hensyn hertil, Ann. d. sc. nat., Sér. II, t. VII, S. 345. Döll, Flora v. Baden.

[2]) Ascherson kalder denne Knopdannelse («Flora v. Brandenburg», S. 460—61): «accessorische Sprossbildung», og siger S. 21: «Endlich verdient noch die fälschlich so genannte cyma serialis Erwähnung, bei der in einer Blattachsel durch accessorische Sprossbildung mehrere Blüthen stehen (*Teucrium, Lysimachia vulgaris* L.)». Det er i lige saa høj Grad en Fejl at kalde hin extraordinære Knopdannelse hos *Verbascum* en «accessorisk Knopdannelse», som den aldeles analoge hos *Cyclanthera* (se oven for S. 73), hvad Rohrbach gjør; og dernæst turde det ogsaa være urigtigt at anse Begrebet «cyma serialis» for uberettiget af den Grund, at de saaledes benævnede Blomsterstande ingen Blomsterstande skulde være; man kan i det Højeste anse Navnet for uberettiget, fordi de i enkelte Tilfælde (hvor de ere dannede af *en* Række Blomster) stemme med de Blomsterstande, der kaldes «Sichel», og altsaa burde kaldes saaledes, hvis dette Navn var ældre.

Sammenstiller jeg nu mine Betragtninger over «Koppen», ere altsaa følgende.

Det er muligt, at hine forenede Blad- og Støvdrageranlæg ere to Blade, men der er mange Gange flere Analogier, som tale for, at de ere Blad og Akselknop, der nøje stemme med de i den florale Region saa hyppigt forekommende Former af disse.

Det er muligt, at der gjøres et voldsomt, men mærkværdig maskeret Spring fra et utvivlsomt af Blad og Akselknop sammensat Dobbeltorgan til et helt andet, der er sammensat af to Blade, men der er mange Gange større Sandsynlighed for, at Naturen ikke har lagt en saa overmaade fin Snare for Morfologens Fod.

Det er muligt, at der mellem to saadanne Blade indtræder den samme Forskjel i Bygning som ellers mellem Bladet og dets Akselknop, men der er langt større Sandsynlighed for, at Støvdrageren er det, som den ligner, nemlig Bladets Akselknop.

Det er rimeligt, at der gives Blomster, der følge *Euphorbias* Udviklingsgang, med Anlæggelse af de af Perigonblad og Støvblad dannede Dobbeltorganer i spiralbunden Følge, hvilket Tilfælde da vil tvinge os til at opgive den gamle morfologiske Grundsætning, at aldrig staar Blad i Akselen af et andet Blad, og det er muligt, at Koppen er en saadan Blomst, men der er mangfoldige Gange større Sandsynlighed for det modsatte.

Det er muligt, at hver Støvdragergruppe danner et sammensat Blad; men medens vi endnu ikke med Sikkerhed kjende noget Blad, som ganske modsvarer en saadan Støvdragergruppe i Bygning, have vi en talrig Række Analogier i de i enhver Henseende lignende hæmmede svikkellignende Blomsterstande eller Grupper af zigzagstillede Blomster og Knopper i Bladmedianlinien, som ere blevne kaldte «cymæ seriales».

Det er muligt, at der hos et eller andet sammensat Blad findes en lige saa stor Forskjel i Tid for Anlæggelsen og Udviklingen af de enkelte Afsnit i dette Blad som mellem Støvdragerne i en Gruppe hos *Euphorbia*, men der kjendes dog endnu intet saadant Tilfælde.

Det er muligt, at Frugtknuden, som paa sin lange Stilk bøjer sig ned for siden at rejse sig op igjen, er en simpel Støvvej og ikke repræsenterer en hel Blomst; men hvor finder man, som Wydler bemærker, en anden utvivlsom Støvvej, der foretager sig lignende Bevægelser? Derimod er det et ikke sjeldent Fænomen, at hele Blomster udføre saadanne.

Det er maaske muligt, at en Blomst i abnorme Tilfælde netop omdannes til et Komplex af Støvblade og Bægerblade, i hvilket hine optræde i Akselen af disse[1]), og det er altsaa muligt, at Koppen, til Trods for saadanne Monstrositeter, dog er en Blomst, men disse af Schmitz beskrevne Monstrositeter tale dog meget mere for, at den ikke er det.

---

[1]) Cfr. Schmitz, Flora 1871.

Det er muligt, at *Euphorbia* i visse Punkter nærmer sig sine fjernere Slægtninge, *Hypericineerne* o. s. v., meget mere end sine nærmeste, det er muligt, at den fjerner sig fra disse netop i et Kapitalpunkt, i det at have særkjønnede Blomster, men det er i højeste Grad usandsynligt.

Det er navnlig i allerhøjeste Grad usandsynligt, at *Euphorbias* Lighed med *Anthostema* og *Calycopeplus* skulde være en simpel Analogilighed, ikke en Homologi, selv om der kan paavises smaa Uoverensstemmelser i Udviklingen. Hieronymus's Betænkeligheder synes mig at have ringe Vægt over for de Udtalelser, som foreligge fra den Mand, der har ofret en halv Snes Aar af sit Liv paa Studiet af *Euphorbiaceerne*[1]).

Det er altsaa muligt, at Koppen er *en* Blomst, men der er mange Gange større Sandsynlighed for og mange flere Analogier, der tale for, at den er en Blomsterstand. Summen af Analogierne maa kunne betragtes som Bevis nok. Hvad enten vi se hen til selve Udviklingshistorien eller til Stillingsforholdene af Delene eller til deres indre Bygning eller til de teratologiske Tilfælde eller endelig til den komparative Morfologis Resultater, — finde vi langt flere Grunde, der tale for, at Koppen er en Blomsterstand, end for, at den er en enkelt Blomst, og tilsammentaget saa mange, at vi trøstig kunne sige: den er en Blomsterstand.

Endnu et Spørgsmaal føres vi paa en naturlig Maade til her at diskutere.

Selv om vi nemlig gaa ud fra det, at hint første saavel som alle senere Støvdrageranlæg ere unge Kaulomer, er det dermed endnu ikke afgjort, at Støvdannelsen er betroet til disse; der var jo en Mulighed for, at den først af Roeper udtalte, senere af Sachs[2]) og Celakowsky tiltraadte Anskuelse var rigtig, at vi i Støvsækkene have rudimentære Blade, at vi i den hele Støvknap maa tænke os en af Naturen udmærket godt skjult Sammenvoksning af saadanne Støvblade[3]). Vi have nys undersøgt Maaden, paa hvilken Støvsækkene dannes, og vi saa da, at hvad der bragte dem til at hæve sig frem over det oprindelige Støvdrageranlæg, var en ejendommelig Celleformering i 1ste Periblemlag; thi de inden for liggende Cellevæv tage lidet eller intet til i Volumen. Skulle vi nu heri se en ægte Phyllomdannelse, saa at vi maa indrømme, at Støvkornene opstaa som næsten alle andre Steder i Planteriget i Blade, og har Hieronymus Ret i at betegne Læren om de axile Støvdragere som «eine Erfindung»?

---

[1]) Müller, Flora 1872, Nr. 5: «Zieht man noch das zwischen beiden die Mitte haltende neuholländische Genus *Calycopeplus* in Betracht, so geht daraus, ohne dass ich hier die Sache noch weiter ausführe, geradezu die Nothwendigkeit hervor, die articulirten Stamina der Cyathien für monandrische, durch Unterdrückung des Kelches nackte Blüthen zu halten».

[2]) Lehrb. 1870, S. 402.

[3]) Steenstrup pegede som Opponent ved min Disputats hen paa det samme.

Man maa dertil svare, at vel er der den Lighed mellem Bladdannelsen i Almindelighed og Støvsækdannelsen i dette Tilfælde, at det er første Periblemlag, der væsenligst sættes i Arbejde, men de to Celledannelses-processer ere dog i den Grad grundforskjellige, at de umuligt kunne sammenlignes. Dannelsen af Støvsækken er noget aldeles enestaaende, der kun finder sit Homologon i Dannelsen af Støvsækkene i de ægte Støvblade, hvad jeg nærmere skal paavise i en senere Afhandling[1]).

Man kunde, naar man var tilbøjelig til Skepticisme, maaske endnu falde paa at mene, at muligvis kunde der jo dog være en højst ubetydelig Bladdannelse tilstede, og at muligvis ere de Celledelinger, som jo utvivlsomt finde Sted i højst ringe Antal inde i Støvdragerne i de under 1ste Periblemlag følgende Væv, virkelig et Spor til Bladudvikling; dog disse Celledelinger ere i den Grad faa, at de ere at regne for Nul, og med samme eller større Ret vilde man da i de almindelige Støvblade kunne tale om en Bladdannelse paa Bladet d. e. en Forgrening af dette, naar Knappen anlægges. Og hvem siger mig, naar vi endelig skulle indlade os paa Fantasier, om disse neden under 1ste Periblemlag optrædende Celledelinger, ikke snarest ere at opfatte som Begyndelsen til et støttebladløst Kaulom? Vi kunne lige saa godt antage dette, som at det er et Phyllom.

Den simpleste og mest ligefremme Forklaring er altid den naturligste; her byder da den sunde uhildede Betragtningsmaade at slutte, at Kaulomet selv umiddelbart udvikler Støvkornene i sit første Periblemlag paa samme Maade som Phyllomerne i de allerfleste andre Tilfælde.

En anden Tydning af Fænomenerne finde vi hos Joh. Müller[2]). Idet han iøvrigt slutter sig til min Anskuelse, at hvert Støvdrageranlæg er et Kaulom, og at hver Støvdrager repræsenterer en Hanblomst (cfr. ogsaa hans Bearbejdelse af *Euphorbiaceerne* i «Flora Brasiliensis»), fremdrager han yderligere Støttepunkter for denne Betragtningsmaade af sine mangeaarige systematiske Studier over *Euphorbiaceerne* (se ovenfor S. 133).

Men naar Müller mener, og heri finder Støtte hos Hieronymus[3]), at Støvdragerens oven for Leddet beliggende Del kan opfattes som et appendikulært Organ d. e. som et Phyllom, der er endestillet paa den neden for Leddet beliggende Del af Filamentet, der er et Kaulom, da kan jeg hertil kun bemærke, at den eneste væsenlige Forskjel mellem de to Epiblastemer, Phyllom og Kaulom, netop er deres relative Stillingsforhold, og et terminalt «Phyllom» er eo ipso et Kaulom. Var den Del af en Hanblomst, der ligger

[1]) I min oprindelige til Videnskabernes Selskab indsendte Afhandling havde jeg her indskudt nogle Undersøgelser over Støvdragernes Udvikling og Støvkornenes Dannelse hos *Cyclanthera* og nogle andre Planter; de findes refererede i Botaniska Notiser, 1871, Nr. 6.

[2]) Flora 1872, Nr. 5.

[3]) Bot. Ztg. 1872, S. 206.

oven for Leddet, et Blad, der havde udviklet sig paa en Stængelspids, men derpaa fortrængt denne og selv indtaget dens Plads som den umiddelbare Fortsættelse af den neden for Leddet liggende Del af Hanblomsten, maatte Udviklingshistorien kunne paavise dette paa samme Maade, som den kan vise, at et Blad paa Axen af *Vitis vulpina* (se min Fig. 21, VI) kan opstaa saa nær Toppen af Stængelen og udvikle sig saa kraftigt, at Stængelspidsen kan trænges ud af sin hidtidige Retning, og vi maatte kunne paavise Sporene af denne Stængelspids. Kunne vi ikke det, dannes den øverste Del af Hanblomsten virkelig som en umiddelbar Fortsættelse af den nedre Del, og det gjør den, saa har den samme morfologiske Værd som denne; er denne et Kaulom, er hin det ogsaa.

Er altsaa den Antagelse rigtig, at hvert Støvdrageranlæg er et Kaulom, maa Pollendannelsen ogsaa foregaa i et Kaulom. —

Hvad Leddet paa Hanblomsterne angaar, da har jeg i min Disputats (S. 77) udtalt, at jeg her maatte antage Pladsen for det Blomsterdække, der hos *Anthostema* virkelig er tilstede. Det glæder mig at se denne Opfattelse støttet af Müller.

Kopskællenes Natur er ogsaa underkastet forskjellige Tydninger, som jeg har vist i min Disputats. Til de der anførte kommer nu ogsaa Hieronymus's. Han antager nemlig, at Kopskællene ere «Anhangsgebilde des verzweigten Staubblattes, dessen nach unten gerichteter Blattstrahl das Perigonblatt darstellt, analog den Nebenblätter vertretenden Schuppen in der Region der Laubblätter bei *Euphorbia humifusa* etc., ... welche bei anderen Arten .... durch Drüsen ersetzt werden».

Jeg maa som Hieronymus «erkennen, dass ich jede einfachere Erklärung vorziehe»; men en Tydning som hans er langt fra «einfach», tvertimod — efter den ville de paagjældende Organer komme til at danne et af de mest komplicerede Blade i hele Planteriget: et Blad nemlig, som har en nedre med sidestillede Kirtler forsynet ikke sammensat Del, hvilken Del forenes med de tilstødende homologe Dele af Nabobladene til et sambladet Hele; som har en øvre Del, der udvikler sig til et sammensat Støvblad med svikkelformig Udvikling; som endelig har et svikkelformigt forgrenet Akselblad paa hver Side. Dèr forekommer min Tydning mig den simpleste: Kopskællene ere ganske simpelt Trichomer, som anlægges mellem Sviklerne og op paa Grunden af Kopdækket. Jeg maa her bemærke, at den anatomiske Bygning af et Organ ikke afgjør det Allermindste med Hensyn til Organets Natur; selvfølgelig er det heller intet Bevis for Kopskællenes Trichom-Natur, at de have de almindelige Trichomers Bygning og Udvikling, men naar der til dette lægges deres uregelmæssige Stillingsforhold og deres sene Fremkomst, bliver det dog det Naturligste at antage dem for Trichomer. Forresten henviser jeg til min Disputats. —

Om Hunblomsten se min Disputats S. 99. Hieronymus ser naturligvis en Discusdannelse i den lappede Valk eller Kant, der omgiver dens Basis. Hans Grund for, at den ikke skulde kunne sættes homolog med Bægeret hos *Anthostema*, at dette og hin Valk udvikles til forskjellig Tid i Forhold til Frugtbladene, kan jeg ikke tage for gyldig, efter at vi have lært, at Organerne i Blomsterne ikke altid fremtræde akropetalt, og Hieronymus selv finder heller ingen Betænkning ved at anse Kronbladene hos *Primulaceerne*, *Plumbagineerne*, *Hypericineerne* etc. for homologe, skjøndt de hos nogle udvikles efter, hos andre før den Støvdrager, som de staa lige under.

Valken under Hunblomsten anlægges og udvikles som et ægte Blad, saa at der fra den Side heller ingen Indvendinger kan gjøres mod Opfattelsen af den som et saadant. Schmitz[1]) mener, at dette Bæger dog maaske er en Discus, og at det egenlige Bæger absolut mangler, og han støtter sig her paa det Faktum, at Bægerbladene i abnorme Tilfælde fremtræde oven for den uforandrede Discus. Mig forekomme de efter hans Figurer netop at staa paa denne Discus, altsaa være Udviklinger af den, og dernæst forekommer det mig meget usandsynligt, at vi skulde have en Discusdannelse helt uden for Blomsten.

Om Ægget er talt oven for (S. 111). Jeg paaviste der, at det anlægges i 2det Periblemlag, medens Frugtbladene anlægges i det 1ste; at Kimsækken ligger i Midtlinien af den oprindelige Vorte, og at Æggehinderne ere Blade, der for en Del ere Epidermisdannelser.

Til Slutning have vi endnu det Spørgsmaal, om Kløvning af Vækstpunktet forekommer noget Sted under hele Vortemælkens Livsløb. Jeg maa besvare dette benægtende. De vegetative Knopper anlægges langt neden for Stængelspidsen i ældre Blades Aksler; om dem er der selvfølgelig ingen Tale. Knopperne til Kvastene af 1ste Orden anlægges vel paa Stængelspidsen selv, men denne rager højt op over dem og Vækstpunktet ligeledes. Kvastene af 2den Orden anlægges ligeledes paa Stængelspidsen, i alt Fald altid hvad den i 2det Forblads Aksel stillede angaar, men selv denne opstaar neden for og til Siden for Vækstpunktet. Ligesaa lidt kan der være Tale om Vækstpunktkløvning ved Anlæggelsen af Sviklerne i Koppen, eller ved Dannelsen af Æggene. Denne sidste Knopdannelse foregaar rigtignok saa nær ved Midtaxen, at Vækstpunktets Celler sikkerlig blive satte med i Arbejde, men hvert af de tre Æg staar dog tydeligt nok i Omkredsen af en lille Cirkel, hvis Centrum ligger i Axens Midtlinie, og dette Centrum hæver sig

[1]) Flora 1871, S. 438.

senere i Vejret og udvikler Æggehætterne. Der kan heller ikke være Tale om Kløvning, naar 2den Hanblomst anlægges paa 1ste (Fig. 17 og 25, IX), og endnu mindre kan jeg antage, at den muligvis kunde forekomme ved Dannelsen af de senere Hanblomster i Grupperne. Anlæggelsen af disse foregaar aabenbart ikke med saadant Liv og Raskhed hos de af mig gjennemgaaede Arter, at Vækstpunktkløvning bliver en Følge; thi den n^{te} Hanblomst har allerede en vis betydelig Størrelse, naar den $n + 1^{te}$ anlægges. Intet Sted i Vortemælkens hele Udvikling synes Kløvning af Vækstpunktet saaledes at forekomme. —

III.

Almindelige Slutningsbemærkninger.

De i det Foregaaende meddelte Undersøgelser have ganske vist til nærmeste Formaal at klare Spørgsmaalet om Forekomsten og Betydningen af Forgrening ved Vækstpunktkløvning inden for Fanerogamernes store Afdeling. Men de kunne tillige tjene til at kaste Lys over forskjellige andre morfologiske Spørgsmaal, saasom Forholdet mellem Phyllom og Kaulom, Akselknop og Støtteblad, over Stængelspidsens almindelige Bygning, Æggets morfologiske Værd, m. m. Skulde jeg nu kortelig sammenstille de forskjellige almindelige Resultater, til hvilke jeg tror, at mine Undersøgelser kunne føre, da ere de følgende.

Stængelspidsens Form. Stængelspidsen kan have de forskjelligste Former fra høj kegleformet med temmelig stejle Sider (*Graminaceæ*, *Plantago*, *Amarantus*[1]) til krater- eller kjedelformig fordybet (*Digitalis*), og Formen kan være meget forskjellig selv hos Arter, der tilhøre samme Slægt (*Digitalis*-Arterne).

I sjeldne Tilfælde er Stængelspidsen paa monopodiale Axer (*Utricularia*) krummet, og Stængelen derfor bispestavformigt indrullet. Paa Pseudo-Monopodierne hos enkelte *Asperifoliæ* (saasom *Tiaridium*) antager den en lignende Form.

Planter med modsatte Blade have oftest en fladere og lavere Stængelspids end de, der have spredte Blade. Ligeledes er den i Regelen lavere i den vegetative Region end i den florale. Hos *Digitalis pauciflora* er den lav konisk i den vegetative Stængel, kraterformet i den florale. Mange Vandplanters Stængelspids synes efter mine egne og Andres Iagttagelser altid at være høj og stejl.

Stængelspidsens Bygning. Mine Undersøgelser have med Hensyn til Stængelspidsens Bygning væsenlig kun bragt Bekræftelse af Rigtigheden af de i Hansteins betydningsfulde

---

[1]) Se ogsaa Fig. 109, S. 132, i Sachs's Lehrb., 1870, Stængelspids af *Hippuris vulgaris*, og Fig. 1, Tab. 8, Ann. d. sc. nat. Sér. V, tom. 7. 1867, Stængelspids af *Carex pendula*.

Arbejde, «Die Scheitelzellgruppe im Vegetationspunkt der Phanerogamen», nedlagte Iagttagelser.

Hos alle de af mig undersøgte angiosperme Planter har jeg fundet Stængelspidsen beklædt med et «Dermatogenlag», som er skarpt begrænset ned ad til, kun deler sig ved radiale Vægge, og som tillige beklæder alle nydannede Kaulomer og Phyllomer. En Topcelle med en Væsensbestemmelse eller en Form, som den vi finde hos Kryptogamerne, forekommer intet Sted, *Utricularia* ikke undtaget. Dermatogenet er det af Stængelens tre Meristemsystemer, der er det konstanteste og skarpest udprægede; det mangler aldrig selv i de Tilfælde, hvor Periblem og Plerom smelte sammen[1]).

Under Dermatogenet dannes Stængelspidsen i meget sjeldne Tilfælde af et aldeles uordnet Meristem, i hvilket der ikke findes Spor til Cellelag eller Cellerækker (*Digitalis*, Slyngtraaden hos *Cucurbita*). Det er i dette Tilfælde ikke muligt at paapege en som Hansteins Topcellegruppe d. e. som det egenlige Vækstpunkt speciel udpræget mindre Cellegruppe.

I alle andre Tilfælde har jeg under Dermatogenet fundet et mere eller mindre ordnet Cellevæv, ganske i Overensstemmelse med Hansteins Iagttagelser; yderst nemlig fra 1—7 Cellelag, som kappeformigt overtrække Stængelspidsen, «Periblemlagene», og hvis Celler i Stængelspidsen selv i Regelen kun dele sig ved radiale Vægge. Inden for dem udfyldes Stængelen oftest straks af et «Plerom», hvis Celler ere ordnede i Rækker.

I Periblemet er det ikke lykkedes mig at finde nogen enkelt Celle eller en Gruppe af Celler, som ved deres Form og Delingsmaade udmærke sig frem for de andre, og som særligt kunde betegne Periblemets Vækstpunkt. Men de i Rækker ordnede Pleromceller ende foroven i en Gruppe af Celler, hvis Delinger foregaa i alle Retninger, og som derfor træder frem som et mere eller mindre uordnet Væv.

Denne Pleromets «Initialgruppe» (Hanstein) er i enkelte Tilfælde temmelig bestemt begrænset og tæller kun et ringe Antal Celler. Dette er Tilfældet for det første med de svage og tynde Stængelspidser hos *Graminaceæ* og *Utricularia*, i hvilke saavel Periblemlagene som Pleromrækkerne ere meget faa i Antal, og i hvilke jeg altid har fundet en ordnet Cellebygning; hos den sidstes «Ranker» indtræder der endog det Tilfælde, at Pleromet ender i en enkelt Topcelle, der deler sig ved horizontale Vægge, hvilket jeg dog maa betragte som et uvæsenligt Forhold, der er fremkaldt ved Pleomrækkernes ringe Antal[2]). En Plerom-Topcelle, der skulde dele sig som Kryptogamernes Topceller ved hældende Vægge findes ikke her, og Sanios Angivelser med Hensyn hertil trænge vel til Revision.

Men selv i de kraftige og cellerige Stængelspidser fremtræder der undertiden en

---

[1]) Cfr. endvidere: Hanstein, Die Entwickelung des Keimes bei den Mono- und Dicotylen. 1870.

[2]) Jeg maa foreløbig betragte disse Ranker som Grene. Rigtignok kan der jo gjøres forskjellige Indvendinger herimod, hvad Sachs gjør opmærksom paa.

temmelig faacellet Pleromminitialgruppe med en høj Grad af Regelmæssighed, saasom hos *Sisymbrium* og *Euphorbia*, naar disse Stængelspidser nemlig have et stort Antal Periblemlag og tæt til disse grænsende Pleromrækker og i det Hele en regelmæssig Bygning[1]).

Thi i andre Tilfælde ere saadanne Stængelspidser mindre regelmæssige (*Asclepias*, ældre Kurvlejer hos flere *Compositæ*, *Amorpha*, *Delphinium Consolida* o. fl.). I saadanne finder det Forhold Sted, at der ingen skarp Grænse gives mellem de kappeformige Cellelag og de mere lodrette Cellerækker, hvad Hanstein ogsaa gjør opmærksom paa. I disse Tilfælde, lige som i de nys omtalte Tilfælde hos *Digitalis* og *Cucurbita*-Slyngtraaden, i hvilke der aldeles ingen Forskjel er udtalt mellem de Stængelspidsens Indre udfyldende Væv, er det altsaa umuligt at adskille Periblemet fra Pleromet i Stængelen, naar man alene vil tage disse Vævs Bygning i Stængelspidsen i Øjesyn.

Men selv i de Tilfælde, hvor der er en meget regelmæssig Ordning af Cellerne i Stængelspidsen, lades man ofte i Tvivl om, hvor vidt en Cellerække skal regnes med til de kappeformige Lag eller til de rækkeordnede Celler; man faar paa mange Steder (*Sisymbrium*, *Graminaceæ*, *Hydrocharidaceæ*, *Utricularia* etc.) det Indtryk, at Periblemlagene kun ere Pleromrækker, som for oven kappeformigt slutte sig sammen, og Pleromrækkerne kun Periblemlag, der for oven løbe over i hverandre og derfor afbrydes af og ende i en mere uordenlig Cellegruppe. Pleromet i en Knop nedstammer jo desuden i de fleste Tilfælde fra Periblemlagene (i *Utricularias* Rækker endog fra 1ste Periblemlag alene), hvorved en Overgang fra det ene i det andet bliver let at forstaa.

Jeg maa derfor slutte, at den Væsensforskjel, der ifølge Hanstein existerer mellem Periblem og Plerom, idet hint er det Lag, hvorfra Phyllomer og Kaulomer og hele den primære Bark fortrinsvis nedstamme, medens dette er Moderlaget for Fibrovasalsystemet, i mange Tilfælde ikke finder et Udtryk allerede i selve Stængelspidsens Bygning, et Forhold som Hanstein iøvrigt ogsaa bestemt fremhæver i «Die Scheitelzellgruppe», S. 128[2]).

Et andet Spørgsmaal er det dernæst, om den skarpe Udprægning i kappeformede Lag og i Rækker, der kan paavises paa mange andre Steder, falder sammen med den virkelige Udprægning af Periblemets og Pleromets Modermeristem; jeg har ikke i tilbørlig Grad kunnet henvende min Opmærksomhed paa dette Forhold, men har dog ingen Grund fundet til at tvivle paa Rigtigheden af Hansteins, Schmitz's og Reinkes Angivelser med Hensyn hertil[3]).

---

[1]) Foruden til de nævnte kan der ogsaa henvises til *Melilotus*, *Cucurbitaceæ*, *Veronica virescens*, unge Kurvlejer hos *Compositæ*, etc.

[2]) «Wo dagegen die inneren Periblemlagen durch unregelmässige Zellentheilung der Form nach in das Plerom übergehen, dürfen wir umgekehrt im Auftreten des Procambiums die natürliche Grenzlinie des Pleroms erkennen».

[3]) Jeg har derfor heller ingen Grund fundet, til ikke i denne Afhandling at vedblive med Benævnelsen «Plerom» for de (paa Længdesnit) udprægede Cellerækker, «Periblem» for de tydelige Cellekapper.

Forholdet mellem Stængelspidsens ydre Form og indre Bygning. Jeg har allerede omtalt, at der i slanke og høje Stængelspidser altid synes at forekomme en regelmæssig Bygning med faa Periblemlag og Pleromrækker (*Graminaceæ*, *Utricularia*); at Bygningen i lave og brede Stængelspidser oftest er mindre regelmæssig, Periblemlagene faa i Antal og Grænsen mellem dem og Pleromet udvisket (*Delphinium*, *Veronica*, flere Kurvblomster o. s. v.), men at dette ikke er en nødvendig Følge af Stængelspidsens Form sees tydeligt af t. Ex. *Rudbeckias* Kurvleje og *Daturas* Blomsterbund.

Epiblastemerne. Under den neutrale fælles Benævnelse «Epiblastem» indbefatter jeg alle de laterale eller ved Kløvning dannede Organer, der opstaa exogent paa Stængelen, af dennes yderste Cellelag. Mine Undersøgelser her gjælde navnlig Phyllomerne og Kaulomerne. Om Trichomerne skal jeg i en senere Afhandling meddele forskjellige Bemærkninger, her kun den, at *Utricularia* er den eneste Plante, hos hvilken jeg har fundet Trichomdannelse paa Stængelspidsen, altsaa oven for de andre Epiblastemer, der have højere Rang.

Phyllomerne. Bladene anlægges i de allerfleste Tilfælde paa Stængelspidsen. I enkelte Tilfælde anlægges de derimod neden for allerede dannede Kaulomer (de svagt udviklede Dækblade i Blomsterstande hos visse *Cruciferæ*, *Compositæ*, *Graminaceæ*, *Umbelliferæ*, *Papilionaceæ*, *Valeriana*, *Cucurbitaceæ* etc.). Her kan ogsaa erindres de ikke sjældne Tilfælde, i hvilke Blade i unge Blomster interkaleres mellem ældre Blade; men saadanne Interkalationer eller overhovedet Dannelse af Phyllomer neden for ældre Phyllomer eller Kaulomer synes ikke eller dog meget sjældent at forekomme inden for Fanerogamernes vegetative Region, navnlig ikke saaledes, at det er langt neden for Stængelspidsen, at de interkaleres.

Naar den enarmede Slyngtraad hos *Cucurbitaceerne*, t. Ex. hos *Bryonia*, opstaar langt fra Stænglens Vækstpunkt og dog bliver opfattet som værende et Blad, da maa jeg gjøre opmærksom paa, at denne Opfattelse næppe er rigtig, for saa vidt som den ikke er Blad alene, men en Knop («extraaxillær») med sit Blad, af hvilke to dette ganske vist er det dominerende, medens Knoppen er yderst reduceret og i mange Tilfælde ikke kan paavises paa den udvoksne Slyngtraad. Det er navnlig Analogien med den flerarmede Slyngtraad, der nøder til denne Opfattelse (Se iøvrigt neden for om de «extraaxillære Knopper»).

Her kan man ogsaa erindre Forholdet hos *Calliopsis tinctoria*, hos hvilken smaa Løvblade undertiden tilsyneladende opstaa exogent paa Stænglens Sider, — det er imidlertid kun tilsyneladende, hvad Al. Braun bestemt udtaler[1]).

[1]) «Solche kleine Blätter scheinen oft unmittelbar aus dem Stengel der Mutterpflanze hervorzuwachsen; allein bei genauerer Untersuchung zeigen sie stets am Grunde einen kleinen, oft wenig bemerkbaren,

Phyllomerne anlægges i alle Tilfælde i de yderste Periblemlag. Naar Hanstein[1]) anfører, at de opstaa i 2det—4de Periblemlag, da er dette vel rigtigt, men jeg tror dog at kunne sige ikke blot, at det er en Undtagelse, naar 1ste Periblemlag ikke, med tangentiale og andre Slags Celledelinger, tager Del i Dannelsen af navnlig de florale Blade, som jeg mest har beskjæftiget mig med, men endog, at det ved disse fortrinsvis og i visse Tilfælde alene er dette Periblemlag, der er virksomt. Det sidste er navnlig Tilfældet med de svagere udviklede Blade, saasom Dækbladene i forskjellige Blomsterstande af t. Ex. *Anthemis* og andre *Compositæ*, *Sisymbrium*, *Graminaceæ*, *Chærophyllum*, *Anthriscus silvestris* og andre Skærmplanter, *Vallisneria*, *Hydrocharis*, *Euphorbia*, o. fl.

Dermatogenet deltager paa en væsenlig Maade i Dannelsen af en Del navnlig florale Blade. Efter mine egne Undersøgelser saaledes i Spatha af *Vallisnerias* Blomsterstand, i Græssernes Ligula, ved Anlæggelsen af Dækblade i Græsblomsterstandene og (i alt Fald undertiden) hos *Rheum compactum*, i Kronen af *Compositæ*, i Kron- og Bægerblade hos *Acacia armata*, i Dækblade og Kronblade af *Plantago major*, i Dækbladene af *Gladiolus communis*, Forblade og Dækblade hos *Zannichellia*.

Fremdeles ifølge Hieronymus hos *Brizula*[2]), ifølge Caspary hos *Elodea*, og det vil sikkert vise sig mange andre Steder i Dækblade, Blomsterdækblade, Akselblade, tynde Forblade hos Monokotyledoner, at Bladet for sin allerstørste Del er dannet af Epidermis.

Endelig bør ogsaa Æggehinderne paa en Mængde Planter nævnes her, saasom hos *Euphorbia*, *Chrysosplenium alternifolium*, *Scrophularia nodosa*, *Myogalum nutans*, *Zannichellia macrostemon*, der alle er nærmere betragtede oven for. Se herom ogsaa Schmitz[3]) og Sachs[4]). —

Bladenes Voksemaade har jeg ikke nærmere undersøgt; dog synes de altid som unge at vokse især i Spidsen og Randen, og paa radiale Længdesnit gjennem dem vil man oftest se et Mesophyl dannet i Spidsen (under Dermatogenet eller et kontinuerligt Periblemlag) af en eller to Celler eller Cellerækker, der ned ad til formeres ved fortsat Spaltning.

Forgreningen hos de fleste Blade er ægte Sideforgrening. Kløvning forekommer i Støvdragerne af *Ricinus* (Se neden for, S. 146).

---

oft aber auch deutlich bulbill- oder knospenartig entwickelten Höcker dem sie angehören. Wenn bei dichter Drängung die Mehrzahl der Knöspchen eines Internodiums in dieser Weise Laubblätter entwickeln, so wird das ganze Internodium wie mit einem dichten grünen Rasen überzogen, der, vielleicht einzelne wenige Sprösschen abgerechnet, eine weitere Entwickelung nicht erhält».

[1]) Scheitelzellgruppe, S. 120.

[2]) Botan. Ztg., 1872, S. 206.

[3]) Botan. Ztg., 1870, S. 37—40.

[4]) Lehrb., 1870, S. 471 ff.

Prokambiets Dannelse bemærkes tidligere i Bladgrunden end højere oppe. Den finder Sted i Regelen ikke ret langt neden for Stængelspidsen[1]), men man kan dog træffe mange Blade, især af dem, der ere mindre kraftigt udviklede, mellem Stængelspidsen og det øverste Punkt i Stængelen, paa hvilket Prokambiumceller ere dannede. Der er altsaa her flere som Phyllomer udprægede Sideorganer anlagte paa den øverste Del af Stængelen, der maatte betegnes som Vækstpunkt, naar man vilde sætte Prokambiumdannelsen eller overhovedet det Sted, hvor en Udprægning i et væsenlig anderledes bygget Væv først træder frem, som nederste Grænse for dette.

Endnu tydeligere kan det sees, at anlagte og bestemt udprægede Sideorganer kunne findes oven for den øverste Prokambiumcelle, naar Hensyn tages til de Stængler, der bære bladløse Knopper, thi af disse findes oftest et stort Antal oven for den Zone, i hvilken denne er beliggende.

Jeg har allerede i Indledningen fremsat mine Grunde, hvorfor der ikke bør tages særlig Hensyn til Sideorganerne, naar man vil fastsætte Grænsen for et Kauloms Vækstpunkt, saaledes at man sætter Vækstpunktet identisk med den nøgne, oven for de yngste Sideorganer beliggende Del af Stængelen. Som jeg allerede da bemærkede, bør Hensyn alene tages til den Udprægning til forskjelligt Arbejde, som overhovedet forefindes i Stængelens Cellevæv, og herved kan den Celle, der er udpræget som Prokambiumcelle, ikke komme i Betragtning i højere Grad end den, der er udpræget som første Anlæg til et Blad eller til en Knop eller til et Trichom eller overhovedet til et hvilket som helst andet Arbejde i Stængelens Uddannelse og Opbygning[2]). Kan der altsaa paavises en Gruppe Celler eller *en* Celle, som er uddannet til det Arbejde alene at sørge for Tilførselen af nye Celler, da er denne Cellegruppe eller Celle det egenlige Vækstpunkt, og jeg har (oven for S. 8—11) givet mine Grunde, hvorfor vi maa antage, at den Hansteinske Topcellegruppe mest passende bør belægges med Navnet «Vækstpunkt».

Kaulomerne. Hofmeister har Uret i at tro, at Knopperne altid opstaa som de øverste Nydannelser paa Axerne (cfr. Indledningen, S. 24), og at Epiblastemerne anlægges paa Stængelspidsen i Overensstemmelse med deres forskjellige Rang («Dignität»).

Derimod kan jeg ganske stadfæste Rigtigheden af Sachs's Angivelser i 2det Oplag

---

[1]) Hanstein, Scheitelzellgruppe, S. 129: «In der Zone etwa, wo die ersten Blatthügel sich erheben, differenzirt sich die äusserste Schicht des Pleroms durch eintretende Längstheilung zum Procambium». Fremdeles sammesteds S. 127.

[2]) Til de oven for S. 11 nævnte Exempler paa en saadan Arbejdsdeling, der tydelig lader sig paavise oven for den yngste Sidedannelse paa Axen, kan føjes Stængelspidsen af *Ceratophyllum demersum*; thi her bemærkes «eine dem Hervortreten der Blätter schon vorhergehende verticale Gliederung des Stengels in Internodial- und Knotenscheiben» (Hegelmaier, Bot. Ztg. 1871, S. 501).

af hans «Lehrbuch», 1870, S. 125, med hvilke t. Ex. ogsaa Schacht's[1]) stemme. (Cfr. oven for S. 26).

For næsten alle vegetative Knopper gjælder det som Regel, at de anlægges længe efter deres Støtteblade og neden for andre paa Stængelen højere stillede Blade. Det er en let Sag at overbevise sig herom, og til de i den almindelige Del anførte Exempler (*Ribes*, *Asclepias*, *Graminaceæ* og mange andre) vil jeg her endnu føje et Par Iagttagelser. Hos Planter med modsatte Blade er det især let at faa Snit, ved hvilke man med stor Bestemthed kan sige, i hvilket Blads Aksel neden for Stængelspidsen Knopperne komme til Syne. Saaledes ville vegetative Knopper af *Aesculus*, *Syringa*, *Lonicera*, *Urtica*, *Phlox* o. fl., som jeg i den Henseende har undersøgt, saa tydeligt som ønskeligt vise, at der i mange Tilfælde er en 1—2—3—4 Bladpar oven for de Blade, i hvis Aksler de første Celledelinger, der have en Knopdannelse til Formaal, bemærkes. I alle saadanne Tilfælde kan der naturligvis ingen Tale være om, at denne Knopdannelse skulde ske ved Vækstpunktets Deling[2]).

Men ogsaa i Blomsterstande er det et hyppigt forekommende Tilfælde, at Blade altid ere de højest stillede Nydannelser paa Axen, og at Knopperne først komme til Syne i Bladaksler, der befinde sig et Stykke neden for Stængelspidsen (t. Ex. hos *Amorpha* og *Salix* (tvertimod Hofmeisters Angivelser), hos *Rudbeckia laciniata*, *Lupinus mutabilis*, *Veronica virescens* og andre Arter, *Digitalis pauciflora* og *lutea*, *Orchis maculata*, *Delphinium Consolida*, etc. etc.[3]).

Dernæst gives der i den florale Region af Stænglerne en Mængde Tilfælde, i hvilke en Knop er den øverste Nydannelse paa Axen, hvad enten det nu er saaledes, at den anlægges straks efter sit Støtteblad (*Plantago*, *Orchis* og *Epipactis*, *Isolepis tenella* etc.) eller samtidig med dette (*Graminaceæ*, *Cytisus Laburnum*, *Trifolium*, *Orchis mascula*, *Plantago*, *Ribes sanguineum*, etc.) eller før dette (t. Ex. *Sisymbrium*, *Brassica oleracea var. botrytis* og andre *Cruciferæ*, *Anthemis*, *Umbelliferæ*, Kvastene hos *Valeriana Phu*, Blomsterstandene af *Asclepiadaceæ*, Blomsterstande hos *Bryonia dioica* og *Cucumis prophetarum*, etc.), eller helt uden Spor til Støtteblad (Blomsterstande af *Cruciferæ*, *Compositæ* (saasom *Inula* og *Doronicum*), *Graminaceæ*, *Umbelliferæ*, *Papilionaceæ*, de akselstillede Kvaste og Blomsterstande hos *Cucurbitaceæ*, nogne Svikler hos *Solanaceæ*, *Asperifoliæ*, *Hydrophyllaceæ*, *Saxifragaceæ*, etc. fremdeles *Potamogeton* efter Hegelmaier[4]), og vist mange flere).

---

[1]) Beiträge z. Anatomie u. Physiologie, S. 25.

[2]) Sammenlign ogsaa i Sachs's Lehrb., 1870, Fig. 107—9, 126, 136; i Schachts Anatomie u. Physiologie, II, Fig. 88.

[3]) Cfr. ogsaa Sachs i Lehrbuch, 1870, S. 151, Fig. 123.

[4]) Bot. Ztg. 1870, S. 284.

Om der ogsaa i den vegetative Region forekommer Tilfælde, i hvilke Knopperne anlægges straks efter deres Støtteblade eller endog før dem, ved jeg ikke; men det forekommer mig dog rimeligt, at de af Schacht undersøgte Rhizomer hos *Corallorhiza* og *Epipogum*[1]) kunne byde os Exempler herpaa.

Det Spørgsmaal træder da frem, om alle de Knopper, som ere de øverste Nydannelser paa Axen og virkelig ere dannede paa Stængelspidsen selv, skulle betragtes som opstaaede ved Deling af Vækstpunktet, eller med andre Ord, om de Celler, der maa regnes med til den Hansteinske Topcellegruppe[2]), tage Del i Knopdannelsen, og hvorledes den Deltagelse fra deres Side da er: om Delingen af Vækstpunktet sker lige gjennem dets Midte, eller Delingsplanet falder mere eller mindre excentrisk.

I langt det største Antal Tilfælde anlægges disse Knopper, skjøndt paa Stængelspidsen, dog neden for og i alt Fald uden for Vækstpunktets (Topcellegruppens) Celler. Exempler herpaa byde mange *Cruciferæ*, *Graminaceæ*, *Compositæ*, *Papilionaceæ*, *Grossulariaceæ*, *Polygonaceæ*, *Ampelopsis* (ved Slyngtraadens Dannelse), *Bryonia*, *Cyclanthera* (i flere Tilfælde), *Solaneerne* i den almindelige Forgrening af de vegetative Stængler, *Saxifraga crassifolia* og *Solaneer* ved Dannelsen af Knopperne i de nøgne Svikler, o. s. v. Navnlig træder det tydeligt frem i de Tilfælde, i hvilke Stængelspidsen er høj kegleformet eller meget bred, at Knopperne, som opstaa paa dens Grund, ligge langt fjernede fra Topcellegruppen.

Denne Knopdannelse er aabenbart en ren Sideforgrening, der alene er forskjellig fra den først omtalte, ved hvilken der altid fandtes mindst *et* Blad oven for den yngste Knop, deri, at Knoppen træder hurtigere frem efter sit Støtteblad end hist eller endog helt mangler Støtteblad; men at dette er et aldeles uvæsenligt Forhold, fremgaar noksom af den gradvise Overgang fra det ene Forhold til det andet, som vi have iagttaget mange Steder, og den brogede Blanding, hvori disse forskjellige Forhold optræde mellem hverandre inden for samme Familie og Slægt, ja Art og Individ (man erindre t. Ex. *Graminaceæ*, *Cruciferæ*, *Compositæ*). Det kan alene betragtes som et Fænomen, der staar i Forbindelse med Plantens Metamorfose, idet Tidsforskjellen mellem Knoppens og Bladets Fremkomst bliver desto ringere, jo nærmere vi komme den florale Region.

I et langt ringere Antal Tilfælde anlægges Knopperne saa nær op mod Toppen af Stængelspidsen, at Vækstpunktets periferiske Celler tage Del i deres Dannelse; Vækstpunktet deles altsaa; den ene større Del af dets Celler arbejder, som før, videre paa Hovedaxens Forlængelse, den anden mindre Del hjælper de andre uden for Vækstpunktet beliggende Celler med Dannelsen af det nye Kaulom. Denne «Deling af Vækstpunktet»

---

[1]) Se oven for, S. 23.

[2]) Se oven for, S. 143, og Indledningen S. 8—9, hvor jeg har anført de Grunde, der tale for at kalde Topcellegruppen for, Vækstpunktet.

findes i *Cyclantheras* og *Ecbaliums* Hanblomsterstande, ved de kvastformige Forgreninger i *Cucurbitaceernes* Løvblad-Aksler, og maaske ogsaa i Kvastene hos *Valeriana Phu*, hos *Asclepiadeerne* ved Anlæggelsen af Blomsterstandene, maaske hos nogle *Umbelliferer*, som *Ægopodium*, i visse Tilfælde hos *Hydrocharis* og *Vallisneria* og hos *Vitis vulpina* saa vel ved Dannelsen af Slyngtraaden som ved dens Forgrening. Den histologiske Undersøgelse af en stor Del Blomsterstande har lært mig, at man med temmelig Sikkerhed kan antage, at en saadan ulige Deling af Vækstpunktet ikke finder Sted i de fleste Tilfælde, i hvilke Stængelspidsen er høj eller bred og Knopperne ligge langt fra dens Top.

Fremdeles kan Dannelsen af *Æggene* i *Euphorbias* Hunblomst ogsaa anføres her, fordi jeg maa antage dem for Kaulomer, og fordi de utvivlsomt for en Del anlægges i Topcellegruppens Celler; men maaske sker det snarest ved Kløvning af denne.

Endelig findes der i andre Tilfælde en virkelig Kløvning af Vækstpunktet; dets Celler deles i to (— flere) Grupper ved et Plan gjennem Midtlinien (eller flere, som støde sammen der), og hver Gruppe bliver Udgangspunkt for en ny Knopdannelse. Dette er iagttaget hos *Hydrocharis*, *Vallisneria*, i Forgreningen af Slyngtraadene og, skjøndt mindre rent, ogsaa af Hovedaxen hos *Vitis vulpina* ved Slyngtraadenes Dannelse, hos *Asclepiadaceæ* ved Blomsterstandens Dannelse, i de bladbærende og en Del dækbladløse Svikler hos *Solanaceæ*, *Asperifoliæ*, *Hydrophyllaceæ*, *Cistaceæ* og i enkelte Tilfælde maaske ogsaa i *Cyclantheras* Hanblomsterstande, og naar den ene Gren af den kvastformigt forgrenede Akselknop hos *Cucurbitaceerne* ikke kommer til Udvikling.

Kløvning findes endelig ogsaa, for at nævne et Exempel paa en Phyllomkløvning, aldeles ægte hos Støvdragerne af *Ricinus americanus*[1]).

Der er altsaa, have vi set, mangfoldige Blomsterstande, hvis Blomster mangle støttende Dækblade. Man søgte tidligere ofte, navnlig de franske Botanikere, at forklare denne Mangel ved den Antagelse, at Knopperne vare blevne anlagte ved Kløvning af Vækstpunktet, og den Opgave, hvis Løsning jeg her forsøger, stiller Spørgsmaal, der gaa i denne Retning. Andre antoge, at Bladet som sædvanligt var tilstede, men aborterede i en tidlig Alder, være sig nu paa Grund af det Tryk, som de kraftige Blomsterknopper udøvede (Godron), eller af andre Grunde, og selv om det ikke traadte synligt frem udvendigt paa Stængelen, havde Fantasien jo Lov til at tænke sig det under mange Skikkelser tilstede i

[1]) Efter Hegelmeier tillige hos Bladene af *Ceratophyllum* ved deres 1ste Forgrening; se Botan. Ztg. 1871, S. 501—2: »die erste Gabelung der Blätter wird eingeleitet dadurch, dass zwei seitlich von der Richtung der bisherigen kurzen Wachsthumsaxe gelegene Partieen dieser Periblem-Abkömmlinge sich unter gleichzeitigem Hervorgetriebenwerden und entsprechender Zellenvermehrung der bedeckenden Regionen der Aussenschicht vorwiegend zu theilen beginnen, und in Folge hiervon der Blatthöcker einen verbreiteten, weiterhin einfach ausgerandeten Scheitel bekommt«.

det Indre, hvis Bygning var aldeles ubekjendt. I den nyere Tid gjør derimod den Anskuelse sig mere gjældende, at Bladet overhovedet ikke anlægges (Hofmeister, Hanstein, Sachs). Til denne Anskuelse maa jeg slutte mig; jeg har i den specielle Del paavist et ikke ringe Antal af Tilfælde, i hvilke der end ikke var en eneste Celledeling, der kunde tydes som et Spor til Blad, og de Overgange, som vi have iagttaget hos *Sisymbrium*, *Graminaceæ* etc., vise med største Tydelighed, at Bladet lige frem svinder bort, hører op at existere under Knoppen, der ikke desto mindre er en ægte Sideknop.

De forskjellige Forgreningsmaaders Forhold til hverandre. Nogle Botanikere, saasom Schacht og Ørsted, have anset Forgrening ved Kløvning af Vækstpunktet og ved Sideknopdannelse for to meget forskjellige Forgreningsmaader. Efter min Overbevisning ere disse to Former for Knopdannelsen aldeles ikke i Væsen forskjellige fra hinanden.

Allerede den blotte theoretiske Betragtning, som vi oven for (S. 17) anstillede, førte os til den Slutning, at de paa Grund af Knopdannelsens Natur maatte kunne gaa over i hinanden, og ikke vare væsenlig forskjellige. Som Støtte for denne Theoris Rigtighed tjene nu ogsaa de Iagttagelser, som jeg har anført i den specielle Del. Thi vi have i Virkeligheden ogsaa fundet, at de forskjellige Forgreningsmaader (Knopdannelse længe efter Støttebladdannelsen eller straks efter den eller samtidig med den eller før den, neden for Stængelspidsen eller paa Siden af Stængelspidsen eller paa dens Top ved lige eller ulige Deling af Vækstpunktet) forekomme i broget Blanding aldeles jævnsides inden for forskjellige Slægter af samme Familie eller forskjellige Arter af samme Slægt, ja endog paa forskjellige Dele eller paa forskjellige Udviklingstrin af samme Art, ja selv samme Individ, med jævne Overgange i hverandre, og uden at man ellers kan bemærke Forskjelligheder i Forgreningen, eller opdage Spor til, at de forskjellige Knopdannelsesmaader spille en forskjellig Rolle i Plantens Liv. Man erindre som Exempler herpaa Blomsterstandene hos Slægterne *Doronica*, *Anthemis* og *Rudbeckia*; Blomsterstandene hos *Bryonia* og *Cyclanthera*; Forgreningen af den vegetative Stængel og Blomsterstandene hos *Solanum* og *Hyoscyamus*; Sviklerne hos forskjellige Arter og Individer af *Borragineer*; fremdeles *Hydrocharis*, hos hvilken Knopperne, hvad navnlig Rohrbach har bemærket, snart dannes ved Kløvning snart ved Sideforgrening; *Ampelideernes* Ranker; Blomsterstandsdannelsen hos *Asclepiadeerne* etc., etc. Hvad vi af Andres Undersøgelser kjende med Hensyn til Forgreningen hos de lavere Planter (man erindre det, der oven for, S. 17, anførtes angaaende *Coleochæte*-Arterne og *Metzgeria furcata*, hvortil ogsaa kan føjes en Henvisning til Knys og Magnus's smukke Undersøgelser over Forgrening hos Algerne, der ere publicerede i «Sitzungsber. naturforsch. Freunde zu Berlin» 1871—72) findes altsaa bestyrket hos de højere. Dog er Kløvning af Vækstpunktet her langt sjældnere end hos hine.

Resultatet er altsaa: der er ingen Væsensforskjel mellem Forgrening ved Vækstpunktets Kløvning og ved Sideknopdannelse langt neden for det. Det næste Spørgsmaal bliver da: Hvad betinger den ene eller den anden Forgreningsmaade? Vi kunne kun besvare dette Spørgsmaal ved at undersøge, under hvilke Forhold og paa hvilke Slags Axer Kløvningen forekommer.

Hvad St. Hilaire udtaler, at Kløvning fremkaldes ved «un plus grand degré d'énergie», tror jeg tildels at kunne bekræfte, dog maa der ogsaa tages andre Forhold i Betragtning, og Udviklingens Styrke er ikke den eneste Faktor, som spiller en Rolle.

Jeg skal saaledes for det Første gjøre opmærksom paa, at det er en stor Sjældenhed, at Kløvningen forekommer i den vegetative Region hos Fanerogamerne, ligesom det jo ogsaa er Regel her, at Knopperne anlægges, naar deres Støtteblade allerede have naaet en betydelig Størrelse. Den vegetative Region har først og fremmest den Opgave kraftigt at udvikle de for Aandedrættet og Individets Liv nødvendige Organer, og selv om dette sker med den højeste Grad af Energi, indtræder der dog ingen Forandring i Knopdannelsens Forhold.

Men jo mere vi nærme os den florale Region, desto mere bliver Knopdannelsen Maalet for Plantens Arbejde, desto hurtigere anlægges den ene Knop efter den anden, medens Bladdannelsen træder tilbage (indtil vi naa selve Blomsten). Her træffe vi derfor ogsaa de fleste Tilfælde af Vækstpunktkløvning, idet Knoppen nemlig anlægges saa kraftigt og fordrer saa megen Plads paa Stængelspidsen, at den rykker helt op til dennes Midtlinie.

Det bliver en højst naturlig Slutning, at Udviklingens større eller ringere Energi spiller en vigtig Rolle med Hensyn til Forgreningens Natur, naar man lægger Mærke til, at de svikkelformede Blomsterstande hos forskjellige Familier blive desto tilbøjeligere til at forgrene sig ved Vækstpunktkløvning, jo mere kraftige og rigblomstrede de ere. Hos de *Solané*-Slægter, som *Datura*, *Petunia* og *Scopolia*, hos hvilke det, ligesom i den vegetative Region af *Solanum*, endnu ikke er kommet til nogen egenlig Blomsterstandsdannelse, ere alle Knopperne Sideknopper. Det Samme er Tilfældet i de svage og faablomstrede Svikler af *Solanum*, *Lycopersicum* og *Saxifraga crassifolia*, ved de «seriale cymæ» hos *Verbascum* og *Cyclanthera*, o. s. v. Men næppe have vi de kraftige mangeblomstrede Svikler af *Hyoscyamus*, *Symphytum* og andre *Asperifoliæ*, *Hydrophylleaceæ* etc. for os, før Kløvningen er den normale Forgreningsmaade. Og endelig haves som et højst mærkeligt Yderled de særdeles kraftige mangeblomstrede Svikler hos *Tiaridium*, i hvilke den dichotomiske Forgrening faktisk slaar over i en pseudomonopodial; man kan paa en Maade sige, saa absurd det end synes, at Dannelsen af Axer af højere Orden fremskyndes i den Grad, at de ile forud for Axerne af lavere Orden, Sideaxerne forud for deres Hovedaxer (naar man har hele den svikkelformede Blomsterstands Udvikling fra Cymaen af i Erindring), at disse fremtræde som, ensidigt stillede, Pseudo-Sideknopper paa en Axe, der er et Pseudomonopodium.

Faa vi nu i disse svikkelformede Blomsterstande endog ganske bestemte Antyd-

ninger af, at Udviklingens Styrke og Forgreningens Livlighed influerer paa Knopdannelsens Natur, saa bliver det imidlertid klart, at disse Faktorer ingen Rolle spille andre Steder, navnlig i de monopodiale klaseformede Blomsterstande. Vi maatte jo ellers kunne vente Vækstpunktkløvning i Blomsterstandene af *Brassica oleracea* var. *botrytis*, hvor Knopdannelsen foregaar med en Livlighed som intet andet Sted, saa vel som i mange af de overordenlig kraftige Klaser hos andre *Cruciferer*, eller i de rigt forgrenede Blomsterstande hos *Rheum*, *Amarantus* o. fl. Paa den anden Side se vi jo ogsaa, at Kløvning forekommer paa Steder, hvor Forgreningen aldeles ikke gjør Indtrykket af at foregaa med nogen særlig Energi, saasom hos *Hydrocharideerne*, eller hvor den endog helt standser ved den første Forgrening, som hos Rankerne af *Vitis vulpina*.

Da man har formodet, at Fasciationer og lignende abnorme Dannelser opstaa ved Vækstpunktkløvning, har jeg undersøgt Udviklingen af Kammen hos *Celosia cristata* og af Hovedet hos *Brassica vulgaris* var. *botrytis*; hin dannes som Kurven hos en Kurvblomst, kun at «Kurvlejet» er uregelmæssigt og sammentrykt; dette ved en utrolig rask Knopdannelse; men i ingen af dem finder Vækstpunktkløvning Sted.

Naar Kaufmann[1]) siger: «Die von mir mitgetheilten Beobachtungen zeigen, dass es ausser den beiden schon bekannten Arten der Inflorescenz noch eine dritte, die der dichotomischen Inflorescenz giebt, die man bei den *Asperifolieen* und wahrscheinlich auch bei vielen anderen Pflanzen antreffen kann, und die wegen der so wichtigen Eigenthümlichkeiten in genetischer Beziehung als eine selbstständige Form betrachtet werden muss», og (l. c. S. 243) «von den sympodial verzweigten Inflorescenzen ist der Wickel wesentlich verschieden» — da kan jeg af to Grunde ikke billige denne Anskuelse.

For det første fyldestgjør man ikke Logikens Fordringer ved at inddele Forgreningsmaaderne i: monopodiale, sympodiale og dichotomiske (som Kaufmann jo aabenbart gjør). Man kan vel sætte monopodial modsat dichotomisk, eller Sideforgrening modsat Forgrening ved Vækstpunktkløvning, men et Sympodium (eller Pseudomonopodium, Kjædeaxe eller Skinaxe) kan opstaa saa vel af en Række monopodialt, d. e. som Sideknopper, anlagte Skud, som af en Række, der er dannet ved fortsat Kløvning, og Sympodiet er altsaa en speciel Udviklingsform af en Forgrening, der er opstaaet ved en af hine to Anlægsmaader[2]).

---

[1]) Nouveaux mém. de la soc. imp. des naturalistes de Moscou, XIII, 3 H., S. 248.

[2]) Forgreningsmaaderne lade sig altsaa indordne under følgende Skema:

A. Monopodial eller Sideforgrening, 1) med monopodial Udvikling, 2) med pseudodichotomisk Udvikling (under to Modifikationer), 3) med sympodial (pseudomonopodial) Udvikling.

B. Dichotomisk eller Kløvnings-Forgrening, 1) med dichotomisk Udvikling, 2) med sympodial (pseudomonopodial) Udvikling.

Men for det andet er der, som jeg nu altsaa har vist, ingen saa væsenlig Forskjel, som Kaufmann antager, mellem Forgrening ved Vækstpunktkløvning og Sideforgrening, saaledes som disse to Forgreningsmaader optræde hos de højere Planter. Jeg kan af den Grund heller ikke se nogen Nødvendighed for at forlade den først af De Candolle[1]) givne, senere af alle andre Morfologer (Braun, Schimper etc.) tiltraadte Forklaringsmaade af Sviklens Oprindelse og Forhold til den rene Kvast, og anse en dichotomisk anlagt Svikkel for saa væsenlig forskjellig fra en monopodial anlagt, at den maa betragtes som «en selvstændig Form» af Blomsterstand. —

En Betragtning af Kløvningsknoppernes senere Uddannelse vil imidlertid kaste yderligere Lys over Sviklens og i det Hele Kløvningens Natur.

Jeg har allerede i Indledningen fremhævet, at Spørgsmaalet om, hvorvidt Kløvning i givne Tilfælde forefindes eller ikke, er afgjort, saa snart Knoppernes Anlægsmaade er kjendt, og at det maa betragtes som en uvæsenlig Omstændighed, hvorledes disse Anlæg senere udvikles. Det har dog sin store Interesse at se, hvorledes de ved Kløvningen dannede Knopper senere forholde sig, fordi der derigjennem kastes yderligere Lys over Kløvningens Natur, saaledes som den fremtræder hos de højere Planter.

I intet af de af mig iagttagne Tilfælde af Vækstpunktkløvning (Dichotomi) ved Kaulomer optræde de to (— flere) Kløvningsknopper som Spejlbilleder af hinanden. Selv hos *Vitis vulpina*, hvor de to, ved Slyngtraadens første Kløvning anlagte, Knopper, uddannes ens, nemlig begge til Slyngtraade, ere de dog ikke fuldkommen overensstemmende, fordi den ene er støttet af et Blad, den anden derimod ikke. Æggene i *Euphorbias* Hunblomst dannes ganske bestemt ved Celledelinger i Topcellegruppens Celler, og maaske nærmest ved lige Deling af dem; hvis man med mig vil antage dem for at være Kaulomer, have vi dog her en næsten ren Trichotomi med fuldkommen ens Udvikling af Knopperne. Derimod er det ubetinget en ren Kløvning med lige Uddannelse af de anlagte Grene, som finder Sted hos Støvdragerne af *Ricinus*.

I de færreste Tilfælde uddannes Kløvningsknopperne til at forrette samme Arbejde; hos nogle udvikles den ene Knop til Blomst eller Blomstersterstand og den anden til en vegetativ Gren, der gjentager Moderaxens Forgrening (saaledes i Sviklerne hos *Solanaceæ*, *Hydrophyllaceæ*, *Asperifoliæ*, *Cistaceæ*, *Asclepiadaceæ*). Hos andre blive begge Knopper vel til vegetative Grene, men med forskjellig Bladstilling og biologisk Betydning (*Hydrocharideerne*).

I en Række af Tilfælde, og de ere de talrigste, træder den ene Kløvningsknop op som Akselknop i Forhold til den anden som Hovedaxe, og Støttebladet for hin træder umid-

---

[1]) Organographie, I, S. 413 ff.

delbart ind i Spiralen, som Bladene paa denne danne; den maa, som alt bemærket, betragtes som en fremskyndet Akselknop, der ved sin Dannelse fortærer det Halve af Moderaxen (hvilket navnlig træder tydelig frem, naar Kløvningen slaar over i ren Sideforgrening), og da den saaledes staar i et bestemt Forhold til et Led paa Axen, maatte her efter Magnus's Anskuelse ikke være Tale om Kløvning. Jeg har oven for anført mine Indvendinger herimod.

I anden Række Tilfælde træder den ved Kløvning dannede Knop ikke ind i Rækken af de spiralstillede Sideorganer paa Moderaxen; den danner da en saakaldt «extra-axillær» Knop. En saadan kan ogsaa optræde som ægte Sidedannelse (*Ampelidaceæ*, *Utriculariaceæ*, *Asclepiadaceæ*). Om disse Knopper se nærmere neden for, S. 161.

Kaulomernes Dannelse. Nye Kaulomer anlægges, som allerede anført, i de dybere Periblemlag af de ældre. Det er oftest Celler i 3die og 4de Periblemlag, som ved tangentiale og alsidige Delingsvægge gjøre Begyndelsen, og drive de oven for liggende Dermatogen- og Periblemlag i Vejret, idet disses Celler kun formeres ved radiale Celledelinger, og det er i kraftige Knopper altid en hel lille Gruppe af Celler, fra hvilken Impulsen udgaar.

Ere Knopperne svagere, saa udgaar Celledannelsen fra et langt ringere Antal Celler (t. Ex. hos *Graminaceæ*, *Utricularia*), og det er Periblemlag, der ligge Overfladen nærmere, til hvilke Arbejdet med Knopdannelsen overdrages; i et enkelt Tilfælde («Rankerne» hos *Utricularia*) er det endog det alleryderste Periblemlag, som alene sættes i Virksomhed (hvis disse Ranker imidlertid ikke ere Blade).

Æggene, der sikkert i de fleste Tilfælde ere Kaulomanlæg, dannes snart under 1ste Periblemlag (*Euphorbia*, *Chrysosplenium*, *Scrophularia*), snart fortrinsvis i dette (*Ranunculus acris*) i Lighed med Knopperne paa Bladgrundene hos *Salix* og *Amorpha*.

Ved Fortsættelse af Celledelingerne udpræges Meristemerne i det unge Kaulom hurtigt, saa at det snart danner en Gjentagelse af sit Moderkaulom, dog i Regelen med færre Periblemlag og naturligvis i det Hele mindre kraftigt.

Ved nye Kaulomers Anlæggelse spiller Pleromet (d. e. de i Stængelspidsen i Rækker ordnede Celler) i de fleste Tilfælde ingen Rolle; det hele Arbejde er overladt til Periblemet. I enkelte Tilfælde er det dog utvivlsomt, at ogsaa Moderaxens yderste Celle*rækker* sættes i Virksomhed og bidrage til Dannelsen af Døtreaxens Plerom; saadanne Tilfælde har jeg bemærket i Blomsterstandene af *Melilotus officinalis*, *Graminaceæ*, *Ribes sanguineum* og *Euphorbias* Kop.

Navnlig i de Tilfælde, hvor Kløvning forekommer, synes Pleromet at maatte spille en Rolle, idet det (d. e. Pleromets Initialer) i Axens Midtlinie hører op med sin hidtidige Celledelingsmaade, og der indtræder her fortrinsvis lodrette (radiale) Delingsvægge. Overalt hvor jeg i Kaulomer har forefundet Kløvning af Vækstpunktet, har jeg derfor i

Dalen mellem de to Knopper, i Axens Midtlinie, forefundet et større Antal Tver-Cellerækker (en Art Periblemrækker), end Stængelspidsen tidligere var i Besiddelse af (saaledes hos *Hydrocharidaceæ*, *Ampelidaceæ*, *Asclepiadaceæ*, *Solanaceæ* (*Hyoscyamus*), *Asperifoliæ*). Jeg maa betragte Tilstedeværelsen af disse Cellerækker i Midtlinien af den gamle Axe som et Bevis paa, at dens Længdevækst er ophørt, at Centra for den livlige alsidige Celledannelse ere forlagte til Siderne for den, at Axen er «kløvet».

Men jeg maa forøvrigt fremhæve, at jeg ikke betragter disse Cellerækker som noget for Kløvningen specifikt Ejendommeligt; thi lignende danne sig oftest (altid?) ogsaa under Dalen mellem Stængelspidsen og en paa denne anlagt Knop, skjøndt mindre talrige (cfr. Xyl. I, Fig. 18, **III**, Fig. 4, 5, 9, **I**, o. fl. ja selv mellem Knopperne oven for Akslerne hos *Aristolochia Sipho*, *m*, Fig. 16, **XI**). Derimod fremtræde de ikke paa Knoppernes Underside, hvor Vævets Bygning altid er langt uregelmæssigere. Hovedvægten maa lægges paa, hvor de ere beliggende, i Midtlinien eller uden for den.

Ved Afgjørelsen af det Spørgsmaal, om en given Knop ligger i Stængelens Midtlinie som Endeknop eller til Siden for Midtlinien, har jeg altid fundet, at Pleromrækkerne afgive et udmærket og sikkert Hjælpemiddel.

Uden at jeg i øvrigt her vil gaa nærmere ind paa Spørgsmaalet om Forskjellen mellem Phyllom og Kaulom, føres jeg imidlertid til at berøre det ved de Iagttagelser, jeg i det Foregaaende har meddelt angaaende disse Epiblastemers Dannelsesmaade.

At adskille Phyllom og Kaulom ved «konstante morfologiske og genetiske Kjendetegn» [1]) har vist sig at være en Umulighed. Vi have ogsaa i den specielle Del set, at de opstaa af samme periferiske Væv, men ganske vist i noget forskjellige Dybder, Phyllomet i Regelen i 1ste—3die Periblemlag, de svagere Blade, som Dækbladene i mange Blomsterstande, endog i 1ste Periblemlag alene; Kaulomet næsten aldrig i 1ste Periblemlag, men oftest i det 3die—4de. Dette Modsætningsforhold har sin store Betydning og kan i mange Tilfælde tages med som Kriterium ved Afgjørelsen af et tvivlsomt morfologisk Organs Natur, saaledes som vi have gjort ved *Euphorbia* (oven for S. 121); men man maa naturligvis, hvad der tilstrækkelig fremgaar af det Sagte, ikke betragte det som et absolut Kjendemærke, der i alle Tilfælde skulde kunne fælde en afgjørende Dom. Det maa meget snarere betragtes som et Forhold, der staar i den nøjeste Forbindelse med de forskjellige Fordringer, som de paagjældende Organer stille til Plads og Størrelse; jo kraftigere Organerne ere, jo mere de ere bestemte til at spille en blivende Rolle, desto mere Plads fordre de, og desto dybere anlægges de i Axen; da Kaulomerne nu næsten altid paa Grund af deres hele biologiske Forhold fordre mere Plads og Kraft, anlægges de ogsaa dybere.

---

[1]) Hanstein, Scheitelzellgruppe, S. 133. Sachs, Lehrb., 1870, S. 134.

Der er dog ogsaa andre indre Mærker, der kunne tjene til at skjelne de unge Kaulomer og Phyllomer fra hverandre, og dertil hører det, at der i Phyllomerne hurtigt anlægges Prokambium-Celler, og at deres Væv derfor langt fra har den Regelmæssighed som de unge Kaulomers, der straks faa regelmæssige Pleromrækker. Men ogsaa disse Mærker mangle naturligvis absolut Gyldighed.

Paa samme Maade gaar det med alle andre Kjendetegn, ved hvilke vi ville adskille Phyllom og Kaulom, — de have kun relativ Gyldighed og ere alle indskrænkede ved Undtagelser.

Her maa jeg endnu omtale den af forskjellige Botanikere supponerede Forekomst af endestillede Blade (Hieronymus og Müller; se oven for S. 134). Hieronymus antager, at Støvdragerne hos *Euphorbia*, *Brizula*, *Najas* etc. ere Phyllomer, der opstaa paa Spidsen af selve Axen og have fortæret denne helt og holdent ved deres Dannelse, og han tror sig berettiget til at slutte dette navnlig deraf, at man kan finde Tilfælde, i hvilke et Phyllom rykker saa nær op til Vækstpunktets Midte, at det indvirker paa Stængelspidsens Vækstretning.

Jeg vil meget gjerne indromme, at et Phyllom kan opstaa saa nær Stængelspidsens Midte, at det indvirker paa dens Retning, eller endog, hvis det er kraftigt anlagt, trænger den helt til Siden og standser den i dens Arbejde; mine Iagttagelser hos *Vitis vulpina* give os en Antydning heraf. Men noget andet er det dog at antage, at et Phyllom virkelig udvikler sig paa selve Stængelspidsens Top, af alle Vækstpunktets Celler, og mene, at det endda bør kaldes et Phyllom; for det første maa man dog kunne paavise, hvori den Forskjel bestaar, som finder Sted i Stængelspidsens Vækst og Celledannelse, før dette supponerede endestillede Phyllom opstaar, og efter at dets Dannelse er begyndt. En Forskjel maa der dog være; thi ellers reduceres det Hele jo til, at Stængelspidsen standser i sin Vækst; men en histologisk Forskjel i Udviklingen har Hieronymus ikke engang antydet Tilstedeværelsen af.

Men for det andet er det en ligefrem Modsigelse at tale om et endestillet Phyllom. Jeg finder Sachs's Bestemmelse af Begreberne Kaulom og Phyllom den eneste mulige: «Stamm (Kaulom) ist nur was Blätter trägt; Blatt ist nur, was an einem Axengebilde seitlich in der unter 1—7 genannten Weise entsteht»[1]. Et terminalt Phyllom er eo ipso en Umulighed. Vil man antage, at der gives endestillede Phyllomer, saa ophæver man aldeles Forskjellen mellem Phyllom og Kaulom; og selv om disse to Epiblastemer end maaske ere at betragte som forskjelligt udprægede Dele af samme prægløse Grundorgan

[1]) Lehrbuch, 1870, S. 134.

(Thallomgrenen), saa have de dog nu engang hos de højere Planter opnaaet den relative Selvstændighed, som vi finde hos dem, og som vi maa respektere. —

Forholdet mellem Støtteblad og Akselknop bør betragtes nærmere, fordi vi tildels heri maa søge Forklaringen af det Fænomen, som i Opgaven formodes at kunne være en Følge af Vækstpunktkløvning: nemlig de hos *Solaneerne* (og mange andre Planter) forekommende Forskydninger. Thi at disse ikke staa i Forbindelse med Vækstpunktets Kløvning, er paavist i den specielle Del; Kløvning forekommer nemlig absolut ikke der, hvor netop de største Forskydninger finde Sted, ja selv om ulige Deling af Vækstpunktet er der ikke Tale, skjøndt den Knop, ved hvilken Forskydning finder Sted, undertiden, men langt fra altid (man erindre Knoppen i Akselen af 1ste Forblad hos *Solaneerne*), opstaar paa Stængelspidsen selv. —

De fleste Knopper ere stillede i Akselen af Blade, og saa almindeligt er dette Forhold, at man har betragtet det som det eneste normale og tænkt sig, at en udsædvanlig Udviklingsmaade maatte finde Sted hos alle de Knopper, der mangle Støtteblade. Herfra skrive sig t. Ex. de franske Botanikeres mange Fantasier om Vækstpunktklovning i alle dækbladløse Blomsterstande; herfra ogsaa Opgavens Spørgsmaal, der gaar i samme Retning.

En Kausalforbindelse mellem Blad og Knop lader sig endnu ikke paavise; vi vide hverken, hvorfor de følges ad, eller hvorfor de stille sig paa den Maade i Forhold til hinanden, som de gjøre. Men at der er en inderlig Forbindelse mellem dem, er tydeligt nok. Dette aabenbarer sig hos Fanerogamerne paa to Maader: for det Første i det Modsætnings- eller Balanceforhold, der kommer til Syne mellem dem under deres Metamorfose, for det andet i den «primære Sammenvoksning», der altid existerer mellem dem fra deres Fødsel af, hvor de begge komme til Udvikling sammen.

Det første Punkt omtaltes allerede oven for S. 144. I den vegetative Region optræde Knopperne længe efter deres Blade, i disses Aksler, og Bladet er her langt betydeligere end Knoppen. I Højblads-Regionen vipper Vægten til den modsatte Side, enten pludseligt eller langsomt (som hos *Sisymbrium*), og Knopdannelsen er oftest fremmeligere end Bladdannelsen (indtil der i Blomsten kommer en ny Bølge, der, lige som den første, begynder med overvejende Bladdannelse, her endog med helt undertrykt Knopdannelse, og ender med Knopdannelse (Æggene) med meget undertrykt Støttebladdannelse).

Det andet Punkt bør her omtales nærmere. -

Hvad det vil sige, at en Knop er en Akselknop for et Blad, har Ingen, forekommer det mig, udtrykt med tilstrækkelig klare og bestemte Ord. Man træffer i Regelen kun saadanne mindre pointerende Udtryk som, at Knopperne sidde «i Vinkelen» eller

«Hjørnet» mellem Blad og Moderaxe eller i «Akselen» af Bladet[1]). Disse Udtryk ere ganske vist korrekte, men de fremhæve ikke nok det Væsenlige i Forholdet, som er det, at Akselknoppen altid sidder lige saa vel paa Bladets Grund som paa Moderaxen, eller, som man ogsaa kan udtrykke det: Bladet er stillet baade paa Knoppen og paa Moderaxen. De to Organer ere altid forenede med hinanden ved deres Grunde.

At man har vidst dette og havt det i Tanken, sees t. Ex. af Benævnelsen «Moderblad» (feuille-mère)[2]) for Støttebladet, og af de mange Afbildninger, der fremstille det saaledes t. Ex. hos Schacht i «Beiträge», Tab. I, Fig. 22, 24, 27; Tab. V, Fig. 3, hos Sachs i «Lehrbuch», 1870, Fig. 109, 121, 136 etc., og jeg har i den specielle Del vist, at det er et over alt forekommende Forhold (Man se t. Ex. Fig. 1, 2, 4, 5, I, Fig. 23, 25, II, Fig. 1, 4, 11, 25, 26, III, Fig. 5—6, 10—11, 13, 14, 18, IV, Fig. 16, VI etc. etc.). Men havde man altid havt det for Øje, vilde visse extreme Forhold næppe være blevne betragtede som saa mærkværdige eller endog misforstaaede; det ene af dem er det, at Knoppen helt og holdent eller dog for sin allerstørste Del er en Udvikling af Bladgrunden; det andet, at Bladet opstaar paa Knoppen, som det «støtter»[3]).

De Vanskeligheder, som t. Ex. Stillingen af Æggene hos *Cupressineerne* og Kogleskællene hos *Abietineerne* — paa Grunden af Dækbladene[4]) eller Stillingen af Spore-

---

[1]) Karsten siger saaledes (Vegetationsorgane der Palmen, S. 144): « ..... dass sich sehr früh, bald nach dem Erscheinen der Blattanlagen, die Anfänge von Knospen in deren Achseln d. h. an der Grenzlinie der Blattoberfläche und des nächst höheren Stammtheiles als kleine schuppige Auswüchse zu erkennen seien».

Schacht, i Beiträge z. Anatomie, S. 25: «Dass Blatt entsteht in allen Fällen unter dem Vegetationskegel einer Stammknospe; in seiner Achsel entsteht häufig, und zwar fast unmittelbar nach der Anlage des Blattes, eine Stamm- oder Blüthenknospe», og i hans Lehrbuch der Anatomie u. Physiologie, II, S. 10, hvor der netop tales om de forskjellige Slags Knopper, siges ligeledes ganske simpelt: «Die Achselknospe bildet sich dagegen in der Achsel eines Blattes».

Schleiden, Grundzüge, 1861, S. 340: «Es bleibt aber selten oder nie bei der einfachen Pflanze, sondern in den Winkeln, welche Blätter und oberer Stengeltheil machen, den Blattachseln, entstehen neue Zellbildungsprocesse, die ..... Axen- und Blattanlagen bilden, welche man zusammen Achselknospen nennt».

Sachs, Lehrb., 1870, S. 151: «Bei den Charen und fast allen Mono- und Dicotylen aber entspringen die normalen Seitenzweige aus den Blattaxeln d. h. oberhalb der Blätter, in dem spitzen Winkel, den das Blatt mit dem Stamm bildet ..... Solche Zweige werden Axelsprosse genannt». S. 528: «Die normale monopodiale Auszweigung ist axillär, die Seitensprosse entspringen in dem Winkel, den die Mediane des Blattes mit dem darüber stehenden Internodium bildet».

[2]) Dette Navn viser tillige, hvor ensidig man var i sin Opfattelse af Forholdet mellem Støttebladet og dets Akselknop, thi det udtrykker den Tanke, at Knoppen altid var afhængig af sit Støtteblad, «fødtes» af dette.

[3]) I Bedømmelsen af denne Afhandling i Vidensk. Selsk. Oversigt, 1872, S. 20, siges, at «flere Botanikere» i den senere Tid have henledt Opmærksomheden paa, at Knoppen og dens støttende Blad «altid lige fra Fødselen af ere forbundne ved deres Grund». Dette er baade urigtigt i og for sig og urigtigt refereret.

[4]) Se t. Ex. Ørsted, Videnskabelige Meddelelser fra den Naturh. Forening, 1868, S. 89 og S. 95—98.

husene paa Dækbladene hos *Lycopodiaceerne*[1]), have beredt Morfologerne, ville svinde, naar man ser hen til den i den specielle Del paaviste Dannelse af utvivlsomme Knopper helt eller dog for allerstørste Delen paa Bladenes Grund hos *Amorpha*, *Salix nigricans*, *Sedum Fabaria*, og *Ranunculus acris* (hos den sidste af Æggene paa Frugtbladgrunden), og til den omtalte normalt stedfindende Forbindelse mellem Knop og Blad. Thi dette Forhold staar da kun som det ene Yderpunkt af denne Forbindelse[2]).

Det andet danne de Tilfælde, i hvilke Bladene opstaa efter og paa deres saakaldte Akselknopper. Dette synes at finde Sted i en stor Del Blomsterstande; jeg tror saaledes at have bevist det navnlig for *Anthemis's* Vedkommende, dernæst ogsaa hos *Sisymbrium*, *Umbelliferæ*, og det forekommer sikkert mange andre Steder (hos de i det nærmest Følgende nævnte Planter o. a.), for hvilket det imidlertid ikke just er let at føre det nødvendige Bevis.

Selv om det imidlertid er sjældnere, at Støttebladet helt og holdent opstaar paa Knopgrunden, saa ere saadanne Tilfælde dog meget hyppige, da det for sin allerstørste Del opstaar der, og opstaar efter sin Akselknop, saasom i Blomsterstandene af flere *Cruciferæ*, *Graminaceæ*, *Papilionaceæ*, *Umbelliferæ*, *Orchidaceæ*, *Valerianaceæ*, *Asclepiadaceæ*, *Cucurbitaceæ* og *Euphorbias* Kop etc. Da Knoppen her er langt kolossalere end det svagt udviklede Blad, og dette tilmed for sin største Del opstaar paa Knoppen, kan det unægtelig faa Udseende af, at et paa Axen dannet Legeme «deler sig» i to nye, af hvilket det ene bliver en Knop, det andet dennes Støtteblad.

Som en saadan «Deling» af et neutralt Epiblastem i Blad og Knop er dette Fænomen ogsaa blevet beskrevet før (hvad jeg alt har berørt i den specielle Del), medens Andre have opfattet det som en «Sammenvoksning» af Bladet og Akselknoppen eller have betragtet saadanne Knopper som en ganske egen Slags, «Bladpudeknopper». Man efterse med Hensyn hertil t. Ex. Caruel (om Hunblomsten hos *Carex*, Ann. des sc. nat., Sér. V, Tom. 7, 1867) og Magnus (Sitzungsberichte naturforsch. Freunde zu Berlin, Jan. 1871), Koehne (Blüthenentwicklung bei den Compositen, S. 17—18)[3]), Wretschko (Om *Cruciferæ*, Sitzungsber. d. Wien. Akad., 1868, Bd. LVIII), Rohrbach (*Hydrocharideen*, S. 13).

Jeg har allerede i den specielle Del bemærket, at naar den store Cellemasse, der

---

[1]) Hofmeister, Vergl. Untersuch., S. 119; Mettenius, Seitenknospen bei Farren, S. 625; Sachs i Lehrbuch etc.

[2]) Af Sachs's Fig. 109, S. 132, i Lehrb., 1870, synes det næsten at fremgaa, at *Hippuris vulgaris* stemmer med de nys nævnte Planter med Hensyn til Knopdannelsen. Jeg kjender ikke de yngste Udviklingstrin af Frugtbladene og Æggene hos *Zannichellia macrostemon*; men jeg anser det for rimeligt, at Æggene her opstaa paa en Maade, der aldeles ligner den, paa hvilken de dannes hos *Ranunculus*.

[3]) Dog maa bemærkes, at Koehne udtrykkelig siger om *Callistephus chinensis*, at Støttebladet «scheinbar mit grösster Deutlichkeit erst aus dem zugehörigen Achselsprosse hervorwächst».

først viser sig, er anlagt og udpræget som en Knop, og de Celledelinger, ved hvilke det andet Organ, Bladet, træder frem, vise sig paa denne, er det ikke et neutralt Organ, der «deler sig» eller paa sin Ryg udvikler af sig Knop og Blad, men en ganske almindelig Knop, hvis «Støtteblad» opstaar paa den.

Efter Caruel gjenfindes dette Udviklingsforhold hos *Anemonerne* ved Dannelsen af deres Æg og Frugtblade[1]), idet et «homogent» Epiblastem, som han senere specielt betegner som identisk med Bladpuden «le coussinet» — «organe bien connu, quoique peu étudié» — danner sig paa Frugtbunden, og Frugtblad og Æg opstaa paa den[2]).

Med Hensyn til Forholdet hos *Anemonerne* tør jeg ikke udtale mig bestemt, da jeg ikke selv har set saa unge Tilstande af de paagjældende Organer, som nødvendigt er; men jeg kan dog ikke andet end slutte af hans egne Figurer (Ann. d. sc. l. c. Tab. VIII, Fig. 12), at Forholdet er som hos *Sedum*, *Amorpha* og *Salix*, at Knoppen nemlig udvikles af det allerede anlagte Blads Grund, og en Bestyrkelse heri faar jeg ved, at Forholdet netop er saaledes hos *Ranunculus acris* (**XI**, Fig. 5—7).

Med Hensyn til det endelige Resultat vil der imidlertid blive en betydelig Overensstemmelse mellem de to Udviklingsmaader, thi hvad enten Knoppen opstaar paa Bladgrunden eller Bladet paa Knoppens Underside, vil der fremkomme et betydeligt indskudt Fællesparti mellem deres frie Dele og den bærende Axe.

Have vi nu hint oven for paapegede Foreningsforhold mellem Blad og Akselknop i frisk Erindring, vil det Afvigende eller Usædvanlige i Forholdet, som vi træffe det her ved

---

[1]) Bull. Soc. bot. France, 1865, XII, S. XXXVIII og Ann. d. sc. nat., Sér. V, T. 7, 1867, p. 109.

[2]) «J'ai montré que la même chose existe dans les pistils des Anémones, dont la feuille pistillaire et la gemmule située a son aisselle se forment également en même temps au sommet d'un mamelon, d'abord homogène, qui se détache de la surface du torus». — Caruel synes dog at have vaklet frem og tilbage mellem forskjellige forøvrigt, saavidt jeg kan se, ikke meget afvigende Anskuelser, hvad efterfølgende Citater vise. Saaledes siger han 1865 (Bull. soc. bot. XII, p. XXXIX): «Je ne puis voir dans ceux-ci que des parties d'un même tout, confondues dans l'origine, n'acquérant une existence distincte qu'au fur et à mesure qu'elles se détachent les unes des autres».

1867 (Ann. sc. nat., T. 7, p. 111): «Je pensais alors que l'organisme en question représentait uniquement un bourgeon, qui se serait détaché ainsi d'un axe sans l'intermédiaire d'aucune feuille ou bractée axillante. Maintenant je pencherais plutôt à admettre une autre explication .... etc. Dans la base commune dont il s'agit, on aurait ainsi une espèce de coussinet *pistillaire*, *glumal*, etc., selon le cas».

1868 (Bull. de la Soc. bot. de Fr. XV, S. 28—31): «Les bourgeons ordinaires produits par la tige naissent directement sur la tige elle-même, et en général à l'aisselle des feuilles, mais seulement après que celles-ci se sont détachées de leur axe: ils sont en un mot d'une génération postérieure à celle des parties qui les produisent. Ces autres bourgeons dont je veux parler, naissent tout au contraire sur le phytogène ou mamelon terminal de l'axe dans le temps où celui-ci se forme, ils sont de la même génération que lui; leur apparition est antérieure à celle de la feuille correspondante, laquelle est, à proprement parler, un produit du bourgeon lui-même, et se trouve séparée de la tige par toute la longueur de la base première du bourgeon, qui constitue l'organe bien connu sous le nom de coussinet. On peut donc appeler pulvinaire cette sorte de bourgeons».

disse sidste «bourgeons pulvinaires» tabe sig. Det bliver da kun en paa et bestemt Metamorfosetrin af Axen indtrædende Fremtoning, der er en simpel Modifikation af et almindeligt Forhold, ja det bliver ligefrem en Nødvendighed, naar der existerer et saadant primitivt Foreningsforhold mellem Bladet og Akselknoppen, at Fænomenet maa præsentere sig saaledes, som det gjør, i det Øjeblik Bladet anlægges efter Knoppen; det bliver saavel urigtigt, at kalde det «Theilung» af *et* Epiblastem, som «Sammenvoksning» af to adskilte, som ogsaa at betragte Knopper, hos hvilke dette Forhold forefindes, som saa afvigende fra de almindelige, at de skulde fortjene et eget Navn[1]).

Iagttagelsen af disse Forhold mellem Støttebladet og dets Akselknop baner os nu paa en let Maade Vej til Forstaaelsen af det som «Forskydning», «concaulescentia», «surhaussement» etc. beskrevne velbekjendte Fænomen.

Forskydninger, ved hvilke det er Støttebladet, som findes forrykket fra sin sædvanlige Plads paa Moderaxen ved den akselstillede Grens Grund («concaulescentia»), saa at det tilsyneladende staar et Stykke ude paa denne sidste, ere meget almindelige Fænomener. De forekomme saaledes som bekjendt hos *Thesium ebracteatum*, *Samolus Valerandi*, *Borraginaceæ*[2]), *Cordiaceæ*[3]), *Solanaceæ*[4]), *Crassulaceæ*, *Spiræa*, *Loranthaceæ*[5]), *Myrodendron*[6]), *Chailletiaceæ*, *Pterocarya*[7]), hos *Ipomæa bona nox* og *Agave Americana*[8]), hos *Ruta*, *Paliurus aculeatus*, *Bignonia Catalpa*, *Tilia* (Blomsterstandens Dækblad), *Deutzia scabra*, *Helwingia*[9]) o. s. v.

Der opkastes nu det Spørgsmaal i Opgaven, om de t. Ex. hos *Solaneerne* forekommende Forskydninger ere en Følge af en Knopdannelse ved Vækstpunktkløvning. Jeg har allerede besvaret dette benægtende.

Men Fænomenet finder sin naturlige Forklaring, naar man ser hen til den nys paapegede Omstændighed, at Knop og Støtteblad altid (med kun meget faa mig bekjendte Undtagelser) ere forenede ved deres Grund. Intet er da lettere at fatte end, at den primi-

---

[1]) Knopdannelsen i Hunblomsterstanden af *Salix nigricans* foregaar efter min Anskuelse som hos *Amorpha* i Grunden af Dækbladet, men jeg maa dog fremhæve, at er der noget Sted, hvor der kan være Tale om, at et præglost Epiblastem «deler sig» i Blad og Knop, saa er det her (cfr. Figurerne 1—6, Tab. III.

[2]) Se t. Ex. Bravais i Ann. d. sc. nat., Sér. II, tom. 7, S. 298 ff., S. 319.

[3]) Warming, i Botan. Tidssk. III Bd.

[4]) Se herom og om disse Forhold overhovedet Hochstetter: «Über Anwachsungen der Blattstiele», Flora 1850, S. 177.

[5]) Eichler i Flora *Brasiliensis*.

[6]) Efter Caruel.

[7]) Ørsted, Videnskabelige Meddelelser, 1870, S. 163.

[8]) Efter Bravais.

[9]) Decaisne, Ann. sc. nat., 2 Sér., Tom. VI, Tab. 7.

tive Forbindelse mellem dem kan forøges ved en senere Vækst i det fælles basilære Parti, og en «Forskydning» derved blive bragt til Veje. Som Støtte for denne Antagelse tjener ogsaa det, at vi netop der, hvor vi i den specielle Del traf paa stærke Forskydninger, som hos *Solanaceæ, Sedum Fabaria, Ranunculus acris* (Ægget i Frugtknuden) ogsaa finde Forbindelsen mellem Knop- og Bladgrunden usædvanlig stærk; hos de to sidste er Knoppen jo endog for sin allerstørste Del en Udvikling af Bladgrunden. Andre har jeg ikke havt Lejlighed til at undersøge[1]).

Jeg kan ikke undlade her atter at berøre Forholdet mellem Blad og Knop i det Hele taget.

At Blad og Knop hos Fanerogamerne nøje ere knyttede til hinanden, og at de træde frem forenede dannende en Slags Dobbelt-Epiblastemer paa den bærende Axe, fremgaar af det Sagte[2]). At de lavere Planter ikke afvige herfra, fremgaar af navnlig Leitgebs smukke Undersøgelser over Forgreningen hos Mosserne[3]) eller Mettenius's over Bregnerne, Nägelis, Knys, Magnus's, Pringsheims og fleres over de højere Alger, *Characeerne* etc. Kun er der Forskjel med Hensyn til Stillingen af de to Dele i Forhold til hinanden. Hos Blomsterplanterne er som bekjendt Regelen den, at Bladet staar under Knoppen.

Naar nogle Botanikere ville anse Bladet som det Væsenlige, som det egenlige Individ i Planteriget[4]), da hviler denne Theori ganske bestemt alene paa Spekulation; thi

---

[1]) Caruel forklarer Forskydninger paa den samme Maade, idet han henviser til sine «bourgeons pulvinaires»: «rien d'extraordinaire alors si d'autres fois il (d. e. le coussinet) s'étend en longueur, de manière à simuler une sorte d'entrenoeud cylindrique, comme dans les *Thesium* ou le *Samolus*» (Ann. d. sc. nat. V, t. 7. 1867. S. 110).

[2]) Fremhæves bør det dog, at der gives Tilfælde, i hvilke den paapegte Forbindelse mellem deres Grunde er yderst ringe, saasom mellem Dækblad og Blomst hos *Rudbeckia laciniata* (oven for S. 40), mellem Frugtblad og Æg hos *Euphorbia* (hvis dette Æg da bør betragtes som Frugtbladets Akselknop), mellem Blad og Akselknop hos *Aristolochia Sipho*. Hvorledes Forholdet er hos de med Tillægsknopper forsynede Planter fortjener vel en nærmere Undersøgelse. Jeg henviser til de oven for S. 128—31 gjorte Bemærkninger og Undersøgelser over saadanne. I de fleste Tilfælde ere de næppe ægte «gemmæ accessoriæ», d. e. de ere næppe Søsterknopper til Hovedknoppen, men danne en Art Forgrening, der imidlertid synes at kunne blive saa hæmmet og saaledes næsten sænket ned i Bladakselen, at det kan blive vanskeligt at trække Grænsen mellem disse to Forhold. Man erindre *Aristolochia Sipho*. Det forekommer mig rimeligst, at dennes seriale Knopper i hver Bladaksel (Fig. 14—16, **XI**), nærmest bør sammenstilles med de seriale Knopper hos *Verbascum*; disse danne imidlertid en utvivlsom Forgrening (Fig. 11—13, **XI**), hine træde næsten lige saa bestemt op som jævnbyrdige Søsterknopper.

[3]) Botan. Ztg. 1871, Nr. 34.

[4]) T. Ex. Roeper, Botanische Thesen, 1872, Nr. 8: «Das wirkliche Individuum — entsprechend dem Einzelpolypen — ist bei höheren Gewächsen, einschliesslich der Gefäss-Kryptogamen, in dem sogenannten Blatte und den diesem gleichwerthigen, aus ihm abzuleitênden Gebilden zu suchen».

saavel Udviklingshistorien i og for sig og Dannelsesmaaden af Blad og Knop tale der imod, som ogsaa den Omstændighed, at der er hele Blomsterstande, hvis Sideorganer af 1ste Orden alle ere Knopper uden Støtteblade. Hvis Bladet var det egenlige Planteindivid, maatte det dog ikke saaledes helt og aldeles kunne forsvinde (ikke at tale om den helt og holdent bladløse Rod).

Omvendt kan man heller ikke tilskrive Knoppen en saa stor Betydning, at man gjør den til det Væsenlige og tænker sig Bladet som et rent Appendix; thi der er jo ogsaa aldeles knopløse Blade (især i Blomsterne). Men Knoppen viser sig rigtignok som den Del af Dobbeltorganet, der er begavet med størst Selvstændighed, efter som en Knop kan dannes langt fra et Vækstpunkt, medens vi ikke kjende sikre Exempler paa, at Blade interkaleres paa et Parti af Stængelen, der ikke mere er i den allerførste meristematiske Tilstand, eller anlægges isolerede mellem ældre vidt udviklede Blade paa Siden af en Stængel. Hvor noget saadant synes at være Tilfældet, er det sikkerligt en Knop, der anlægges, hvis første Blad er usædvanligt stort og fremmeligt, som hos *Cucurbitaceernes* enarmede Slyngtraade og *Calliopsis's* Adventivknopper[1]). Ligeledes er Kaulomet det eneste af de tre Epiblastemer, der kan have endogen Oprindelse.

Jeg opfatter altsaa Forholdet saaledes, at Bladet og dets Akselknop typisk høre sammen, danne et Slags Dobbeltorgan, hvis to Dele ere udprægede forskjelligt og have en relativ forskjellig morfologisk Værdi. Alt efter det Brug, der er for dem, kommer snart den ene, snart den anden Side af Dobbeltorganet til Udvikling paa den andens Bekostning, snart begge i harmonisk Ligevægt.

Til klar Forstaaelse af disse Forhold vil det være af Vigtighed at erindre de højst interessante og betydningsfulde Resultater, som Leitgeb er kommen til med Hensyn til Halvmossernes Forgrening. Her viser det sig nemlig, at den samme Celle eller det samme Cellekomplex, der i *et* Tilfælde danner Anlæget alene for et Blad, i andre Tilfælde danner det alene for en Gren, og endelig i et tredie Tilfælde for et Blad og en Gren: «Die ganze bauchständige Segmenthälfte wächst nun zum Sprosse aus, und es entspricht der Seitenspross einem Segmenttheile, der unter gewöhnlichen Verhältnissen zum Blattunterlappen oder zum bauchsichtigen Theile eines Seitenblattes (öfters einen oder zwei seiner Zähnen bildend) heranwächst. Es ist diese Thatsache in morphologischer Beziehung vom höchsten Interesse, weil sie uns zeigt, wie wenig tief in dieser Pflanzengruppe, wo die Differenzirung des Pflanzenkörpers in Stamm und Blatt gewissermassen erst zum Durchbruch kommt, der morphologische Unterschied dieser Glieder noch gegriffen hat»[2]). De vise ikke blot dette, men de bestyrke tillige den Op-

---

[1]) Cfr. Braun og Magnus, l. c. Se oven for S. 141.
[2]) Bot. Ztg. 1871, S. 261.

fattelse, som vi ere komne til ved Betragtning af de højere Planter. Ogsaa hos de højere Alger findes Forhold, der lede til de samme Slutninger, hvad t. Ex. Magnus har oplyst for *Polysiphoniernes* Vedkommende.

Disse Epiblastemer anlægges nu, som bekjendt, i en vis Orden, efter bestemte Spiralstillingsforhold, som man hidtil oftest kaldte «Bladstillingslovene» (ligesom man jo ogsaa dannede Ordet: Phyllotaxie), idet man ensidigt fæstede Opmærksomheden ved det Organ, der for den første mere overfladiske Betragtning var det væsenligste, og oversaa, at det andet, Knoppen, bør indtage samme Rang, om ikke en højere. Det følger nu ligefrem af det, som jeg har udviklet i det Foregaaende, at den Spiral, som paabegyndtes af Bladene (maaske helt uden Knopper) paa en Axe, fortsættes uforandret, naar Knopperne blive de overvejende, og selv om Bladene helt abortere.

Paa Steder af Axen, der ere ordnede i en bestemt Spiral (jeg ser her bort fra de i Blomsterne forekommende Afvigelser fra den egenlige Spiralstilling), begynder altsaa en Nydannelsesproces, en Slags plastisk Virksomhed. Hvilket Forhold der betinger denne Nydannelsesproces netop paa de bestemte Steder eller er Grunden til Phyllomernes og Kaulomernes Spiralstilling, er os ubekjendt; i alt Fald er der ikke ført tilstrækkelig Bevis for, at det er de rumlige Forhold, der ere de afgjørende. Paa disse af Spiralen givne «plastiske» Steder fremtræde nu altsaa Blad og Knop alt i det Balanceforhold, som jeg har gjort opmærksom paa, snart Blad uden Akselknop, snart Knop uden Støtteblad, snart og oftest Mellemformerne mellem disse to Yderpunkter.

Der gives imidlertid Tilfælde, i hvilke en saadan plastisk Virksomhed opstaar uden for den normale Spiral, det vil sige, i hvilke der paa Steder, som vel kunne staa i et ganske bestemt Forhold til de spiralstillede Epiblastemer, men dog ligge uden for den Spiral, i hvilke disse ere ordnede, fremkomme Epiblastemer; i alle kjendte Tilfælde er det da Knopper, der anlægges d. e. komme først frem: de saakaldte extra-axillære Knopper.

«Extraaxillære» Knopper. Hvorfor der optræder Knopper uden for den af de andre Knopper og Blade paa Stængelen fulgte normale Spiral, vide vi lige saa lidt, som (eller egenlig endnu mindre end) vi vide, hvorfor disse ordne sig i en Spiral. Derover skulle vi heller ikke her anstille Betragtninger. Hvad der nærmest angaar os, er først disse Knoppers Forhold til Vækstpunktkløvningen, og herom har jeg allerede oven for sagt, at disse Knopper kunne opstaa saavel ved Kløvning af Vækstpunktet som uden for dette, altsaa som ægte Sideknopper. Men dernæst vil jeg henlede Opmærksomheden paa disse Knoppers Bladstilling, fordi jeg tror, at de stemme meget mere med «Akselknopperne», end man hidtil har havt Øje for.

Man har antaget om disse Knopper, at de mangle Støtteblade og netop derfor kaldt dem «extraaxillære», og sammenligne vi Stillingen af deres Blade med den paa de

almindelige «Akselknopper», frembyder der sig for den første Betragtning kun Uligheder; de to første Blade paa disse vende jo nemlig til Siderne («Knopkimbladene»), paa hine vender derimod det 1ste (oftest) nedad.

Jeg skal i saa Henseende først minde om de mig bekjendte normale Tilfælde af exogene «extraaxillære» Knopper, nemlig: Slyngtraadene hos *Ampelideerne*, Blomsterstandene hos *Asclepiadeerne*, og Slyngtraadene hos *Cucurbitaceerne*.

Dernæst om de paa Stængelsiderne af *Calliopsis tinctoria* exogent og abnormt fremkommende Knopper[1]), og endelig om de hypokotyle Knopper? For disses Vedkommende synes de samme Stillingsforhold at gjælde (i alt Fald hvor Moderaxen er lodret eller nærmer sig til at være det), skjøndt disse Knopper vist for største Delen ere Brudknopper. Man erindre saaledes de hypokotyle Knopper hos *Euphorbia* (se min Disputats, Side 13, Fig. 1—2, samt Fig. 17—19, Tab. XI i denne Afhandling)[2]), hos *Thesium* (efter Irmisch, Flora, 1853, S. 2), hos *Alliaria officinalis*, flere Arter af *Linaria* og mange andre, som anføres af Irmisch, Wydler etc.[3]).

Sluttelig bør ogsaa nævnes de i en lodret Række over hvert Kimblads Aksel stillede Knopper hos *Juglans*. Naar Schacht[4]) kalder dem «Achselknospen», da er dette ganske bestemt en urigtig Benævnelse; thi de sidde selv før Spiringen højt oppe over Akselen, medens der egenlig ikke synes at sidde nogen i denne selv, og efter Spiringen ere de i langt højere Grad skilte fra denne og hverandre; endelig vender deres første Blad nedad, hvad Schacht rigtignok ikke udtrykkelig gjør opmærksom paa og vel altsaa heller ingen Betydning vil tillægge. Alle disse Forhold ere i mine Øjne tilstrækkelige til at vise, at disse Knopper ikke bør sammenstilles med Aksel- eller Tillægsknopper; de ere en Art «extraaxillære» Knopper og gaa som saadanne ind under den Regel, som de andre følge, med Hensyn til Bladstilling.

Utricularia er det eneste mig sikkert bekjendte Exempel paa, at en extraaxillær Knops 1ste Blad ikke vender nedad; her ere nemlig alle Blade sidestillede i Forhold til

---

[1]) Braun og Magnus i Verhandl. d. botan. Vereins Brandenburgs, 1870. Se oven for, S. 141.

[2]) Ved denne hypokotyle Knop af *Euphorbia medicaginea* er der det interessante Forhold (som jeg har bemærket gjentagne Gange), at det nederste fremadvendende Blad (Fig. 18) er dybt kløvet, det næste mindre (Fig. 19); det derpaa følgende (c, Fig. 17) kun udrandet; det næste (d) afrundet i sin Spids. Først efter Stikningen af Fig. 17 er jeg bleven opmærksom paa, at denne Figur ikke fremstiller dette Forhold ganske korrekt.

[3]) Se Al. Braun, Sitzungsber. Naturf. Freunde, 1870, p. 18, og Botan. Ztg. 1870, S. 438—40: «Bei allen genannten Pflanzen ist die Einsetzung der Blattstellung an den hypocotylen Knospen meist abweichend von der an den achselständigen und weniger regelmässig, am häufigsten so, dass ein erstes Blattpaar nicht transversal, sondern longitudinal zu stehen kommt, wobei das nach unten fallende Blatt deutlich gefördert ist» (At det tillige er det først anlagte, har jeg set hos flere *Euphorbier*).

[4]) Beiträge, 1854, S. 105; se ogsaa hans Tab. VIII.

Knoppens Medianlinie. Men man turde maaske netop heri søge et nyt Bevis for, at «Ranken» ikke er en Gren, men et Blad. Dette Blad vilde da unægtelig i andre Henseender blive meget mærkeligere end, om det var en Gren.

Efter at jeg imidlertid har bevist, at Støttebladene i nogle Tilfælde først fremtræde paa Knoppen, og faktisk ikke sidde paa Moderaxen for denne, er den væsenligste Hindring bortryddet for ogsaa at betragte det første Blad paa de extraaxillære Knopper, i de Tilfælde hvor dette Blad har den samme Stilling som Støttebladene ellers, nemlig paa Knoppens Underside (og dette synes at være Regelen), som disse Knoppers Støtteblad og som værende homologt med Støttebladet for en almindelig «Akselknop».

Forskjellen mellem de forskjellige Slags Knopper kommer saaledes, naar man tager Bladstillingen alene i Øjesyn, og ikke den forskjellige Stilling paa Axen (i Spiral eller uden for Spiralen)[1], til at bero paa et «mere» eller «mindre», paa om Knoppens Støtteblad (eller som jeg hellere vilde sige: Dobbeltorganets Bladdel) mere eller mindre sidder paa Knoppen selv og anlægges tidligere eller senere. De «akselstillede» Knopper, hvis Støtteblad træder frem længe før Knoppen selv og sidder paa Hovedaxen, danne det ene Yderled — de «extraaxillære» og andre Knopper, hvis Støtteblad træder frem længe efter Knoppen og, som hos *Vitis*, ofte et ikke ringe Stykke ude paa den, ved en stærk primitiv «Forskydning» fjernet fra den, det andet Yderled[2]).

Naar man altsaa hidtil har anset Bladene for nærmest at høre sammen med den Axe, der er Moderaxe for deres Akselknop, og kaldt de to «Knopkimblade» paa Knoppen dennes to første Blade, da forekommer dette mig en mindre rigtig Opfattelsesmaade. Allerede Bravais bemærker, at man egenlig ligesaa godt kan betragte Knoppens «Moderblad» (d. e. Støttebladet) som dens første Blad og begynde med det som Udgangspunkt for Spiralen paa Sideaxen. Jeg mener nu, at man her bør sige: Støttebladet er Knoppens første, men tillige dens eneste Blad. Naar Knoppen udvikler sig videre, og der opstaar nye Blade paa den, da høre de typisk sammen med lige saa mange nye Knopper, selv om disse endnu ikke ere traadte synligt frem eller slet ikke træde frem; i dette Tilfælde er det da Bladet alene, der repræsenterer de nye Dobbelt-Epiblastemer.

Uden at jeg iøvrigt tør vove at drage en fuldstændig Parallel mellem Knopdannelsen hos de højere og hos de lavere Planter, vil jeg dog atter henvise til Leitgebs interessante Resultater med Hensyn til de Planter, hos hvilke Udprægningen af og Mod-

---

1) Om nogle af de extraaxillære Knopper, navnlig de normalt og exogent fremtrædende, kan man forresten godt sige, at de ere spiralstillede; men de danne da deres egen selvstændige Spiral.

2) I Bedømmelsen af denne Afhandling i Oversigterne over Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1872, S. 23, udtales, at jeg har ment at forklare det Afvigende ved de extra-axillære Knopper ved at se hen til den mellem Støttebladet og Hjørneknoppen paaviste oprindelige Forbindelse etc; dette er ikke rigtigt refereret, som det vil fremgaa af det ovenstaaende. Kun den ene Side ved dem, har jeg troet at kunne bringe i Overensstemmelse med de almindelige Forhold.

sætningen mellem Knop og Blad først begynder at komme frem; de viste os netop Knoppens og Bladets Sammenhøren, fordi de viste os, at de oprinde af et fælles Anlæg, der udvikles snart helt til Blad, snart helt til Knop, snart til begge disse to Slags Epiblastemer. Jeg maa da tænke mig følgende Udviklingsgang i Planteriget. Hos de laveste og først dannede Planter findes alene det prægløse Thallom, Plantelegemet blot og bart. Dette forgrener sig, og Thallomgrenene, der have samme prægløse Natur som Moderaxen, fra hvilken de udgaa, ordne sig efter bestemte Stillingsforhold. Med en fortsat Udvikling til højere organiserede Former finder en Arbejdsdeling og yderligere Udprægning Sted af Thallomets Ydre og Indre. De morfologiske Grundorganer, Kaulom og Phyllom opstaa; men begge ere de, hvad Leitgebs smukke Undersøgelser synes mig at vise, Udprægninger af det samme Grundanlæg, Thallomgrenen, til forskjelligt Arbejde. Alt efter Arbejdets Natur og Plantens Behov optræde de snart hver for sig, snart begge i nøje Forening.

Hermed vil jeg nu paa ingen Maade sige, at Phyllom og Kaulom ganske ere et og det samme. Ingen vil nægte, at de staa i en vis bestemt Modsætning til hinanden, og at ethvert af dem karakteriseres ved en Række Egenskaber, som meget sjeldent findes hos det andet; men fordi de i Tidens Løb have opnaaet en saadan relativ Selvstændighed, kan man godt antage, at de have et fælles Udgangspunkt. —

Disse allersidste Betragtninger over Forgreningen og Forholdet mellem Blad og Knop ønsker jeg ikke opfattede som en færdig Theori; vi kjende endnu for lidt til Plantelegemet og dets enkelte Lemmers Forhold til hinanden og til det Hele, til at en Theori kan træde frem støttet i tilbørlig Grad paa Undersøgelser og Fakta; men af de sidste haaber jeg ved de i denne Afhandling nedlagte Iagttagelser at have fremdraget en Del, der ville have blivende Værdi, selv om fremtidige Undersøgelser skulde bringe Forhold frem, der ikke tillade min Opfattelse af de extraaxillære Knopper og andre af de anførte Forhold.

Forklaring af Figurerne.

P, betyder «Punctum vegetationis».
f, Blade.
g, Knopper.
De romerske Tal betegne Axer, de arabiske Blade.

Tab. I.

Cruciferæ. Compositæ.

Fig. 1 — 5. *Sisymbrium strictissimum.*
- 1 og 2. Enderne af to Stængler ved Overgangen fra den vegetative til den florale Region.
- 3. Øverste Del af en Stængelspids ($^{420}/_1$); *pe*, Periblem; *pl*, Plerom.
- 4. Blomsterknop med dens Støtteblad (af det i Fig. 2 afbildede Præparat).
- 5. Lignende, som staar den vegetative Region nærmere.
- 6. *Erysimum.* Øverste Del af en Blomsterstand.
- 7 — 9. *Sisymbrium strictissimum.*
- 7. Øverste Del af en Blomsterstand.
- 8. Lignende, med Overgangsstedet til den vegetative Region.
- 9. Blomsterknop med Støtteblad (svagere Forstørrelse end Fig. 3—5).
- 10. *Anthemis arvensis.* Øverste Del af et Kurvleje.
- 11 — 14. *Sisymbrium strictissimum.*
- 11. Øverste Del af en Blomsterstand.
- 12. Nederste Del af den i Fig. 11 med *m* mærkede Blomsterstilk.
- 13. Vegetativ Knop.
- 14. Knop til Blomst eller blomstrende Gren med Støtteblad.
- 15. *Doronicum macrophyllum.* Længdesnit gjennem en ung Kurv.
- 16 — 17. *Rudbeckia Neumanni.*
- 16. Parti af et Længdesnit gjennem en Kurv.
- 17. Et Dækblad for en Blomst.
- 18. *Inula Helenium.* Unge Blomster.
- 19. *Doronicum macrophyllum.* Længdesnit gjennem en ung Blomst.
- 20. *Rudbeckia platyglossa.* Øverste Del af et Kurvleje.
- 21 — 22. *Doronicum macrophyllum.* Længdesnit gjennem en Blomst og det højre Parti af samme ved *c*.

Tab. II.

Compositæ. Papilionaceæ.

- 1 — 2. *Anthemis arvensis.*
- 1. Parti af et Kurvleje med unge Blomster.

Fig. 2. Længdesnit gjennem en ung Kurv.
- 3. *Rudbeckia platyglossa.* Øverste Del af en Stængel i Længdesnit i Begreb med at begynde Kurvdannelsen.
- 4. *Anthemis rigescens.* Længdesnit gjennem en ung Kurv.
- 5 — 10. *Anthemis arvensis.*
- 5. Blomst i Længdesnit; *ov*, ovulum; *c*, Bæger; *f*, Dækbladet.
- 6. Ung Blomst.
- 7. To lignende, endnu yngre.
- 8. Lignende ældre.
- 9. Endnu ældre Blomster; lidt stærkere forstørrede.
- 10. Ung Blomst.
- 11. *Chrysanthemum leucanthemum.* Ene Side af et Længdesnit gjennem en ung Blomst.
- 12 — 13. *Anthemis rigescens.*
- 12. Radiært Længdesnit gjennem et Kurvdækblad.
- 13. Længdesnit gjennem en ung Kurv.
- 14 — 15. *Chrysanthemum leucanthemum.*
- 14. Længdesnit gjennem en Blomst; *ov*, Æg.
- 15. Parti af et Tversnit gjennem en Krone.
- 16—23. *Amorpha fruticosa.*
- 16. Øverste Del af en Stængelspids.
- 17 — 22. Udviklingssuite af Blade, numererede efter deres Alder.
- 23. Parti af en Blomsterstand.
- 24. *Medicago sativa.* Længdesnit gjennem en Blomsterstand.
- 25. *Melilotus officinalis.* Stængelspids med en Blomsterknop og dens Støtteblad.

Tab. III.

Graminaceæ. Ribes. Valeriana.

gl, gluma; *pi*, palea inferior; *ps*, palea superior; *st*, Stamina.

- 1 — 7. *Secale cereale.*
- 1. To unge Sideaks med deres Støtteblade.
- 2. Et Sideaks, hvis nederste Yderavne og nederste Blomst er fjernet.
- 3. Stængelspidsen af Fig. 2 med den øverste Knop og dennes Støtteblad.
- 4. Sideaksene *p*, *m* og *n* af Fig. 5.
- 5. Et ungt Aks med dets netop dannede Sideaks (*r*, *s*, *t*, *n*, *m*, *p*, *q* etc.).
- 6 — 7. Øverste Del af to Aks, med Overgangsstedet mellem Sideaksene og Endeakset.
- 8 — 9. *Poa annua.* En ung Blomsterstand fra de to modsatte Sider.
- 10. *Bromus pendulinus.* Øverste Del af et Smaa-Aks.
- 11 — 15. *Hordeum vulgare.*
- 11. Tre Sideknopper paa Hovedaksen.
- 12. En lignende.
- 13. Stængelspids med den øverste Knop og dens Dækblad. Den tangentiale Celledeling i 1ste Periblemlag paa højre Side er maaske Begyndelsen til et nyt Blad.
- 14. De øverste Knopper og Blade paa venstre Side af Fig. 15.
- 15. Ungt Aks.
16. *Poa annua.* Øverste Del af et Smaa-Aks.
17. *Avena fatua.* Øverste Del af et Smaa-Aks.
- 18. *Ribes sanguineum.* Længdesnit gjennem den øverste Del af en Blomsterstand.
- 19. — Stængelspids og to Blade af en vegetativ Stængel.
- 20. — Ung Blomsterstand fra Siden.
- 21. — Lignende ovenfra.

Fig. 22. Samme som i Fig. 20 fra den modsatte Side.
- 23 — 28. *Valeriana Phu.* Udviklingen af de kvastformede Blomsterstande.

Tab. IV.

Salicineæ. Umbelliferæ. Scrophulariaceæ, etc.

- 1 — 6. *Salix nigricans* (Hunraklen).
- 1. Længdesnit gjennem en ung Rakle.
- 2 — 3. Unge Blade.
- 4 — 6. Lignende, paa hvilke Knopperne ere komne til Syne.
- 7 — 11. *Chærophyllum aureum.*
- 7 — 8. Længdesnit gjennem Smaaskærme.
- 9 — 11. Blomsterknopper med deres Støtteblade.
- 12. *Ægopodium Podagraria.* En ung Skærm; tildels sees Delene i Længdesnit.
- 13. *Veronica virescens.* Længdesnit gjennem en Blomsterstand.
- 14. *Linaria striata.* Længdesnit gjennem en Blomsterstand.
- 15 — 17. *Delphinium Consolida.*
- 15. Ungt Dækblad (det øverste i Fig. 17).
- 16. Lignende, lidt ældre.
- 17. Længdesnit gjennem en Blomsterstand.
- 18 — 19. *Digitalis lutea.* Længdesnit gjennem en Blomsterstand og gjennem en Blomsterknop med dens Støtteblad.
- 20 — 23. *Digitalis pauciflora.*
- 20. Længdesnit gjennem den øverste Del af en Stængel, der er i Overgang fra den vegetative til den florale Region.
- 21. Stængelspids af en Blomsterstand, i Længdesnit.
- 22. Bunden af en lignende, og
- 23 det øverst til højre paa Snittet beliggende Blad med dets Akselknop.
- 24 — 25. *Rheum compactum.*
- 24. Del af en ung Blomsterstand.
- 25. En Blomsterknop med dens Støtteblad.
- 26 — 27. *Orchis mascula.* Den øverste Del af en Stængel og Længdesnit gjennem en lignende.
- 28. *Epipactis palustris.* Blomsterstand set ovenfra.

Tab. V.

Cucurbitaceæ.

v betegner Slyngtraaden; *a*, den senere til Blomsterstand udviklede Knop paa en af den vegetative Stængels Akselknopper; *b*, den modsatte, til vegetativ Gren udviklede Knop.

- 1 — 14. *Bryonia.*
- 1. Vegetativ Stængel set ovenfra.
- 2 — 10. En Akselknop paa den vegetative Stængel i forskjellige Udviklingstrin, idet den danner en Art kvastformig Forgrening.
- 11 — 12. En Hanblomsterstand fra Siden og ovenfra.
- 13 — 14. Tversnit af en vegetativ Stængel; der sees derved to Blade med deres Akselknopper, af hvilke en er afbildet i Fig. 13.
- 15. *Sicyos parviflora.* Øverste Del af en vegetativ Stængel.
- 16 — 27. *Cyclanthera pedata.*
- 16. Øverste Del af en vegetativ Stængel.
- 17. En Hanblomsterstand, set ovenfra.

Fig. 18. En Akselknop paa en vegetativ Stængel, i Færd med at forgrene sig.
- 19. En af de kvastformede Forgreninger.
- 20. Øverste Del af en Hanblomsterstand. Længdesnit.
- 21. Lignende.
- 22. En af de kvastformede Forgreninger videre udviklet; *d*, en af Rohrbachs «accessoriske» Klaser.
- 23. Længdesnit gjennem en Hanblomsterstand. *p*, Støvsækkene.
- 24. En Hanblomsterstand med «accessoriske» Knopper; *c*, den centrale Støvdrager.
- 25. Længdesnit gjennem en Hanblomsterstand. III ere «accessoriske» Knopper.
- 26. Del af en Hanblomsterstand. III er en «accessorisk» Knop.
- 27. Knop II med den accessoriske Knop III i Fig. 26; (Præparatet er vendt om).
- 28. *Sicyos angulata.* Del af en Hanblomsterstand.
- 29 — 30. *Cucumis prophetarum.* En Blomsterstand fra Siden og ovenfra.
- 31 — 36. *Cucurbita Pepo.*
- 31. En ung Slyngtraad i Længdesnit.
- 32. Længdesnit gjennem en ældre; til Siderne for og bag dens Stængelspids sees Arme.
- 33. Længdesnit gjennem en Slyngtraads Stængelspids.
- 34. En ung Slyngtraad.
- 35. Lignende som Fig. 33.
- 36. Lignende som Fig. 32.

Tab. VI.

Hydrocharidaceæ. Utriculariaceæ. Ampelidaceæ.

- 1 — 6. *Valisneria spiralis.*
- 1. En ved Kløvning forgrenet Knop. P og P^1 ere de to nye Vækstpunkter.
- 2. En Knop, der er i Kløvning.
- 3. Yngre Tilstand af Kløvningen.
- 4. En Knop, i hvilken der ingen Antydning er til Kløvning.
- 5. En ung Blomst, hvis Hylster sees ved *s*; de nedre Dele af Præparatet mindre tydelige.
- 6. Snit gjennem et ældre Hylsterblad.
- 7. *Acacia armata.* Tversnit gjennem et Kronblad.
- 8 — 10. *Hydrocharis Morsus ranæ.* Forskjellige Stadier i Knoppens Kløvning.
- 11 — 15. *Utricularia vulgaris.*
- 11. Stængelspids af en af de almindelige vegetative Stængler (Trichomerne paa den ere udeladte her som i det Følgende undtagen paa Fig. 14).
- 12. Dannelsen af en «Ranke».
- 13. Lignende yngre Stadium.
- 14 — 15. Stængelspidser af «Ranker».
- 16 — 20. *Ampelopsis hederacea.*
- 16. Enden af en vegetativ Gren med dens forskjellige Epiblastemer.
- 17. Øverste Del af en Slyngtraad.
- 18. Del af en Slyngtraad.
- 19. Øverste Del af en vegetativ Stængel.
- 20. Histologisk Billede af en lignende.
- 21 — 27. *Vitis vulpina.*
- 21. Øverste Del af en vegetativ Stængel. .
- 22. En Slyngtraad og den neden for staaende Akselknop med dens Støtteblad.
- 23. Stængelspids med et Slyngtraadsanlæg og to Blade.
- 24 — 27. Slyngtraade i forskjellige Stadier af Forgrening.
- 28. *Vitis vinifera.* Længdesnit gjennem en Kimplante. Bladene ere tildels skaarne bort.

Tab. VII.

Asclepiadaceæ. Solanaceæ.

For *Asclepiadeerne*: *β*, Dækblad i en Blomsterstand; *a—a*, *b—b*, etc., forskjellige Bladpar; *a—a* det yngste, derefter de andre i Alder. For *Solaneerne*: f^1—f^2 og *m—n*, de to Forblade.

Fig. 1. *Vincetoxicum nigrum.* Øverste Del af en vegetativ Stængel, set fra Siden.
- 2. *Asclepias syriaca.* Lignende, set ovenfra.
- 3. *Vincetoxicum nigrum.* Anlæggelsen af den første Blomsterstand.
- 4—6. *Asclepias syriaca.* Lignende Trin som Fig. 3, lidt fremmeligere, ovenfra og fra Siden.
- 7. *Asclepias syriaca.* Fremmeligere Udviklingstrin end Fig. 4.
- 8—10. *Vincetoxicum nigrum.*
- 8. Lignende Trin som foregaaende, set fra Siden.
- 9. Øverste Del af en Stængel, hvor tre Blomsterstande ere anlagte.
- 10. Lignende med to anlagte Blomsterstande. Den sædvanlige Forandring af Bladstilling er endnu ikke indtraadt.
- 11—12. *Asclepias syriaca.* Længdesnit gjennem blomstrende Stængler.
- 13—14. Samme. Oversigtsbillede og histologisk Billede gjennem en Stængels øvre Del. Fig. 13 er stillet skævt; se Fig. 14.
- 15. *Vincetoxicum nigrum.* En blomstrende Stængels øverste Del.
- 16—21. *Solanum nigrum.*
- 16—19. Udviklingen af en af sædvanlige med to Forblade (Løvblade) forsynede Skud tilligemed Anlæggelsen af Blomsterstanden.
- 20—21. Ender af de svikkelformede Blomsterstande.
- 22. *Solanum Dulcamara.* Enden af en Svikkel.
- 23. *Lycopersicum esculentum.* Lignende.
- 24—27. *Datura Stramonium.*
- 24. Ungt Skud (Kvast).
- 25. Videre Udvikling af samme (mindre forstørret).
- 26—27. Lodret Snit gjennem et kvastformigt forgrenet Skud med histologisk Billede af Frugtbunden.
- 28. *Petunia hybrida.* En blomstrende Stængel set ovenfra. Der er tre Axegenerationer.
- 29. — Lignende fra Siden; to Generationer.

Tab. VIII.

Solanaceæ. Borraginaceæ. Cistaceæ. Hydrophyllaceæ.

s, sepala; *m* og *n*, de to Forblade i de tobladede Skud.

- 1. *Physalis Alkekengi.* Et Skud der forgrener sig ved Kløvning.
- 2—3. *Solanum nigrum.*
- 2. Lodret Snit gjennem Enden af en Svikkel.
- 3. Snit gjennem et af de almindelige tobladede Skud.
- 4. *Datura Stramonium.* Længdesnit gjennem et Skud.
- 5—9. *Hyoscyamus niger* og *pusillus.*
- 5. Enden af en Blomsterstand, set fra Spidsen af; den forgrener sig ved Kløvning.
- 6. Lignende.
- 7—8. Oversigtsbillede og histologisk Billede af et lodret Snit gjennem de yngste Knopper i en Svikkel.
- 9. Tvillingsøsterknoppen til III kløver sig.
- 10—13. *Cerinthe gymnandra.*
- 10. Tvillingsøsterknoppen til II kløver sig.
- 11. Snit gjennem Spidsen af en Svikkel.
- 12—13. To Billeder af den dichotomiske Forgrening hos denne Plante.

Fig. 14. *Borrago officinalis.* Længdesnit gjennem det yngste i Kløvning værende Skud.
- 15. *Helianthemum vulgare.* Enden af en Svikkel.
- 16. *Symphytum asperrimum.* En ung i Akselen af et Blad paa Hovedaxen stillet Blomsterstand (Dobbeltsvikkel).
- 17 — 20. *Caryolopha sempervirens.*
- 17. En ung Blomsterstand.
- 18. Fremmeligere Udviklingstrin af en lignende.
- 19. Anlæggelsen af de unge Dobbeltsvikler paa Hovedaxen.
- 20. Enden af en Svikkel.
- 21 — 22. *Cosmanthus viscidus.*
- 21. Enden af en Svikkel set fra Spidsen.
- 22. Lignende set oven fra.
- 23. *Sphacelia tanacetifolia.* Enden af en Svikkel.
- 24. *Symphytum asperrimum.* Snit gjennem en Svikkelende, lodret og parallelt med Indrulningsplanet.
- 25 — 28. *Tiaridium indicum.*
- 25 — 26. Snit gjennem en Svikkel parallele med Indrulningsplanet.
- 27. Enden af en Svikkel, set tildels ovenfra.
- 28. Lodret Snit gjennem en Svikkel, parallelt med Indrulningsplanet.

Tab. IX.

Euphorbia.

st, Hanblomst.

- 1. *E. trigonocarpa.* Vegetativ Stængelspids i Længdesnit.
- 2. — Histologisk Billede af en lignende.
- 3. — Længdesnit af en floral Stængelspids.
- 4. *E. Cyparissias.* Øverste Del af en floral Stængelspids.
- 5. *E. geniculata.* Ung Kop.
- 6 — 7. *E. Peplus.* Ung Kop fra to modsatte Sider.
- 8. *E. trigonocarpa.* En floral Stængel, set ovenfra, efter at den terminale Kop er anlagt.
- 9. *E. Cyparissias.* Dannelsen af et Blad.
- 10 — 12. — Ung Cyma; *m* og *n* de to Forblade.
- 13 — 15. — Længdesnit gjennem unge Kopper.
- 16. — En af tre Hanblomster bestaaende cyma serialis set forfra. En fjerde anlægges.
- 17. *E. trigonocarpa.* Dannelsen af 2den Hanblomst paa 1ste.
- 18. *E. Cyparissias.* Histologisk Billede af det forreste Parti af Fig. 16.
- 19 — 21. — Længdesnit gjennem Hanblomster, som vise Pollen-Urmodercellernes Dannelse.
- 22. *E. Esula.* Halvdelen af et Tversnit af en Hanblomst; det Indre er udeladt.
- 23. — Del af et Tversnit af en ældre Hanblomst.
- 24. *E. Peplus.* Anthervæggen før Spiralfibrene optræde.
- 25. *E. Cyparissias.* Tre Hanblomster i Længdesnit; sete fra Koppens Centrum.
- 26. — Moden Støvknap i Tversnit.
- 27. *E. Lathyris.* Hanblomstgruppe fra Siden.
- 28. — Ung Kop i Længdesnit.

Tab. X.

Euphorbia, etc.

i, involucrum; *st*, Hanblomst; *cp*, Frugtblad; *ii*, integumentum inferius; *is*, integumentum superius; *se*, sacculus embryonalis.

- 1 — 4. *E. Cyparissias.* Squamulæ af Koppen.
- 5. *E. Peplus.* Kopskæl i Tversnit.

Fig. 6 — 7. *E. Cyparissias.* Længdesnit gjennem en Kop; *cp*, Frugtbladene.
- 8. — Øvre Del af en Hunblomst.
- 9. — Lignende, men ældre Stadium.
- 10 — 11. — To Æg af samme Frugtknude.
- 12. — Æg; fremmeligere Udviklingstrin.
- 13. — Længdesnit gjennem en Hunblomst.
- 14. — Hanblomstgruppe set fra Siden: *p*, Pollenmodercellerne.
- 15. — Parti af forrige, som viser Dannelsen af yngste Hanblomst.
- 16. *E. Esula.* Æg i Længdesnit.
- 17 — 18. — Partier af Længdesnit af Æg.
- 19. *E. Cyparissias.* Parti af et Æg.
- 20. — Æg, i Længdesnit.
- 21. *E. Esula.* Længdesnit gjennem et Æg.
- 22. *E. trigonocarpa.* Spidsen af *nucleus* og af Hinderne.
- 23 — 24. *E. Cyparissias.* Tversnit af to Kopper, det ene lige over Basis, det anden højere oppe.
- 25. *Chrysosplenium alternifolium.* Anlæg til Æg.
- 26. — Vidt udviklet Æg.
- 27 — 30. *Scrophularia nodosa.* Fire Udviklingstrin af Ægget.
- 31. *Myogalum nutans.* Æg.
- 32. *Euphorbia.* Basis af en Hunblomst.
- 33. *E. Cyparissias.* Dannelsen af Hunblomstens Bæger.
- 34. — Dannelsen af Leddet paa Hanblomsten.

Tab. XI.

ov, ovulum; *cp*, carpellum; *i*, integumentum ovuli; *β*, Forblad; *s*, sepalum; *p*, petalum; *st*, stamen.

- 1 — 4. *Sedum Fabaria.* Unge Blomsterstande.
- 5 — 7. *Ranunculus acris.* Del af en Blomst og Længdesnit gjennem unge Frugtblade med deres Æg.
- 8 — 10. *Zannichellia macrostemon Gay.* Længdesnit gjennem Frugtknuder med deres Æg.
- 11 — 13. *Verbascum nigrum* og *pulverulentum.* Dele af cymæ seriales fra Siden og forfra og en hel cyma fra Siden.
- 14. *Aristolochia Sipho.* Den øverste Del af en Gren i Længdesn t.
- 15. — Del af et Blad med de seriale Knopper i dets Aksel.
- 16. — En Akselknop med hele det neden for liggende Parti, af hvilket Tillægsknopperne opstaa.
- 17 — 19. *Euphorbia medicaginea.* En hypokotyl Knop med dens to første Blade, Fig. 18 og 19, isolerede.
- 20 — 24. *Hypericum hircinum.*
- 20. En Blomst ovenfra.
- 21. En lignende yngre fra Siden.
- 22. Længdesnit gjennem en Blomst.
- 23. Et enkelt Støvblad med neden for staaende Kronblad.
- 24. Længdesnit gjennem et ungt Støvblad.
- 25 — 31. *Daucus Carota.* Blomsternes Udviklingshistorie fremstillet i 6 Udviklingstrin betragtede oven fra og i et Længdesnit.
- 32 — 34. *Ricinus communis.* Forgreningen af Støvbladene; *m*, Midtlinien.
- 35. *Cyclanthera pedata.* Diagrammer af Stillingsforholdene af de forskjellige Dele i en af akselstillede kvastformige Forgreninger; *v*, Slyngtraaden; inden for den sees den vegetative Knop med dens første Blade f^1—f^3; i Midten Hunblomsten, *A*; til højre Hanblomsterstanden, i hvilken de romerske Tal betegne Blomsterne, og Kredsene *a*, *b*, *c*, *d*, etc. Blomsterne i de «accessoriske» Klaser; *β*, Støttebladet for den hele Kvast. Den vegetative Knop er antidrom med Hanblomsterstanden; de «accessoriske» Klaser synes at være poecilodrome.

Oversigt over Indholdet.

Side

I. Indledning . . . . 5.

Vækstpunktets Begreb i Almindelighed . . . . 5.
— Bygning og Begrænsning hos Fanerogamernes Kaulomer . . . . 6.
Vækstpunktkløvningens Begreb . . . . 12.
— Forekomst . . . . 19.

II. Speciel Del . . . . 29.

1. Cruciferæ . . . . 29.
2. Compositæ . . . . 36.
3. Papilionaceæ . . . . 42.
4. Graminaceæ . . . . 46.
5. Cyperaceæ . . . . 53.
6. Salicineæ . . . . 53.
7. Grossulariaceæ . . . . 55.
8. Umbelliferæ . . . . 56.
9. Ranunculaceæ . . . . 57.
10. Scrophulariaceæ . . . . -
11. Orchidaceæ . . . . 59.
12. Pantaginaceæ . . . . 60.
13. Polygonaceæ . . . . -
14. Amarantaceæ . . . . -
15. Valerianaceæ . . . . 61.
16. Cucurbitaceæ . . . . 62.
17. Hydrocharidaceæ . . . . 76.
18. Utriculariaceæ . . . . 80.
19. Ampelidaceæ . . . . 82.
20. Asclepiadaceæ . . . . 88.
21. Solanaceæ . . . . 91.
22. Crassulaceæ . . . . 97.
23. Asperifoliæ . . . . 97.
24. Hydrophyllaceæ . . . . 105.
25. Cistaceæ . . . . -
26. Saxifragaceæ . . . . -
27. Euphorbiaceæ . . . . 106.

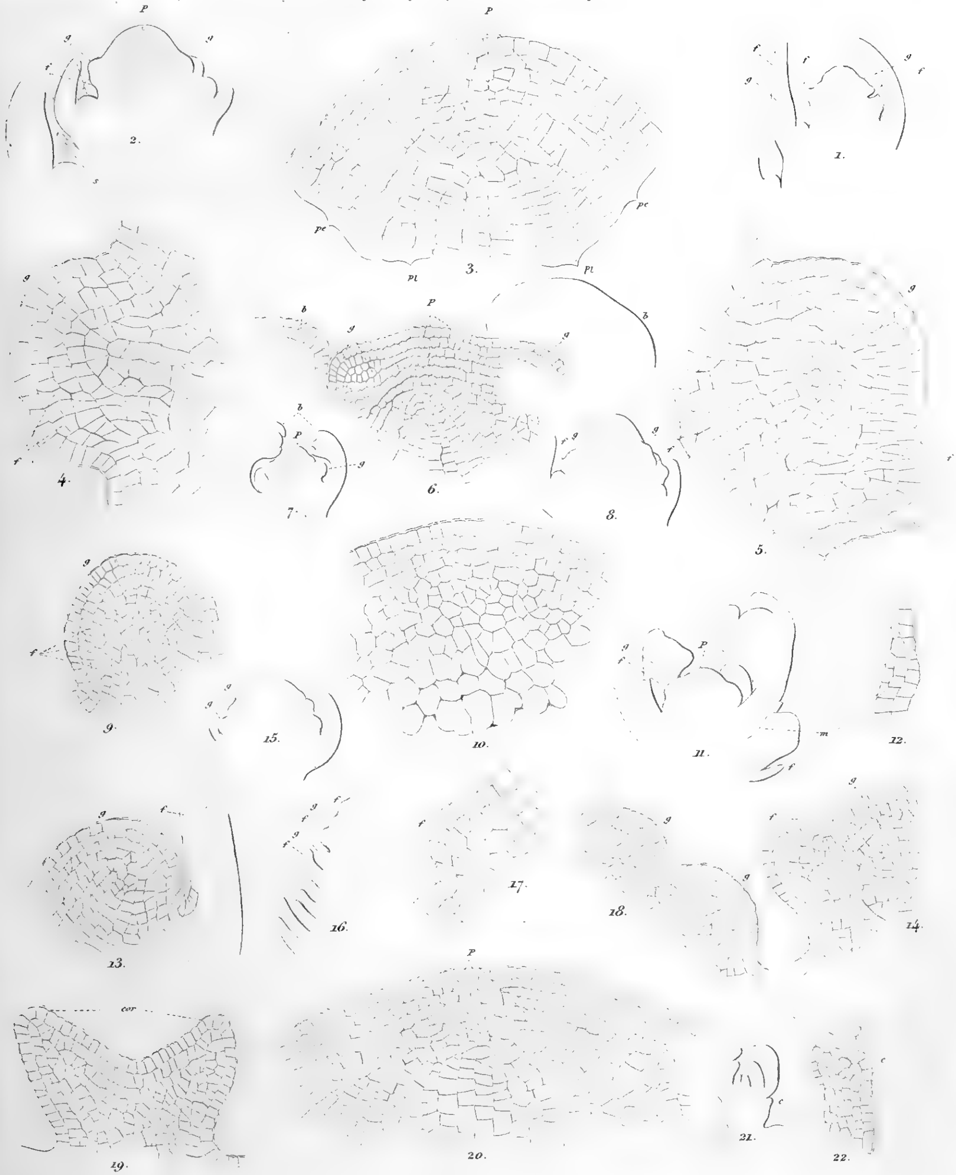
Side

III. Almindelige Slutningsbemærkninger . . . . . . 138.

Stængelspidsens Form . . . . . . 138.
— Bygning . . . . . . -
Forholdet mellem Stængelspidsens ydre Form og indre Bygning . . . . . . 141.
Epiblastemerne . . . . . . -
Phyllomerne . . . . . . -
Kaulomerne . . . . . . 143.
De forskjellige Forgreningsmaaders Forhold til hverandre . . . . . . 147.
Kaulomernes Dannelse . . . . . . 151.
Forholdet mellem Støtteblad og Akselknop . . . . . . 154.
Bladforskydninger . . . . . . 158.
»Extraaxillære« Knopper . . . . . . 161.

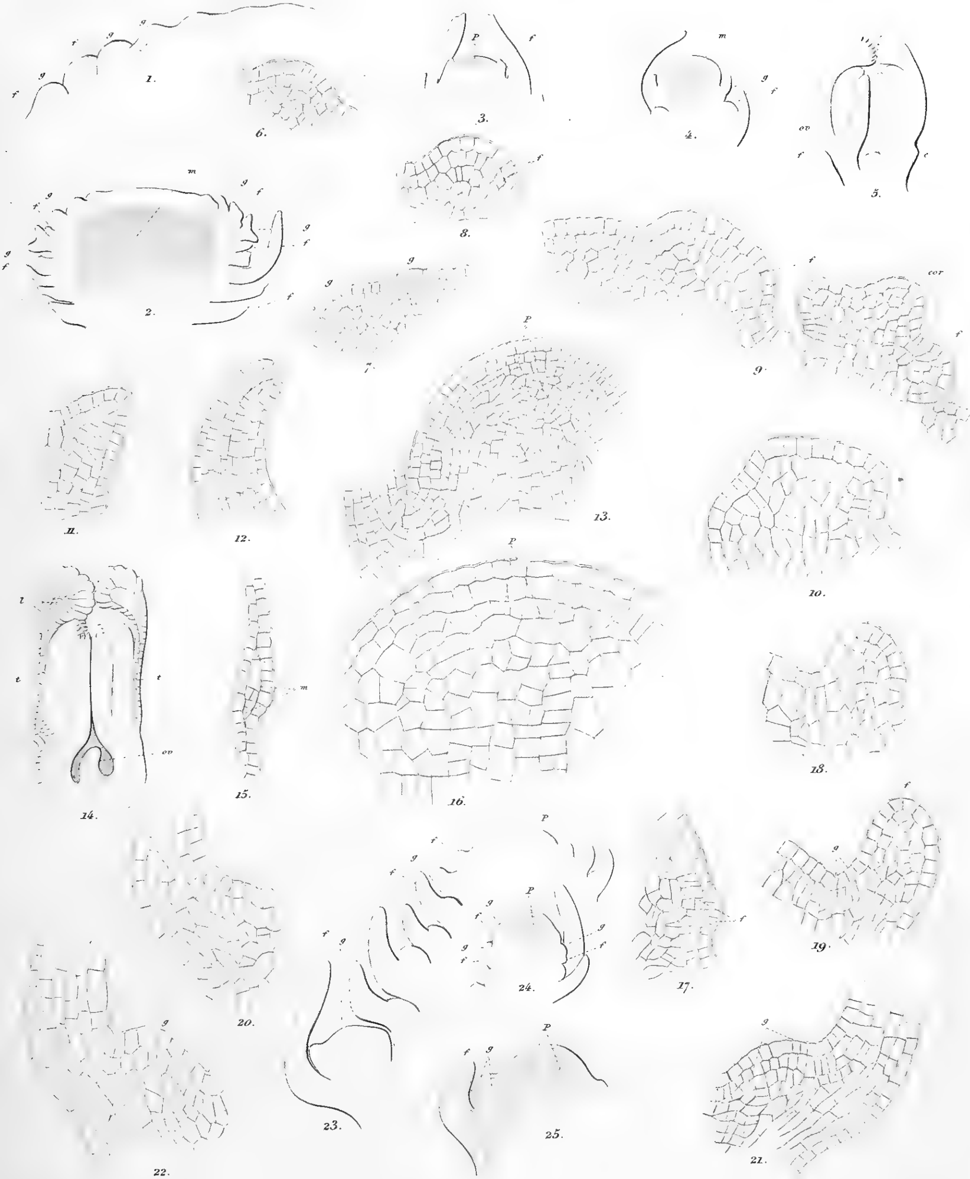
Trykfejl og Tilføjelser.

S. 3, Lin. 15 fra n., Cyamium, l. Cyathium.
- 37. Anm. 2. Kronens Bygning hos *Compositæ* er allerede tidligere omtalt af Chatin. I »De l'anthère« bemærker han, S. 99, at hos *Helianthus petiolaris* dannes Kronen endog kun af *et* Cellelag mellem Fibrovasalstrængene.
- 46, Lin. 6 fra o., yngre, l. ældre.
- 47, — 1 - n., ovarium, l. ovulum.
- 54, — 4 - n., »Kløvning, l. »Kløvning«.
- 64, — 10 - n., jeg ved, første Gang, l. jeg ved første Gang.
- 75, — 15 - o., Cucumus, l. Cucumis.
- 80, — 9 - n., parallelle, l. parallele.
- 128, — 3 - o., at Støvdragerne ikke alle, l. at Støvdragerne alle.
- 143, — 6 - o., betegnes som Vækstpunkt, l. regnes med til Vækstpunktet.
- 144, — 9 - o., Knopper, l. Grene.
- 150, — 8 - n., vegetativ Gren, l. Gren.



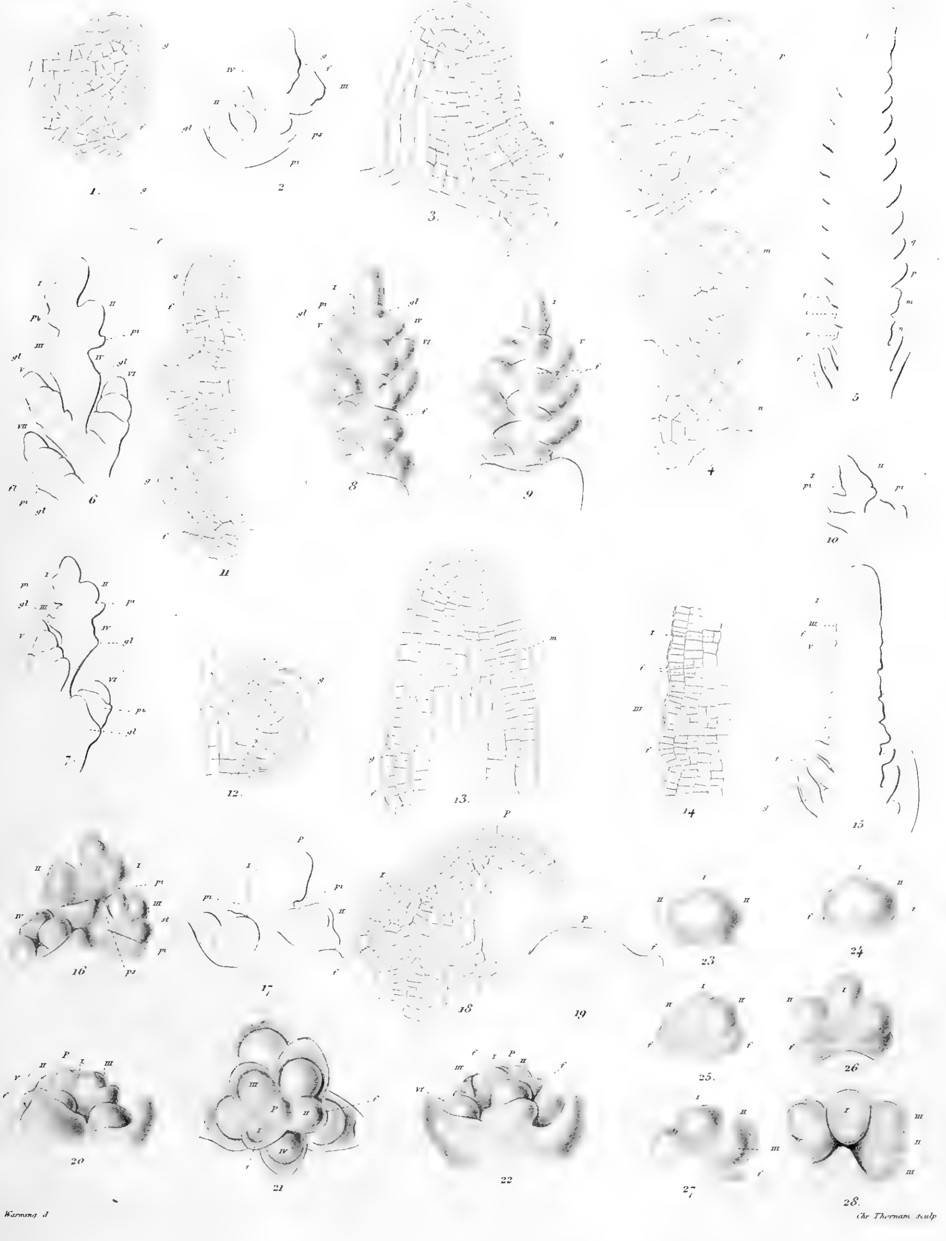
Warming cam. clara del

Thornam sc

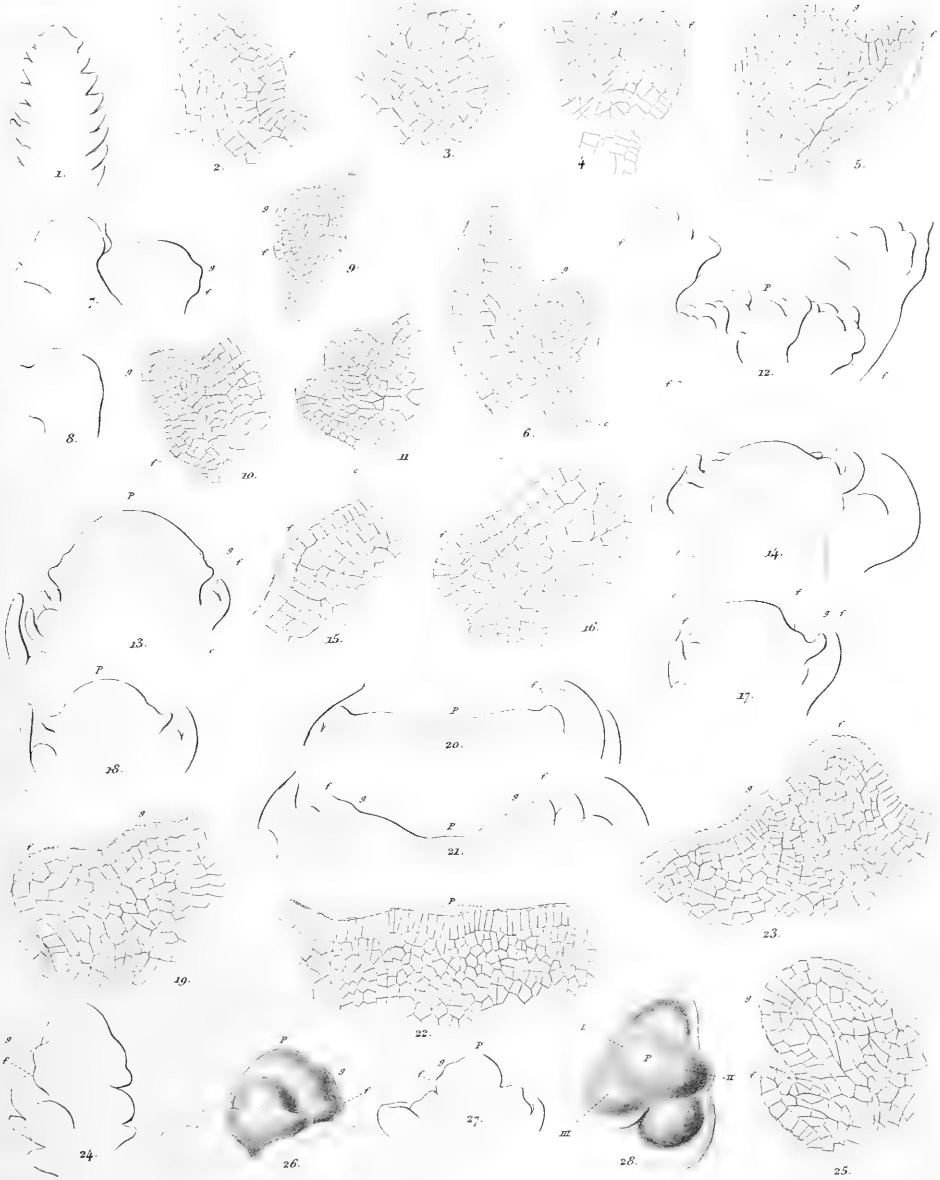


Warming d.

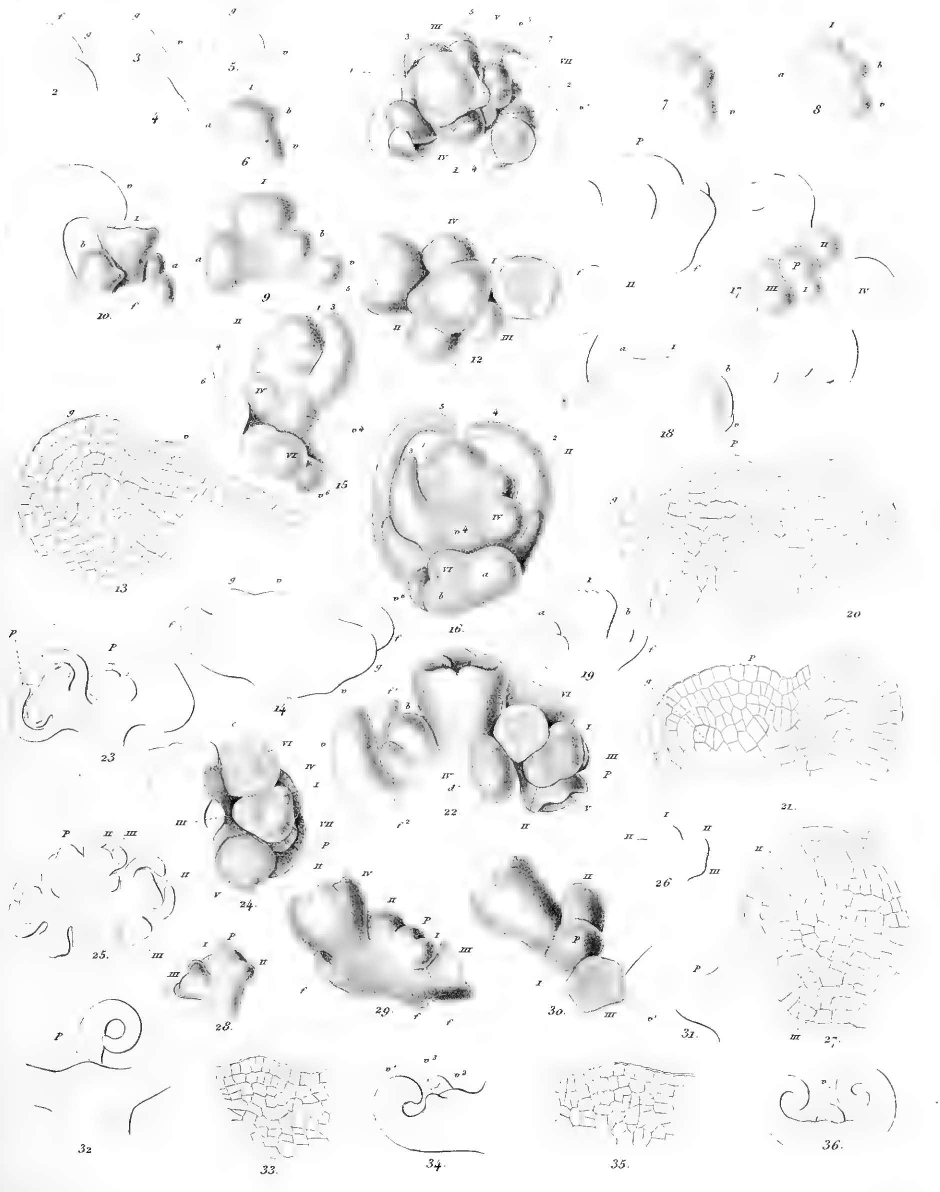
Thornam sc



Warming d. Chr. Thornam sculp.

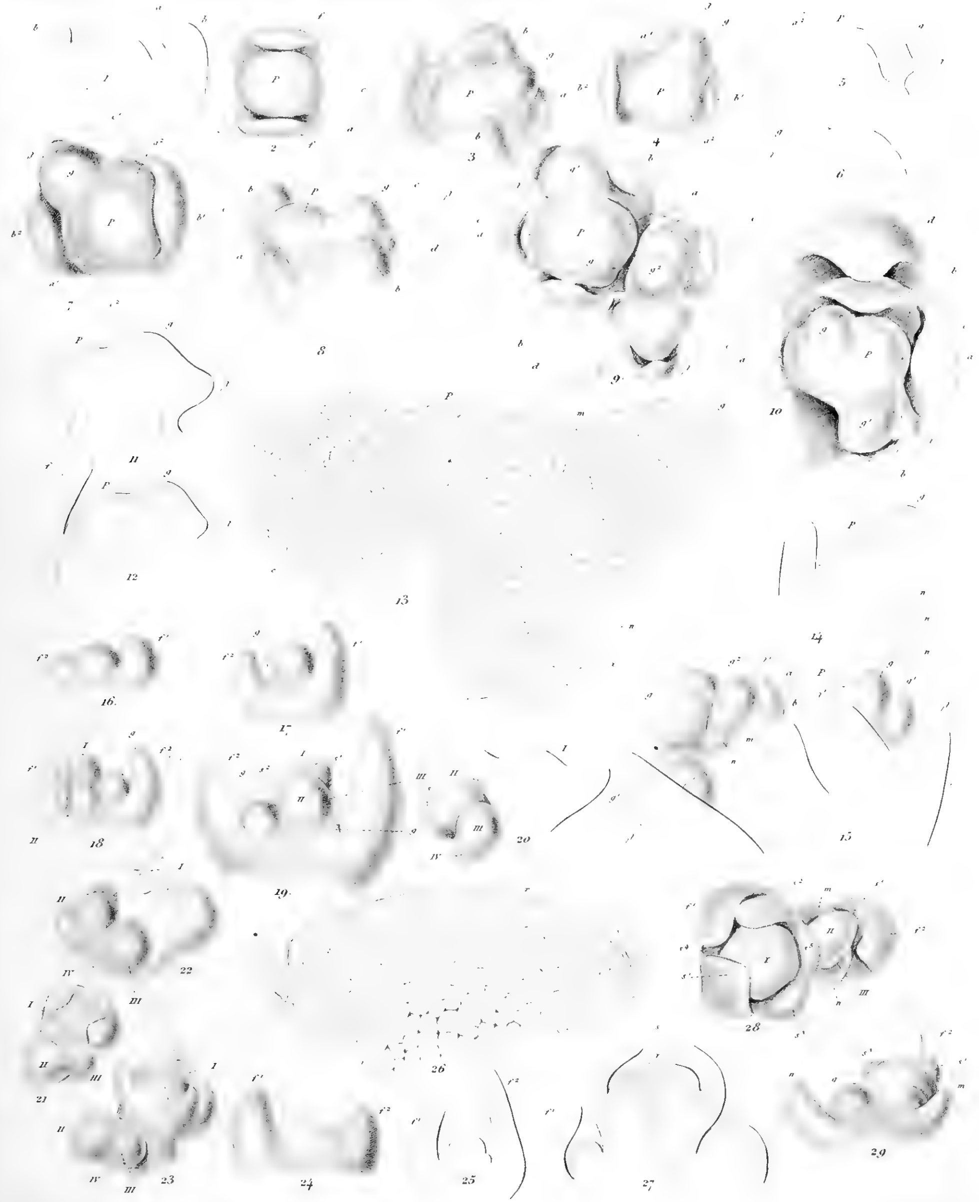


Warming d. Thornam sc.



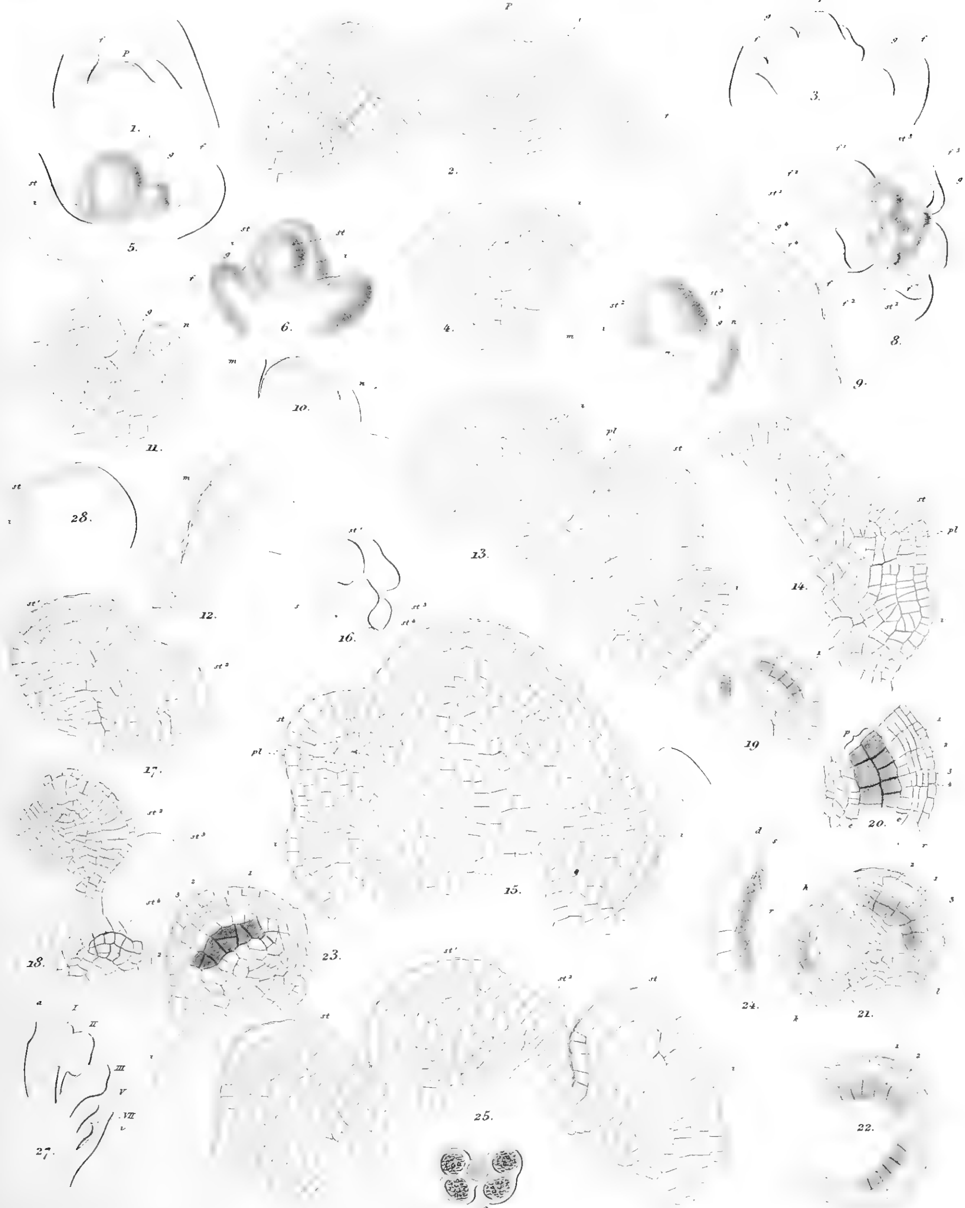
Warming d. Thornam sc.

Warming d.   Jenny Hansen sc.



Warming d. Thornam sc.

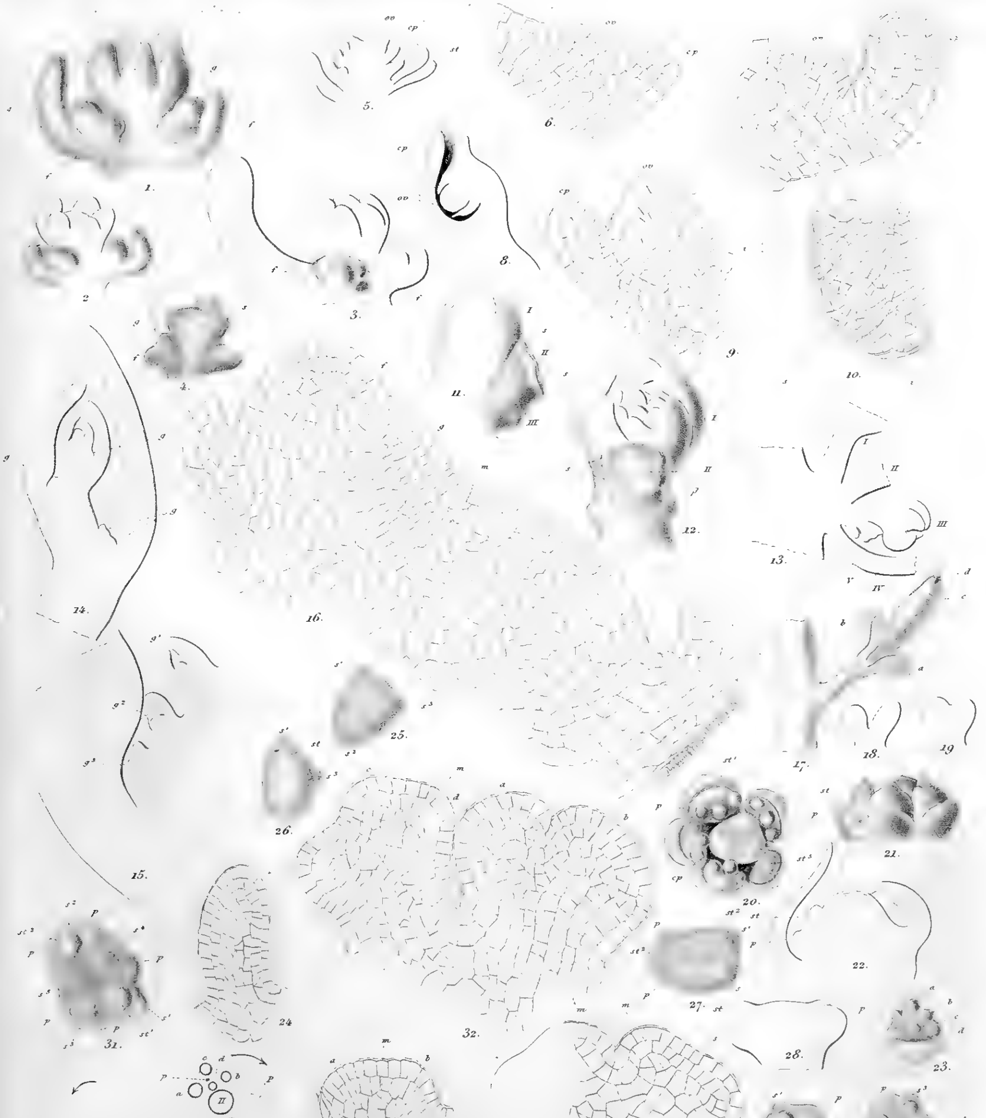
Warming d. Jenny Hansen sc.



Warming d.

Thornam sc.

Warming d. Thornam sc.



Warming d.

Thernam sc.

de fonctions et de formes (segmentations) des cellules, même si elles sont d'une nature plus délicate (p. 9), la limite en question devra être portée au-dessus des organes latéraux, et, dans quelques cas très rares, immédiatement au-dessus d'eux. Or, comme la cellule terminale et les groupes des cellules terminales et initiales satisfont aux conditions théoriques d'un point végétatif, ils doivent aussi porter ce nom.

J'expose ensuite (p. 12—19) ce que j'entends par partition du point végétatif. Il ne peut être question de cette partition que lorsqu'un bourgeon naît directement du point végétatif; si un bourgeon prend naissance dans une cellule-fille de la cellule terminale, même la plus jeune de toutes, c'est un bourgeon latéral; je ne puis en conséquence me ranger à l'opinion de M. M. Sachs et Nägeli-Leitgeb (cit. p. 13). Dans une partition dichotomique, il faut toujours qu'il naisse au moins deux bourgeons du point végétatif, et cela de telle façon que la croissance cesse au centre de ce point pour continuer sur les côtés, quelle que soit du reste la manière dont les deux (ou davantage) bourgeons résultant de la partition prennent naissance (p. 14). A ce dernier point de vue, ces bourgeons doivent être considérés comme des bourgeons jumeaux, mais peu importe si leur développement ultérieur est identique ou différent, si entre l'un d'eux et une des productions de l'axe (les feuilles p. ex.) il existe ou non un rapport déterminé (p. 18), s'ils continuent à suivre une direction qui diffère de celle de l'axe-mère, ou si l'un d'eux usurpe cette dernière direction et rejette de côté le bourgeon-sœur (ce qui donne lieu à la formation d'un sympode).

Comme exemples de la partition et de ses rapports à la ramification latérale, j'ai renvoyé aux recherches de M. M. Hofmeister, Kny et autres botanistes sur les Cryptogames (p. 15, 17).

Il est dans la nature des choses que nous ne puissions indiquer une différence essentielle entre la partition du point végétatif et la ramification latérale, et il existe déjà beaucoup d'exemples prouvant qu'elles sont unies par une série d'états intermédiaires (Kny, Magnus, Pringsheim, Nägeli et Schwendener etc., voir p. 17). Nous aurons donc à distinguer entre: 1°. la partition égale du point végétatif ou la dicho-(poly-) tomie, 2°. la partition inégale de ce point, et 3°. la formation du bourgeon en dehors du point végétatif, ou la véritable ramification latérale, avec plusieurs modifications qui seront mentionnées plus loin.

En troisième lieu, je donne un aperçu des cas où la partition du point végétatif est supposée se produire (p. 19—28). Je ne puis admettre qu'on en ait encore démontré l'existence chez les Lycopodiacées (excepté chez les *Selaginelles* (Pfeffer, p. 21), les *Isoetes* et les *Fougères* (p. 22)). La partition du point végétatif, telle qu'elle a été indiquée par divers auteurs (p. 23—25) chez les Phanérogames, n'est évidemment pas toujours une vraie partition, c'est-à-dire une partition égale ou dichotomique, mais simplement une formation de bourgeons au sommet de la tige, comme en particulier la «Theilung» du sommet de la tige de M. Hofmeister (p. 24—27). On trouvera exposées p. 27—28 les idées d'autres auteurs. Quant à ce qui concerne la signification de la dichotomie et son apparition chez les Phanérogames, c'est un sujet que j'ai traité dans la partie spéciale de ce mémoire.

Dans la 2e partie de ce mémoire, je communique les recherches que j'ai faites sur la ramification dans les familles végétales qui y sont mentionnées. Dans la 3e partie, je donne un aperçu de mes principaux résultats, et, en la publiant ci-après en traduction française sous une forme çà et là un peu remaniée, je pourrai me contenter d'ajouter quelques remarques et notes, et, pour le reste, renvoyer le lecteur à l'explication des planches, qui, dans ce résumé, est plus détaillée que dans le texte danois.

Forme du sommet de la tige. Le sommet de la tige peut avoir les formes les plus diverses, depuis celle d'un cône à angle assez aigu (*Graminaceæ* Pl. II, *Plantago*, *Amarantus*[1]) jusqu'à celle de cratère (*Digitalis*, IV, 20, 21), et la forme peut différer même chez des espèces appartenant à un même genre (celles du *Digitalis*, comp. IV, 18, 20, 21).

Dans quelques cas rares, le sommet de la tige des axes monopodes est recourbé (*Utricularia*, VI, 11—15), et la tige est par suite enroulée en forme de crosse d'évêque. Chez les pseudo-monopodes de quelques *Asperifoliæ* (comme le *Tiaridium*), elle prend une forme semblable (VIII, 27, 28).

Les plantes à feuilles opposées ont généralement le sommet de la tige plus plat et plus bas que celles à feuilles spiralées. D'ordinaire, il est également plus bas dans la région végétative que dans la région florale. Chez le *Digitalis pauciflora*, il est bas et conique sur la tige végétative, cratériforme sur la tige florale (IV, 20—21). D'après mes propres observations et celles d'autres auteurs, le sommet de la tige de beaucoup de plantes aquatiques semble être toujours élevé et raide.

Histologie du sommet de la tige. Mes recherches sur l'histologie du sommet de la tige n'ont en général fait que confirmer l'exactitude des observations publiées par M. Hanstein dans le remarquable travail intitulé: «Die Scheitelzellgruppe im Vegetationspunkt der Phanerogamen», Bonn 1868.

Chez toutes les plantes angiospermes que j'ai examinées, j'ai trouvé le sommet de la tige recouvert d'une couche de dermatogène, segmenté seulement par des cloisons radiées, laquelle est nettement limitée dans son contour intérieur, et recouvre en même temps tous les jeunes kaulomes et phyllomes. Il n'existe nulle part, pas même chez l'*Utricularia* (VI, 11—15), de cellule terminale («Scheitelzelle») ayant la même nature et la même forme (mode régulier de segmentation) que chez les Cryptogames. Des trois systèmes de méristème de la tige, le dermatogène est le plus constant et le mieux caractérisé; il ne manque jamais, même dans les cas où le périblème et le plérome se confondent[2]).

Sous le dermatogène du sommet de la tige, on trouve, dans quelques cas très rares, un méristème tout à fait irrégulier qui n'offre pas trace de couches ou de séries de cellules (*Digitalis* IV, 19, 22—23; vrille du *Cucurbita* V, 33—35). Dans ce cas, il n'est pas possible d'indiquer de petit groupe spécial de cellules comme le groupe de cellules initiales de M. Hanstein, c'est-à-dire il n'y a pas de point végétatif nettement limité comme chez la plupart des Phanérogames que j'ai examinés.

---

[1]) Voir aussi dans le Lehrb. de Sachs 1870 Fig. 109, p. 132, le sommet de la tige de l'*Hippuris vulgaris*, et Fig. 1, Pl. VIII, Ann. d. sc. nat. Sér. V, tom. 7. 1867, le sommet de la tige du *Carex pendula*.

[2]) Conf. en outre: Hanstein, Die Entwickelung des Keimes bei den Mono- und Dicotyledonen. 1870.

Dans tous les autres cas, j'ai, conformément aux observations de M. Hanstein, trouvé sous le dermatogène un tissu cellulaire plus ou moins régulier. Immédiatement sous le dermatogène se trouvent de 1 à 7 couches de periblème (I, 3; IX, 2) qui recouvrent le sommet de la tige comme un capuchon, et dont les cellules, au sommet même de la tige, ne sont le plus souvent segmentées que par des cloisons radiées. Au-dessous de ces couches, la tige est ordinairement formée d'un plérome (ɔ: méristème-mère du système fibro-vasculaire et de la moelle) dont les cellules sont disposées en séries plus ou moins verticales et régulières. Dans quelques cas, il y a entre ces deux méristèmes un tissu cellulaire assez irrégulier.

Je ne suis pas parvenu à découvrir dans les différentes couches du périblème de cellule ou groupe de cellules qui se distinguent des autres par leur forme ou leur grandeur et leur mode de segmentation, et qui puissent particulièrement indiquer le point végétatif de chaque couche. Mais les séries des cellules du plérome se terminent en haut par un groupe de cellules segmentées dans tous les sens, et qui par suite offrent un tissu plus ou moins irrégulier.

Ce «groupe initial» du plérome (Hanstein) est quelquefois limité d'une manière assez précise, et ne compte qu'un très petit nombre de cellules. Tel est le cas premièrement pour les sommets de tiges faibles et minces des *Graminaceæ* (III, 1, 3—4, 11—13) et des *Utricularia* (VI, 11), chez lesquels tant les couches du périblème que les séries du plérome sont très peu nombreuses, et où j'ai toujours trouvé un tissu cellulaire régulier. Les pousses minces que M. Pringsheim a découvertes sur la tige de cette plante et a nommées «Ranken»[1]) (VI, 14, 15), présentent même cette particularité que le plérome se termine par une seule cellule initiale qui est segmentée par des cloisons horizontales; mais c'est là un fait sans importance dû seulement au petit nombre des séries du plérome[2]). Une cellule terminale du plérome, segmentée par des cloisons alternativement obliques dans un sens ou dans l'autre comme les cellules terminales des Cryptogames, n'existe pas, et les indications de M. Sanio à cet égard ont besoin d'être vérifiées.

Mais même dans les sommets de tiges vigoureux et riches en cellules, on rencontre parfois un groupe initial de plérome ne renfermant qu'un petit nombre de cellules disposées avec une grande régularité, comme chez le *Sisymbrium* (I, 3, 5) et l'*Euphorbia* (IX), lorsque ces sommets de tiges ont un grand nombre de couches de périblème contiguës avec des séries de plérome, et, en général, une structure régulière[3]).

Dans d'autres cas, en effet, de pareils sommets de tiges sont moins réguliers (*Asclepias* VII, 13; vieux réceptacles de plusieurs *Compositæ* (I, 10), *Amorpha* (II, 16), *Delphinium consolida* etc.). Ils présentent cette particularité, également observée par M. Hanstein, qu'il n'y a pas de limite tranchée entre les couches de cellules régulières et les séries de cellules dont la direction est plus verticale. Dans ces cas, de même que dans

[1]) Voir: Monatsber. d. Berlin. Akad. 1869.

[2]) Je dois provisoirement considérer ces «Ranken» comme des rameaux. Ainsi que le fait observer M. Sachs, cette hypothèse peut certainement soulever quelques objections.

[3]) Outre les plantes susnommées, nous pouvons encore citer les *Melilotus* (II, 25 et Xyl. I, p. 44) *Cucurbitaceæ*, *Veronica virescens*, et de jeunes réceptacles des *Compositæ* (I, 20) etc.

le sommet de la tige du *Digitalis* et de la vrille du *Cucurbita*, chez lesquels il n'existe absolument aucune différence entre les tissus qui remplissent l'intérieur du sommet de la tige, il est donc impossible de distinguer dans la tige le périblème du plérome, lorsqu'on veut seulement avoir égard à la forme et à l'arrangement de ces tissus dans le sommet même de la tige.

Mais, même dans les cas où l'arrangement des cellules dans le sommet de la tige est régulier, on est souvent en doute pour savoir si une rangée de cellules doit être rapportée aux couches du périblème ou au plérome; dans beaucoup de cas (*Sisymbrium*, *Graminaceæ* (III, 3), *Hydrocaridaceæ*, *Utricularia* etc.), on reçoit l'impression que les couches du périblème ne sont que des séries de plérome qui se réunissent régulièrement en haut, et les séries du plérome, des couches de périblème qui, dans la partie supérieure, se confondent les unes avec les autres, et par suite sont interrompues et se terminent par un groupe de cellules plus irrégulier. Le plérome, dans un bourgeon, provient d'ailleurs le plus souvent des couches du périblème (dans les «Ranken» de l'*Utricularia*, même de la 1e couche seulement (VI, 12, 13), ce qui rend un passage de l'un à l'autre facile à comprendre.

Je dois donc conclure que la différence essentielle que M. Hanstein a établie entre le périblème et le plérome, à savoir que le premier constitue le méristème d'où les phyllomes, les kaulomes et toute l'écorce primaire tirent leur origine, tandis que le second est le méristème-mère du système fibro-vasculaire, que cette différence, dis-je, en beaucoup de cas, n'est pas reconnaissable dans l'histologie du sommet de la tige, fait que M. Hanstein n'a du reste pas manqué de signaler dans «Die Scheitelzellgruppe», p. 128[1]).

Une autre question qui se présente ensuite, est de savoir si la distinction tranchée entre des couches et des séries de cellules, qu'on peut constater en beaucoup d'autres endroits, nous indique réellement la limite entre le méristème-mère de l'écorce primaire et celui du système fibro-vasculaire; je n'ai pu porter sur ce point toute l'attention convenable, mais n'ai aucune raison de douter de l'exactitude des assertions de M. M. Hanstein, Schmitz et Reinke à cet égard.

Rapport entre la forme extérieure et la structure interne du sommet de la tige. J'ai déjà observé: que les sommets de tiges hauts et élancés semblent toujours avoir une structure régulière avec un petit nombre de couches de périblème (*Graminaceæ*, *Utricularia*); que cette régularité est généralement moins grande dans les sommets de tiges larges et bas, et que les couches du périblème y sont peu nombreuses, et la limite entre elles et le plérome, effacée (*Delphinium*, *Veronica*, plusieurs *Composées* etc.); mais que cela ne soit pas une conséquence nécessaire de la forme du sommet de la tige, c'est ce que montrent clairement par ex. le réceptacle du *Rudbeckia* (I, 20) et celui de la fleur du *Datura* (VII, 26—27).

Les épiblastèmes. Sous la dénomination neutre et commune «d'épiblastème», je comprends tous les organes exogènes latéraux, ou issus d'une partition, qui

[1]) «Wo dagegen die inneren Periblemlagen durch unregelmässige Zellentheilung der Form nach in das Plerom übergehen, dürfen wir umgekehrt im Auftreten des Procambiums die natürliche Grenzlinie des Pleroms erkennen».

naissent sur la tige de ses couches de cellules extérieures Mes recherches concernent notamment les phyllomes et les kaulomes. Quant aux trichomes, je m'en occuperai dans un prochain mémoire[1]), et je me bornerai à dire ici que l'*Utricularia* est la seule plante où j'aie trouvé des trichomes sur le sommet de la tige (VI, 14), par conséquent au-dessus des autres épiblastèmes qui ont un rang plus élevé.

Phyllomes. Les feuilles naissent le plus souvent sur le sommet de la tige. Dans quelques cas, au contraire, elles naissent au bas des kaulomes déjà formés (les jeunes bractées dans les inflorescences de quelques *Cruciferæ* (I, 2, 4, 9), *Compositæ* (II, 6—10), *Graminaceæ* (III, 4), *Umbelliferæ* (IV, 9, 10), *Papilionaceæ*, *Valeriana* (III, 23—25), *Cucurbitaceæ* (V, 11, 29), *Asclepiadaceæ* (VII, 3—12) etc.). Nous pouvons également rappeler ici les cas assez nombreux où des feuilles de jeunes fleurs sont intercalées entre des feuilles plus âgées; mais de pareilles intercalations, ou en général des formations de phyllomes, au-dessous de phyllomes ou de kaulomes plus âgés, ne paraissent pas avoir lieu, ou du moins n'apparaissent que très rarement dans la région végétative des Phanérogames, surtout lorsque c'est bien au-dessous du sommet de la tige.

La vrille à un seul bras des Cucurbitacées, par ex. du *Bryonia*, a été interprétée comme une feuille, bien qu'elle naisse loin du point végétatif de la tige (V, 15, 16); mais je ferai observer que cette manière de voir n'est guère exacte, en ce sens que cette vrille n'est pas seulement une feuille, mais un bourgeon (extra-axillaire) avec sa feuille; cette dernière, il est vrai, est bien plus développée, tandis que le bourgeon a des dimensions très réduites, et, dans beaucoup de cas, n'est pas à distinguer sur la vrille complètement développée. C'est surtout l'analogie avec la vrille à plusieurs bras qui nécessite cette interprétation (voir plus loin aux bourgeons extra-axillaires et mon petit mémoire inséré dans les «Videnskabelige Meddelelser» 1871 avec un résumé français; xyl. III—IX texte p. 70). Il convient également de rappeler ici que, chez le *Calliopsis tinctoria*, de petites feuilles caulinaires semblent quelquefois naître sur les côtés de la vieille tige — toutefois ce n'est qu'en apparence, comme M. Al. Braun le dit expressément[2]).

Les phyllomes naissent dans tous les cas dans les couches extérieures du périblème. Qu'ils naissent, comme le dit M. Hanstein[3]), dans la 2^e—4^e couche du périblème, est bien exact, mais je crois pouvoir dire, non seulement que c'est par exception que la 1^e couche du périblème, par des segmentations tangentielles et autres, ne prend pas part à cette formation, notamment celle des feuilles florales, dont je me suis spécialement occupé, mais même, relativement à ces dernières, que c'est de préférence cette couche du périblème, et, dans certains cas, elle seule qui est active. Ce dernier cas se présente notamment chez les feuilles peu développées, comme les bractées de diverses inflorescences par ex. de l'*Anthemis* (II, 8, 9), d'autres *Compositæ*, les *Sisymbrium* (I, 4, 9, 12), *Graminaceæ* (III, 3, 11, 13, 14), *Chærophyllum* (IV, 10), *Anthriscus silvestris*, et d'autres Ombellifères, le *Vallisneria* (VI, 1—4), sur lequel j'appelle particulièrement l'attention à cause du beau développement de ses feuilles, l'*Hydrocharis* (VI, 8, 10), l'*Euphorbia* (IX) etc.

---

[1]) Videnskabelige Meddelelser, 1872.

[2]) Voir cit. texte p. 141—42.

[3]) Scheitelzellgruppe p. 120.

Le dermatogène participe d'une manière essentielle dans la formation des feuilles, surtout les florales. Je citerai ainsi, d'après mes propres recherches, la spathe de l'inflorescence du *Vallisneria* (VI, 5, 6), la ligule des Graminées, les bractées dans l'inflorescence des Graminées (III, 3, 4, 11) et (en tout cas, quelquefois) du *Rheum compactum* (IV, 25), la corolle des *Compositæ* (I, 14—15), la corolle et les sépales de l'*Acacia armata* (VI, 7), les bractées et les pétales du *Plantago major*, les bractées du *Gladiolus communis*, les préfeuilles et les bractées du *Zanichellia*.

Comme autres exemples, je mentionnerai encore le *Brizula*, d'après *Hieronymus*[1]), l'*Elodea*, d'après *Caspary*, et on arrivera certainement à établir que, dans les bractées, les feuilles du périgone, les stipules et les préfeuilles faibles et minces de beaucoup d'autres plantes, la feuille se développe principalement de l'épiderme.

Enfin, il faut aussi mentionner ici les téguments de l'ovule chez un très grand nombre de plantes, par ex. l'*Euphorbia* (X, 16—20, 22), les *Chrysosplenium alternifolium* (X, 26), *Scrophularia nodosa* (X, 28—30), *Myogalum nutans* (X, 31), *Zanichellia macrostemon* (X, 10). Voir également à ce sujet M. M. Schmitz[2]), Sachs[3]), Schleiden[4]) et Hofmeister[5]) etc.

Je n'ai pas étudié le mode de croissance des feuilles; elles semblent toujours dans leur jeune âge croître de préférence à l'extrémité et sur les bords (comme M. Nägeli l'a indiqué depuis longtemps), et une coupe longitudinale radiée y montre ordinairement un mésophylle formé à l'extrémité (sous le dermatogène ou une couche continue de périblème) d'une ou de deux cellules ou rangées de cellules, qui se multiplient de haut en bas par segmentations successives (II, 12, 18, 19; IV, 4—6, 11; VI, 1, 4; X, 7; XI, 6, 7)[6]).

Chez la plupart des feuilles la ramification est une vraie ramification latérale. On observe une partition dichotomique dans les étamines du *Ricinus* (XI, 32—34, où la ligne *m* indique la ligne médiane des ramifications des étamines).

La formation du procambium commence de meilleure heure à la base de la feuille que plus haut. En général on en trouve les premières traces un peu au-dessous du sommet de la tige[7]), mais on peut cependant rencontrer un assez grand nombre de feuilles, surtout de celles dont le développement est moins vigoureux, entre le sommet de la tige et le point extrême de la tige où se trouvent les cellules du procambium. On a donc ici sur la partie supérieure de la tige plusieurs organes latéraux, ayant le caractère de phyllomes, qui devraient être considérés comme appartenant au point végétatif, si l'on veut lui assigner

---

[1]) Bot. Ztg., 1872, p. 206.

[2]) Bot. Ztg., 1870, p. 37—40.

[3]) Lehrb., 1870, p. 471.

[4]) Acta L. C. C. 1839.

[5]) Neue Beiträge z. Kenntn. d. Embryobildung der Phanerogamen.

[6]) J'ai trouvé que la coupe qui se forme sur la toute jeune fleur des *Composées*, et qui comprend la jeune corolle, l'androcée et le gynécée, a la même structure que les feuilles en général (conf. I, fig. 19 et II, fig. 11 et 12). Cela semblerait confirmer les idées de M. Koehne sur cette production cupuliforme (conf. «Blüthenentwickelung bei den Compositen» et texte p. 37).

[7]) Conf. note, texte p. 143.

comme limite inférieure le procambium, ou en général l'endroit où se trouve un tissu formé d'une manière essentiellement différente.

On voit encore plus clairement que des organes latéraux nettement caractérisés peuvent se trouver au-dessus de la cellule la plus élevée du procambium, lorsqu'on considère les tiges qui portent des bourgeons sans feuilles-mères, car on rencontre ordinairement un grand nombre de ces derniers au-dessus de la zone où cette cellule est située.

Kaulomes. M. Hofmeister a tort de croire que les bourgeons se forment toujours directement sur le sommet même de la tige, et que les épiblastèmes naissent sur la tige suivant leur rang («Dignität») (voir cit. p. 24—27).

Par contre, je puis entièrement confirmer l'exactitude des indications de M. Sachs dans la 2e édition de son «Lehrbuch» 1870, p. 125, avec lesquelles concordent aussi par ex. celles de M. M. Schacht[1]) et Magnus (conf. texte p. 26—27).

Il est de règle pour presque tous les bourgeons végétatifs, qu'ils naissent longtemps après leurs feuilles-mères et plus bas sur la tige que d'autres feuilles. Il est aisé de s'en convaincre, et, aux exemples cités dans la partie générale (*Ribes*, *Asclepias*, *Graminaceæ* et bien d'autres), je joindrai encore quelques observations. Chez les plantes à feuilles opposées, il est particulièrement facile d'obtenir des coupes qui permettent de dire avec certitude à l'aisselle de quelle feuille, au-dessous du sommet de la tige, apparaissent les bourgeons. C'est ainsi que les rameaux végétatifs des *Aesculus*, *Syringa*, *Lonicera*, *Urtica*, *Phlox* etc., que j'ai examinés sous ce rapport, montrent aussi clairement que possible que, dans beaucoup de cas, il y a 1—2—3—4 paires de feuilles au-dessus des feuilles à l'aisselle desquelles on observe les premières segmentations de cellules qui ont pour but la formation d'un bourgeon. Dans tous les cas semblables, il ne peut naturellement être question qne cette formation de bourgeons soit due à une partition du point végétatif[2]).

Mais, dans les inflorescences, il arrive souvent aussi que les organes latéraux de l'axe les plus haut placés sont toujours des feuilles, et que les bourgeons naissent à l'aisselle des feuilles qui sont séparées par d'autres du sommet de la tige (par ex. chez l'*Amorpha* (II, 16—23) et le *Salix* (IV, 1—6) (contrairement aux indications de Hofmeister cit. p. 42, 53) et chez les *Rudbeckia laciniata* (I, 16—17), *Lupinus mutabilis*, *Veronica virescens* et autres espèces, *Digitalis pauciflora* et *lutea* (IV, 18—23), *Orchis maculata*, *Delphinium consolida* (IV, 15—17) etc. etc.[3]).

Il se présente ensuite dans la région florale des tiges une foule de cas où la production nouvelle la plus haut placée sur l'axe est un bourgeon, soit que ce bourgeon naisse immédiatement après sa feuille-mère (*Plantago*, *Orchis* et *Epipactis* (IV, 26—28), *Isolepis tenella* etc.); soit en même temps que celle-ci (*Graminaceæ* (III, 14—15, 13, 11), *Cytisus Laburnum*, *Trifolium*, *Orchis mascula*, *Plantago*, *Ribes sangineum* (III, 20—22) etc.); ou avant elle (*Sisymbrium* (I, 2, 4, 9), *Brassica oleracea var. botrytis* et autres *Cruciferæ*, *An-*

---

[1]) Beiträge z. Anatomie u. Physiologie, p. 25.

[2]) Conf. aussi Sachs: Lehrb. 1870, fig. 107—109, 121, 136; Schacht: Anat. u. Physiol. II, fig. 88.

[3]) Conf. aussi Sachs: Lehrb. 1870, p. 151, fig. 123.

themis (II, 1—2, 6—10), *Umbelliferæ* (IV, 7—9, 12), cymes du *Valeriana Phu* (III, 23—28), inflorescences des *Asclepiadaceæ* (VII, 3—12, 15), du *Bryonia dioica* (V, 11) et du *Cucumis prophetarum* (V, 29) etc.), ou, sans qu'il y ait trace de feuille-mère: inflorescences des *Cruciferæ*) (I, 7), des *Compositæ* (comme l'*Inula* (I, 18) et le *Doronicum* (I, 15, 19)), des *Graminaceæ* (III, 5, 6, 7), des *Umbelliferæ*, des *Papilionaceæ*; cymes axillaires et inflorescences des *Cucurbitaceæ* (V, 5—9, 16, 18, 20—22, 23, 25, 28); cymes scorpioïdes nues des *Solanaceæ* (VII, 18—23), des *Asperifoliæ* (VIII, 16, 27), des *Hydrophyllaceæ* (VIII, 21—23), des *Saxifragaceæ* etc., plus l'inflorescence du *Potamogeton*, d'après M. Hegelmaier[1]), et certainement beaucoup d'autres.

J'ignore si, dans la région végétative, il y a des cas où les bourgeons naissent immédiatement après leurs feuilles-mères, ou même avant; mais il me semble cependant probable que les rhizomes des *Corallorhiza* et des *Epipogum*, examinés par M. Schacht[2]), peuvent en offrir des exemples.

Il se présente alors cette question, à savoir si tous les bourgeons qui sont les productions nouvelles supérieures de l'axe, et qui prennent réellement naissance sur le sommet même de la tige, doivent être considérés comme résultant d'une partition du point végétatif (conf. les opinions citées à cet égard 1e partie texte p. 23—28), ou, en d'autres termes, si les cellules qu'il faut ranger dans le groupe apicilaire (ou terminal) («Scheitelzellgruppe») de Hanstein[3]) prennent part à la formation des bourgeons, et, dans ce cas, en quoi consiste leur participation: si la partition du point végétatif se fait exactement par son centre (partition dicho-polytomique), ou si le plan de partition est plus ou moins excentrique.

Généralement, ces bourgeons, tout en naissant sur le sommet de la tige, sont situés au-dessous, ou, en tout cas, en dehors des cellules du point végétatif (groupe apicilaire). Comme en fournissant des exemples, nous citerons les *Cruciferæ* (I, 2 etc.), *Graminaceæ* (III, 3, 13 etc.), *Compositæ*, *Papilionaceæ*, *Grossulariaceæ* (III, 18), *Umbelliferæ* (IV, 7—9), *Polygonaceæ*, *Ampelopsis* (dans la formation de la vrille, VI, 20, et sa ramification VI, 16, 17), *Bryonia* (V, 11), *Cyclanthera* (dans plusieurs cas); les *Solanées*, dans la ramification des tiges végétatives (VII, 16—19, 25, 28; VIII, 3); le *Saxifraga crassifolia* et les *Solanées*, dans la formation des cymes scorpioïdes nues (VII, 19—23); les *Asperifoliæ*, dans quelques cymes scorpioïdes (VIII, 19, 20) etc. etc. C'est surtout dans les cas où le sommet de la tige a la forme d'un cône élevé ou est très large, qu'on voit clairement que les bourgeons qui naissent à sa base, sont très éloignés du groupe apicilaire (voir cit. de Sachs, texte p. 36).

Cette formation de bourgeons est évidemment une pure ramification latérale qui diffère de celle dont il a été d'abord question, et où il y avait toujours au moins une feuille au-dessus du plus jeune bourgeon, seulement en ceci que le bourgeon se montre

---

[1]) Bot. Ztg. 1870, S. 284.

[2]) Voir texte p. 23.

[3]) Voir ci-dessus p. I—II et l'Introduction p. 8—10, où j'ai indiqué les motifs qui tendent à faire donner au groupe apicilaire le nom de «point végétatif», «punctum vegetationis».

plus tôt après sa feuille-mère, ou que celle-ci manque complètement; mais que ce soit une chose absolument sans importance, cela résulte avec assez d'évidence du passage graduel que nous avons si souvent observé d'une de ces ramifications à l'autre (conf. surtout le *Sisymbrium* (I, 1, 2, 7, 8, 11) et d'autres Crucifères, les *Secale* (III, 5—7), le *Poa* (III, 8, 9), le *Hordeum* (III, 15), et du mélange qu'elles présentent dans la même famille, le même genre, voire la même espèce et le même individu (qu'on se rappelle, par ex., les *Graminaceæ*, les *Cruciferæ*, les *Compositæ* (*Anthemis*, *Inula* et *Doronicum*, *Rudbeckia*) etc.). C'est simplement un phénomène qui est en connexion avec la métamorphose de la plante, l'intervalle entre l'apparition des bourgeons axillaires et de leurs feuilles-mères devenant d'autant plus petit, qu'on se rapproche davantage de la région florale.

Beaucoup moins nombreux sont les cas où les bourgeons naissent si près de l'extrémité du sommet de la tige, que les cellules périphériques du point végétatif prennent part à leur formation. Le point végétatif se divise par conséquent; une partie de ses cellules, la plus grande, continue, comme auparavant, à travailler à l'allongement de l'axe principal dans la même direction, les autres concourent avec des cellules situées en dehors du point végétatif à la formation du nouveau kaulome. On observe cette «partition du point végétatif» dans les inflorescences du *Cyclanthera* (V, 20) et de l'*Ecbalium*, dans les ramifications cymeuses à l'aisselle des feuilles caulinaires des *Cucurbitacées* (V, 5—8, 16, 18), peut-être aussi dans les cymes du *Valeriana Phu* (III, 23—28), des *Asclepiadées* lors de l'apparition des inflorescences (VII), chez quelques *Ombellifères*, comme l'*Aegopodium*; en certains cas, chez l'*Hydrocharis*, le *Vallisneria* (conf. Rohrbach, Beitr. z. Kenntn. einiger Hydrocharideen) et chez le *Vitis vulpina*, aussi bien lors de la formation de la vrille (VI, 23) que lorsque celle-ci se ramifie (VI, 21).

Je citerai encore ici la formation des ovules dans la fleur femelle de l'*Euphorbia*, parce que je dois les regarder comme des kaulomes, et parce que, sans aucun doute, ils prennent en partie naissance dans les cellules du groupe apicilaire; mais peut-être est-ce plutôt une partition trichotomique qui a lieu ici.

Enfin on observe dans d'autres cas une véritable dichotomie du point végétatif; ses cellules se divisent en deux (ou davantage) groupes suivant un plan passant par la ligne médiane (ou plusieurs qui se coupent suivant cette ligne), et chaque groupe devient le point de départ d'une nouvelle formation de bourgeons. Cela a été constaté chez l'*Hydrocharis* (VI, 8—10) et le *Vallisneria* (VI, 1—4), dans la ramification des vrilles (VI, 22, 24—27), et, quoique moins nettement, dans celle de l'axe principal du *Vitis vulpina* lors de la formation des vrilles (VI, 23); chez les *Asclepiadaceæ*, lors de la formation des inflorescences (VII, 3, 9—12); dans les cymes scorpioïdes munies de bractées, et en partie celles privées de bractées des *Solanaceæ* (*Hyoscyamus*, VIII, 5—9), *Asperifoliæ* (VIII, 10, 12—14, 18), *Hydrophyllaceæ* (VIII, 21, 22, 23), *Cistaceæ* (VIII, 15); et peut-être aussi, dans quelques cas, dans les inflorescences du *Cyclanthera* (V, 21), et chez d'autres *Cucurbitaceæ*, lorsqu'un des rameaux de leurs bourgeons axillaires ramifiés en cyme ne se développe pas (V, 15).

Pour citer enfin un exemple de partition d'un phyllome, je mentionnerai les étamines du *Ricinus americanus* comme présentant un véritable cas de dichotomie (XI, 32—34; *m* signifie la ligne médiane)[1]).

Il y a donc, nous l'avons vu, un grand nombre d'inflorescences dont les fleurs manquent de bractées-mères. On a cherché à expliquer ce fait en supposant que les bourgeons provenaient d'une partition du point végétatif (voir cit. texte p. 27), ou que les feuilles-mères étaient bien présentes mais avortaient de très bonne heure (voir texte p. 29 etc.); car, même si elles n'étaient pas visibles extérieurement, l'imagination pouvait toujours se les figurer présentes dans l'intérieur, qui n'était pas connu; aujourd'hui on admet assez généralement que les feuilles ne se montrent pas du tout (Hanstein, Hofmeister, Sachs etc.). Je dois me ranger à cette opinion; dans la partie spéciale de ce mémoire, j'ai constaté chez les *Cruciferæ*, *Graminaceæ*, *Compositæ* (I, 18), *Cucurbitaceæ* (V, 20 etc.), et les cymes scorpioïdes des *Solanaceæ*, *Asperifoliæ* (VIII, 16, 24—27) etc. etc., un assez grand nombre de cas où il n'y avait pas une seule segmentation de cellule qui pût être interprétée comme une trace de feuille, et les transitions que nous avons observées chez le *Sisymbrium*, les *Graminaceæ* (par ex. III, 4—5) etc. montrent avec la plus grande évidence que la feuille disparaît et cesse d'exister sous le bourgeon, qui n'en est pas moins un vrai bourgeon latéral.

Rapports mutuels des divers modes de ramification. Quelques botanistes ont regardé la ramification par partition du point végétatif et celle par formation de bourgeons latéraux comme deux modes de ramification très différents. Dans ma conviction, ces deux formes de genèse des bourgeons ne diffèrent pas du tout dans leur essence.

Déjà la théorie seule (texte p. 17, résumé p. II) nous conduit à la conclusion que, par la nature même de la genèse des bourgeons, ces deux modes de ramification doivent pouvoir passer de l'un à l'autre. Que l'on ouvre, par ex., «Das Mikroskop» de Nägeli et Schwendener p. 588, et examine les figures schématiques qui s'y trouvent; et l'on verra que, relativement aux plantes dont le point végétatif renferme plusieurs cellules, ces passages sont encore plus faciles à concevoir; qu'on suppose qu'un bourgeon naisse sur le sommet de la tige tout près du point végétatif, mais sans qu'une seule des cellules de ce dernier entre en activité; que, dans un autre cas, une de ces cellules devienne active; que, dans d'autres cas encore, une ou plusieurs autres cellules du point végétatif se joignent à la première, et que le bourgeon se forme de plus en plus près de la ligne médiane, et on sera ainsi peu à peu conduit au cas où la moitié de ses cellules travaille d'une manière indépendante de l'autre moitié, dans laquelle se forment d'ailleurs deux nouveaux rameaux par dichotomie du point végétatif (ou, ce qui est la même chose, de la tige).

Chez les Cryptogames, on a observé plusieurs cas où la ramification latérale et la dichotomie se montrent chez la même espèce et se remplacent l'une l'autre; conf. les citations p. 17, auxquelles on peut encore ajouter les recherches de Leitgeb (Bot. Ztg.

[1]) D'après Hegelmaier, c'est aussi le cas chez les feuilles du *Ceratophyllum*, lors de leur 1re ramification; voir Bot. Ztg. 1871, p. 501—2, et la cit. dans le texte danois p. 146, note.

1871, p. 557) et les belles observations de M. M. Kny et Magnus sur la ramification des Cryptogames (Sitzungsber. naturf. Freunde, Berlin, 1871—72). Que les Phanérogames ne se comportent pas autrement à cet égard, c'est ce que j'ai déjà souvent eu l'occasion de remarquer. J'ai cité plus haut plusieurs exemples prouvant que les divers modes de ramification (formation du bourgeon longtemps après, ou immédiatement après, ou en même temps que, ou avant celle de la feuille-mère; au-dessous, sur le côté ou à l'extrémité du sommet de la tige; par partition égale ou inégale du point végétatif) se produisent à côté l'un de l'autre dans un mélange variable chez différents genres de la même famille, ou différentes espèces du même genre, bien plus dans différentes parties ou différents degrés de développement de la même espèce, voire du même individu, avec des transitions insensibles, et sans qu'on puisse remarquer des différences dans la ramification, ni découvrir la moindre trace que les divers modes de formation du bourgeon jouent un rôle très différent dans la vie de la plante. Qu'on se rappelle comme exemples les différents genres des *Compositæ* [*Doronicum* (I, 15, 19), *Inula* (I, 18), où le bourgeon se forme sans trace de feuille-mère; *Anthemis* (II, 1—2, 6—10), où la feuille-mère se forme après et sur le bourgeon; *Rudbeckia* (I, 16—17), où la formation du bourgeon suit celle de la feuille-mère]; les inflorescences du *Bryonia* et du *Cyclanthera* (V) (chez le premier, rien que des bourgeons latéraux; chez le second, ramification latérale aussi bien que partition inégale, et, dans quelques cas, partition dichotomique du point végétatif); la ramification de la tige végétative et des inflorescences du *Solanum* (véritable ramification latérale VII, 17—20; VIII, 3) et de l'*Hyoscyamus* (véritable dichotomie VIII, 5—9); les cymes scorpioïdes des différentes espèces et individus des *Borraginées* (partition dichotomique chez la plupart de ceux ayant des bractées; partition, ramification latérale et pseudo-monopodiale chez d'autres (par ex. VIII, 17, 18, 20, 21)); l'*Hydrocharis*, qui présente tantôt une partition, tantôt presque une ramification latérale (Rohrbach, Beiträge z. Kenntn. einiger *Hydrocharideen*); les vrilles des *Ampelidées* (elles naissent comme bourgeons latéraux chez l'*Ampelopsis hederacea* (VI, 20, 16, 19); par partition excentrique, ou, en quelques cas, peut-être, par partition dichotomique chez le *Vitis vulpina* (VI, 23); elles se ramifient par des bourgeons latéraux chez le premier (VI, 16, 17), par dichotomie chez le second (VI, 22, 24—27)); les inflorescences des *Asclépiadées* (elles naissent toujours sur le sommet de la tige par une partition tantôt égale tantôt inégale de celui-ci, dont on voit la structure et la ramification, VIII, 1—15).

Le résultat est donc qu'il n'y a aucune différence essentielle entre les ramifications par partition (inégale ou égale) du point végétatif et par formation de bourgeons latéraux bien au-dessous de ce point. Vient ensuite cette question: qu'est-ce qui détermine l'un ou l'autre de ces modes de ramification? Nous ne pouvons y répondre qu'en examinant dans quelles circonstances, et sur quelles espèces d'axes, se produit la partition du point végétatif.

Je crois en partie pouvoir confirmer l'assertion de M. Aug. St. Hilaire, d'après laquelle la partition serait provoquée par «un plus grand degré d'énergie»; toutefois il y a aussi d'autres éléments à prendre en considération, et l'énergie du développement n'est pas le seul facteur qui joue un rôle.

Je ferai ainsi d'abord remarquer qu'il est fort rare que la partition survienne dans la région végétative des Phanérogames, de même qu'il est de règle ici que les bour-

geons prennent naissance lorsque leurs feuilles-mères ont déjà acquis une grandeur notable. La région végétative a avant tout pour fonction de développer vigoureusement les organes nécessaires à la respiration et à la vie de l'individu, et même si elle les remplit avec le plus grand degré d'énergie, il ne se manifeste aucun changement dans les conditions de la formation des bourgeons.

Mais plus nous nous rapprochons de la région florale, plus la formation des bourgeons devient le but du travail de la plante, et plus rapidement se succèdent ces derniers, tandis que la formation des feuilles se ralentit (jusqu'à ce que nous atteignions la fleur elle-même). C'est donc aussi dans cette région que nous rencontrons les cas les plus nombreux de partition du point végétatif, le bourgeon devenant si vigoureux et demandant tant de place sur le sommet de la tige qu'il s'avance jusqu'à la ligne médiane.

Que l'énergie plus ou moins grande du développement joue un rôle important relativement à la nature de la ramification, c'est ce qu'on arrive tout naturellement à conclure, lorsqu'on observe que les cymes scorpioïdes, chez différentes familles, montrent d'autant plus de tendance à se ramifier par partition du point végétatif qu'elles sont plus vigoureuses et plus riches en fleurs. Chez quelques *Solanées*, comme le *Datura* (VII, 25—27), le *Petunia* (VII, 28, 29) et le *Scopolia* (Warming, Botan. Tidsskr., Vol. III, Pl. 2, Fig. 4, 5), où, de même que dans la région végétative du *Solanum* (VII, 16—19), il n'y a pas encore d'inflorescences proprement dites, tous les bourgeons sont des bourgeons latéraux. Tel est aussi le cas pour les cymes scorpioïdes faibles et pauvres en fleurs des *Solanum*, *Lycopersicum* (VII, 20—23) et *Saxifraga crassifolia*, et les «cymæ seriales» du *Verbascum* (XI, 11—13) et du *Cyclanthera* (V, 22, 24—27) etc. Mais à peine avons-nous affaire aux cymes scorpioïdes vigoureuses et riches en fleurs des *Hyoscyamus* (VIII, 5—9), *Symphytum* (VIII, 16; Warming, «Videnskabelige Meddelelser», 1871, III, Fig. 86), et autres *Asperifoliæ* et *Hydrophyllaceæ* (VIII, 21—23) etc., que la dichotomie devient le mode normal de ramification[1]. Enfin, comme cas extrême très remarquable, nous avons les cymes scorpioïdes du *Tiaridium* (VIII, 25—28), lesquelles se distinguent tout particulièrement par leur vigueur et l'abondance de leurs fleurs, où la ramification dichotomique devient réellement une ramification pseudo-monopodiale; quelque absurde que cela paraisse, on peut presque dire que la formation des axes d'un ordre supérieur est accélérée à ce point, qu'ils précèdent les axes d'ordre inférieur, les axes latéraux se montrant avant leurs axes principaux (lorsqu'on se rappelle toute l'histoire du développement de la cyme scorpioïde à partir de la cyme), et que ces derniers apparaissent comme des bourgeons pseudo-latéraux sur un axe qui est un pseudo-monopode.

Bien que ces cymes scorpioïdes nous indiquent positivement que l'énergie du développement et l'activité de la ramification influent sur le mode de formation des bourgeons, il est cependant évident que ces facteurs ne jouent aucun rôle ailleurs, par exemple dans les inflorescences monopodiales en forme de grappes. Nous devrions autrement nous attendre à rencontrer la partition du point végétatif dans les inflorescences du *Brassica oleracea* var. *botrytis* (texte danois p. 35), où la formation des bourgeons marche avec

---

[1]) Voir aussi les publications de Kraus, cit. texte p. 97.

une rapidité sans égale, de même que dans un grand nombre de grappes très vigoureuses d'autres *Crucifères*, ou dans les inflorescences richement ramifiées du *Rheum*, de l'*Amarantus* etc. D'un autre côté, nous voyons aussi que la partition du point végétatif se produit en des endroits où la ramification ne semble cependant pas présenter une grande énergie, comme chez les *Hydrocharidées*, voire même où elle s'arrête entièrement à la première ramification, comme chez les vrilles du *Vitis vulpina.*

Comme on a supposé que les fasciations et autres formations anormales analogues sont dues à une partition du point végétatif, j'ai étudié le développement de la crête du *Celosia cristata* (texte danois p. 61), et de l'inflorescence du *Brassica oleracea* var. *botrytis*; la première se développe comme l'inflorescence d'une *Composée*, avec la seule différence que le réceptacle est irrégulier et comprimé, et la seconde, par une formation de bourgeons des plus rapides; mais on n'observe ni chez l'une ni chez l'autre de partition du point végétatif. —

On lit dans M. Kaufmann[1]: «Die von mir mitgetheilten Beobachtungen zeigen, dass es ausser den beiden schon bekannten Arten der Inflorescenz noch eine dritte, die der dichotomischen Inflorescenz giebt, die man bei den *Asperifolieen* und wahrscheinlich auch bei vielen anderen Pflanzen antreffen kann, und die wegen der so wichtigen Eigenthümlichkeiten in genetischer Beziehung als eine selbstständige Form betrachtet werden muss», et (l. c. S. 243) «von den sympodial verzweigten Inflorescenzen ist der Wickel wesentlich verschieden». — Mais je ne puis, pour deux motifs, me ranger à cette manière de voir.

En premier lieu, on ne satisfait pas aux exigences de la logique en divisant les modes de ramification en monopodiaux, sympodiaux et dichotomiques (comme le fait évidemment M. Kaufmann). On peut bien opposer la ramification monopodiale à la dichotomique, ou la ramification latérale à celle qui est due à la partition du point végétatif; mais un sympode (ou pseudo-monopode, «Scheinaxe») peut aussi bien provenir d'une série de pousses nées d'une manière monopodiale, c.-à-d. de bourgeons latéraux, que d'une série formée par une partition continue, et le sympode est par conséquent une forme spéciale de développement d'une ramification ayant un de ces deux modes de genèse[2]).

En second lieu, comme je viens de le montrer, il n'y a pas une différence aussi essentielle que le suppose M. Kaufmann entre la ramification latérale et celle par partition du point végétatif, telles qu'elles se produisent dans les Phanérogames. Pour ce motif, je ne vois non plus aucune nécessité d'abandonner l'explication donnée d'abord par De Candolle[3]), et acceptée ensuite par tous les autres morphologistes (Braun, Schimper etc.), de l'origine de la cyme scorpioïde et de ses rapports avec la cyme pure, ni

---

[1]) Nouveaux mém. de la soc. imp. des naturalistes de Moscou, XIII, 3 H., p. 248.

[2]) Les modes de ramification se laissent donc classer d'après le schema suivant:

A. Ramification monopodiale ou latérale, 1) avec développement monopodial; 2) avec développement pseudo-dichotomique (sous deux modifications); 3) avec développement sympodial (pseudo-monopodial).

B. Ramification dichotomique ou par partition du point végétatif 1) avec développement dichotomique; 2) avec développement sympodial (pseudo-monopodial).

[3]) Organographie I, p. 413 et suiv.

de regarder une cyme scorpioïde formée par dichotomie comme différant si essentiellement d'une cyme scorpioïde provenant d'une ramification latérale, qu'il faille en faire «une forme à part» d'inflorescence.

J'ai déjà fait observer dans l'introduction (p. 16—19) que la question de savoir si la partition se produit ou non dans des cas donnés, est tranchée, du moment qu'on connaît le mode de naissance des bourgeons, et que peu importe d'ailleurs comment ils se développent ultérieurement. Il est cependant très intéressant de voir comment les bourgeons issus d'une partition se comportent plus tard, parce qu'il en résulte une plus grande clarté relativement à la nature de la partition, telle qu'elle se manifeste chez les Phanérogames.

Dans aucun des cas de partition du point végétatif (dichotomie) observés par moi dans les kaulomes, les deux (ou davantage) bourgeons de partition ne sont des images fidèles l'un de l'autre. Même chez le *Vitis vulpina*, où les deux bourgeons résultant de la première partition de la vrille se développent de la même manière, savoir en vrilles, ils ne sont cependant pas complètement identiques, puisque l'un a une feuille axillante et l'autre, non. Les ovules, dans la fleur femelle de l'Euphorbe, se forment très certainement par partition du groupe des cellules apicilaires, et peut-être par partition égale; si l'on veut avec moi les considérer comme des kaulomes, nous nous trouverons en présence d'une trichotomie presque pure avec un développement parfaitement identique des bourgeons. Par contre, c'est incontestablement une partition pure, avec développement égal des rameaux en provenant, qui se produit dans les étamines du *Ricinus*; les rameaux formés se rencontrent même exactement sur la ligne médiane du rameau qui a subi la partition.

Dans le plus petit nombre de cas, les bourgeons de partition se développent en vue de la même fin. Chez quelques plantes, l'un des bourgeons devient une fleur ou une inflorescence, et l'autre, un rameau qui répète la ramification de l'axe-mère (par ex. dans les cymes scorpioïdes des *Solanaceæ*, *Hydrophyllaceæ*, *Asperifoliæ*, *Cistaceæ*, les rameaux floraux des *Asclepiadaceæ*). Chez d'autres, les deux bourgeons deviennent des rameaux végétatifs, mais avec des feuilles situées d'une manière différente, et avec un rôle biologique différent (*Hydrocharidaceæ*, voir Rohrbach, l. c.).

Le plus souvent, l'un des bourgeons de la partition joue le rôle de bourgeon axillaire par rapport à l'autre considéré comme axe principal, et sa feuille-mère entre directement dans la spirale que forment les feuilles de celui-ci; comme je l'ai déjà dit, elle doit être considérée comme un bourgeon axillaire hâtif qui par sa formation absorbe la moitié de l'axe-mère (ce qui se manifeste surtout clairement, lorsque la partition passe à une pure ramification latérale), et comme elle se trouve ainsi dans un rapport déterminé avec un entre-nœud («Glied») de l'axe, il ne devrait, d'après M. Magnus, pas y avoir de dichotomie. J'ai exposé plus haut (texte p. 18, résumé p. II) mes objections contre cette manière de voir.

Dans d'autres cas, le bourgeon issu de la partition ne figure pas dans la spirale formée par les organes latéraux de l'axe-mère; il constitue alors un bourgeon dit «extra-axillaire». Un pareil bourgeon peut aussi être une véritable formation latérale (*Ampelidaceæ*, *Utriculariaceæ*, *Asclepiadaceæ*). Pour ces bourgeons, voir plus bas.

Formation des kaulomes. Comme nous l'avons vu, les nouveaux kaulomes naissent des anciens dans les couches plus profondes du périblème. Ce sont ordinairement des cellules situées dans les 3e et 4e couches du périblème qui commencent le travail par des segmentations tangentielles et dirigées dans tous les sens, et soulèvent les couches de dermatogène et de périblème qui leur sont superposées, les cellules de ces dernières ne se multipliant que par des segmentations radiées, et, dans les bourgeons vigoureux, il y a toujours tout un petit groupe de cellules d'où part le mouvement.

Lorsque les bourgeons sont plus faibles, la formation des cellules a son point de départ dans un nombre bien plus petit de cellules (par ex. chez les *Graminaceæ* (III, 3, 11, 13, 14), les *Utricularia*, et ce sont les couches plus superficielles du périblème qui sont chargées du travail de la formation des bourgeons; dans un cas isolé (les «vrilles» de l'*Utricularia*, VI, 12, 13), c'est même la première couche du périblème qui seule est active (si ces vrilles toutefois ne sont pas des feuilles, comme le soupçonne M. Sachs (Lehrb. 1870, p. 529).

Les ovules, qui certainement sont le plus souvent des kaulomes métamorphosés, prennent naissance, tantôt sous la 1e couche du périblème (*Euphorbia* (X, 9), *Chrysoplenium* (X, 25), *Scrophularia* (X, 27, 28), tantôt dans cette couche elle-même (*Ranunculus acris* (XI, 6, 7), comme les bourgeons sur la base des feuilles chez le *Salix* (IV, 1—6 et xyl. II, texte p. 54) et l'*Amorpha* (II, 18—23); comparez aussi les figures du *Sedum Fabaria* (XI, 1—4).

Les cellules continuant à se segmenter, les méristèmes deviennent rapidement distincts dans le jeune kaulome, qui forme ainsi bientôt une répétition de son kaulome-mère; toutefois, à l'origine, il renferme d'ordinaire moins de couches de périblème, et est naturellement moins vigoureux.

Le plérome (c'est-à-dire les cellules disposées en séries dans le sommet de la tige; si c'est toujours un véritable plérome, savoir le méristème-mère du système fibro-vasculaire, c'est ce que je n'ai pu examiner) ne joue généralement aucun rôle dans la naissance des nouveaux kaulomes; c'est le périblème qui exécute tout le travail. Dans quelques cas cependant, il n'est pas douteux que les séries des cellules extérieures de l'axe-mère prennent également une part active à la formation du plérome de l'axe-fille; j'ai observé ce fait par ex. dans les inflorescences des *Melilotus officinalis* (xyl. I, texte p. 44), *Graminaceæ, Ribes sanguineum* (III, 18), et le cyathium de l'*Euphorbia* (IX, 15).

Le plérome semble surtout devoir jouer un rôle dans les cas de partition, les segmentations de ses cellules changeant de nature sur la ligne médiane de l'axe pour devenir verticales (radiées). Aussi, partout où j'ai rencontré dans les kaulomes une partition du point végétatif, ai-je trouvé dans la dépression entre les deux bourgeons, sur la ligne médiane de l'axe, un nombre plus grand de séries transversales de cellules (une espèce de couches de périblème) que n'en possédait auparavant le sommet de la tige (p. ex. chez les *Hydrocharidaceæ* (VI, 1, 2, 8—10, *m*), *Ampelidaceæ* (VI, 23, 24, 27, *m*), *Asclepiadaceæ* (VII, 13, *m*, 14), *Solanaceæ* (VIII, 7—8, *Hyoscyamus*), *Asperifoliæ* (VIII, 14, 24). Je dois considérer l'existence de ces séries de cellules sur la ligne médiane du vieil axe comme une preuve que sa croissance en longueur a cessé, que le centre d'activité de la production des cellules s'est transporté sur ses côtés, que l'axe a subi une partition.

Mais je dois d'ailleurs faire observer que je ne regarde pas ces séries de cellules comme quelque chose de particulier à la partition; car il s'en forme généralement (toujours?) de semblables, quoique en plus petit nombre, sous la dépression comprise entre le sommet de la tige et l'un des bourgeons qui y ont pris naissance (conf. xyl. I pag. 44, fig. 18, III, fig. 4, 5, 9, I, etc., voire même entre les bourgeons sériés, au-dessus de l'aisselle des feuilles, chez l'*Aristolochia Sipho, m*, fig. 16, XI). Jamais elles ne se montrent sur la face inférieure des bourgeons, où la structure du tissu est toujours beaucoup plus irrégulière. L'essentiel est de savoir où elles sont situées: sur la ligne médiane, ou en dehors de cette ligne.

J'ai toujours trouvé que les séries du plérome fournissent un excellent moyen de reconnaître, si un bourgeon donné est situé sur la ligne médiane de la tige comme bourgeon terminal, ou à côté de cette ligne.

Sans vouloir ici examiner à fond la question de la différence entre les phyllomes et les kaulomes, je suis cependant conduit à m'en occuper par les observations que j'ai communiquées plus haut relativement au mode de formation de ces épiblastèmes.

Séparer les phyllomes et les kaulomes par des caractères morphologiques et génétiques constants[1]) est chose impossible. Nous avons vu dans la deuxième partie qu'ils naissent du même tissu périphérique, à des profondeurs un peu différentes, il est vrai, les phyllomes généralement dans les 1^e—3^e couches du périblème, les feuilles plus faibles, comme les bractées dans beaucoup d'inflorescences, même dans la 1^e couche seulement, et les kaulomes, presque jamais dans la 1^e couche, mais le plus souvent dans la 3^e ou la 4^e. Ce caractère a son importance, et peut en beaucoup de cas servir de criterium pour déterminer la nature d'un organe morphologique douteux, comme nous l'avons fait pour l'*Euphorbia* (voir p. 121); mais il ne faut pas, bien entendu, le regarder comme un indice absolu qui soit toujours décisif. On doit plutôt, je crois, le considérer comme une circonstance qui est en intime connexion avec la grandeur des organes et la place qu'ils exigent; plus ils sont vigoureux, plus ils sont destinés à jouer un rôle permanent, — plus il leur faut de place, plus ils naissent profondément dans l'axe; comme les kaulomes, à cause de leur rôle biologique, demandent presque toujours plus de place et plus de vigueur, ils naissent aussi à une plus grande profondeur.

Il y a cependant aussi d'autres marques intérieures qui peuvent servir à distinguer les uns des autres les jeunes kaulomes et les jeunes phyllomes; c'est ainsi, par ex., que les cellules du procambium naissent rapidement au centre des phyllomes, dont le tissu est par suite loin d'offrir la même régularité que celui des jeunes kaulomes, qui présentent immédiatement sur leur ligne médiane des séries régulières de plérome. Mais ces marques n'ont également aucune valeur absolue.

Il en est de même de tous les autres caractères pouvant servir à séparer les phyllomes des kaulomes; ils n'ont qu'une valeur relative, et sont tous limités par des exceptions.

---

[1]) Hanstein, Scheitelzellgruppe p. 133; Sachs, Lehrb. 1870, p. 134.

Je dois encore mentionner ici l'hypothèse émise par divers botanistes relativement aux feuilles terminales (Hieronymus et Müller; voir le texte danois et les citations p. 134). Hieronymus admet que les étamines, chez l'*Euphorbia*, le *Brizula*, le *Najas* etc. sont des phyllomes qui naissent sur le sommet de l'axe lui-même, sommet qu'ils absorbent entièrement par leur formation, et il croit pouvoir tirer cette conclusion de la circonstance qu'il peut y avoir des cas où les phyllomes remontent si près du centre du point végétatif, qu'ils influent sur la direction que prend le sommet de la tige.

Je reconnais volontiers qu'un phyllome peut naître si près du centre du sommet de la tige, qu'il en modifie la direction, et même, s'il est vigoureux, le rejette complètement sur le côté, et en arrête le travail; mes observations sur le *Vitis vulpina* (VI, 21) et la vrille des Cucurbitacées (Résumé p. VI, et plus bas), fournissent des indications à ce sujet. Mais autre chose est de supposer qu'un phyllome se développe réellement à l'extrémité du sommet de la tige aux dépens de toutes les cellules du point végétatif, et de croire qu'il doit néanmoins être appelé un phyllome. Il faudrait d'abord montrer en quoi consiste la différence qui existe entre la croissance du sommet de la tige et la segmentation de ses cellules, avant que ce soi-disant phyllome terminal prenne naissance, et après qu'il a commencé à se développer. Il doit y avoir une différence; car autrement le tout se réduirait à ce que le sommet de la tige s'arrête dans sa croissance; mais M. Hieronymus n'a pas même indiqué l'existence d'une différence histologique dans le développement, et que le sommet de la tige puisse être arrêté dans sa croissance lorsqu'il est chargé d'un travail spécial, sans que cet arrêt soit dû à un phyllome terminal, c'est ce qu'on voit par ex. dans le réceptacle des Composées (texte p. 40; comp. fig. 10, 15, 20, I et fig. 2, 3—4, 13, II, et l'explication des planches), lequel, tant qu'il est jeune, a un point végétatif bien prononcé et une structure régulière, tandis que plus tard, souvent déjà avant que la formation des fleurs soit bien avancée, il présente une structure irrégulière et n'a pas de point végétatif bien marqué, puisqu'il a cessé d'être actif. Les ovules fournissent aussi des exemples de kaulomes dont la croissance longitudinale s'arrête de bonne heure.

Mais, en second lieu, c'est une évidente contradiction de parler d'un phyllome terminal. La définition que M. Sachs a donnée des kaulomes et des phyllomes est, suivant moi, la seule possible («Stamm (Kaulom) ist nur was Blätter trägt; Blatt ist nur, was an einem Axengebilde **seitlich** in der unter 1—7 genannten Weise entsteht»[1]). Un phyllome terminal est eo ipso une impossibilité. Si l'on admet qu'il y ait des phyllomes terminaux, il n'y a plus de différence entre les phyllomes et les kaulomes, et même si ces deux épiblastèmes sont plutôt à considérer comme des parties différemment caractérisées d'un même organe fondamental neutre, il n'en est pas moins vrai qu'ils ont chez les Phanérogames une indépendance relative que nous devons respecter. J'ai traité plus en détail ce sujet dans un mémoire que j'espère publier bientôt dans les «Botanische Abhandlungen» de M. Hanstein: «Über Pollen bildende Phyllome und Kaulome».

Le rapport entre la feuille-mère et le bourgeon axillaire doit être examiné de plus près, parce qu'il faut en partie y chercher l'explication du phénomène

---

[1]) Lehrbuch 1870, p. 134; 1873, p. 140.

qui, dans la question dont il s'agit, est supposé pouvoir être une conséquence de la partition de point végétatif, savoir les déplacements des feuilles et des rameaux qu'on observe chez les *Solanées* (et beaucoup d'autres plantes). J'ai en effet montré dans la deuxième partie de ce mémoire que ce phénomène n'est pas en connexion avec la partition du point végétatif, celle-ci ne se produisant pas précisément là où ont lieu les plus grands déplacements (*Solanum*, VII, 16—19, VIII, 3; *Datura*, VII, 24, 25; *Petunia*, 28—29; *Sedum*, XI, 1—4, etc.); il ne peut même être question d'une partition inégale du point végétatif, bien que le bourgeon où se fait le déplacement naisse quelquefois, mais non toujours (qu'on se rappelle le bourgeon axillaire de la première préfeuille chez les *Solanées*) sur le sommet même de la tige.

La plupart des bourgeons sont «axillaires», et cette situation est si générale qu'on l'a regardée comme la seule normale, et supposé que tous les bourgeons privés de «feuilles-mères» devaient avoir un mode de développement insolite. Telle est l'origine, par ex., des théories de quelques botanistes français relativement à la partition du point végétatif dans toutes les inflorescences sans bractées; de là aussi la question proposée par la Société Royale des Sciences de Copenhague (texte p. 3), qui est conçue dans le même sens.

On n'a pu encore constater de liaison causale entre la feuille et le bourgeon; nous ne savons pourquoi ils se suivent, ni pourquoi ils se comportent l'un par rapport à l'autre comme ils le font. Mais qu'il y ait entre eux une connexion intime, c'est assez évident. Elle se manifeste chez les Phanérogames de deux manières: d'un côté, par le contraste ou les rapports d'équilibre que présentent la feuille et le bourgeon pendant leur métamorphose; de l'autre, par l'union qui existe toujours entre eux depuis leur naissance.

Nous avons déjà mentionné le premier point p. VIII et suiv. Dans la région végétative, les bourgeons axillaires apparaissent longtemps après leurs feuilles, et la feuille est beaucoup plus avancée que les bourgeons. Dans la région florale, la balance penche du côté opposé, soit brusquement (chez plusieurs Composées etc.), soit lentement (comme chez le *Sisymbrium*, comp. Pl. I), et la formation des bourgeons précède celle des feuilles (jusqu'à ce que survienne dans la fleur un nouveau cycle dans lequel la formation des feuilles prédomine à l'origine, celle des bourgeons s'arrêtant même complètement, et qui se termine par une formation de bourgeons (ovules), souvent aux dépens des feuilles axillantes).

Le second point mérite d'être examiné de plus près.

Personne, ce me semble, n'a encore exprimé en termes clairs et précis quelle est la relation entre un bourgeon et la feuille dite feuille-mère. En général, on rencontre seulement des expressions peu précises comme celles-ci, que les bourgeons sont situés «dans l'angle» entre la feuille et l'axe-mère, ou «à l'aisselle» de la feuille[1]. Ces expressions sont sans doute parfaitement correctes, mais elles ne font pas assez ressortir le point essentiel, à savoir que le bourgeon axillaire est toujours situé tout autant sur la base de la

[1]) Voir les cit. de M. M. Karsten, Schacht, Schleiden et Sachs, texte danois p. 155, note.

feuille que sur l'axe-mère, ou, en d'autres termes, que la feuille est située à la fois sur le bourgeon et sur l'axe-mère, qu'il existe une connexion étroite entre leurs bases.

Que ce fait soit bien connu, c'est ce que prouvent par ex. le nom de «feuille-mère» donné à la feuille aissellière[1]), et les nombreux dessins qui représentent exactement cette relation, par ex. chez M. Schacht dans ses «Beiträge», Pl. I, fig. 22, 24, 27; Pl. V, fig. 3; chez M. Sachs, dans son «Lehrbuch» 1870, fig. 109, 121, 136 etc., et j'ai montré dans la seconde partie de ce mémoire que c'est un caractère général (voir par ex. I, 1, 2, 4, 5; II, 23, 25; III, 1, 4, 11, 25, 26; IV, 5, 6, 10, 11, 13, 14, 18; VI, 16 etc.)[2]). Mais si l'on avait toujours eu cela devant les yeux, certains points n'auraient pas été considérés comme si extraordinaires, et même mal compris; l'un de ces points est que le bourgeon est, sinon tout entier, du moins en majeure partie, un développement de la base de la feuille; l'autre, que la feuille naît sur le bourgeon, auquel elle sert de feuille-mère.

Les difficultés que la situation des ovules, chez les *Cupressinées*, et des écailles ovulifères, chez les *Abietinées* (sur la base des bractées)[3]), ou celle des sporanges sur les bractées des *Lycopodiacées*[4]), a présentées aux morphologistes, trouveront, d'une part, leurs analogues dans ce que j'ai exposé touchant les bourgeons qui incontestablement se forment soit en entier, soit en majeure partie, dans la base des feuilles, chez l'*Amorpha* (II, 16—23), le *Salix nigricans* (IV, 1—6), le *Sedum Fabaria* (XI, 1—4) et le *Ranunculus acris* (chez ce dernier, des ovules dans la base des carpelles, XI, 5—7), et, d'autre part, s'explique-

[1]) Ce nom montre en même temps combien on était exclusif dans la manière de concevoir le rapport entre la feuille aissellière et son bourgeon axillaire, car il exprime l'idée que le bourgeon est toujours dépendant de sa feuille-mère, et naît d'elle.

[2]) Il faut cependant remarquer qu'il y a des cas où cette liaison entre les bases du bourgeon et de la feuille est très faible, comme entre la bractée et la fleur du *Rudbeckia laciniata* (voir p. 40 et Pl. I, fig. 16), entre le carpelle et l'ovule de l'*Euphorbia* (si cet ovule doit réellement être regardé comme le bourgeon axillaire du carpelle), entre la feuille et le bourgeon axillaire de l'*Aristolochia Sipho* (XI, 14—16). Comment se comportent à cet égard les plantes munies de bourgeons dits accessoires, c'est ce qui mériterait d'être examiné de plus près. Je renvoie pour cet objet aux remarques et aux recherches et citations exposées p. 128—31. Dans la plupart des cas, ce ne sont guère de vrais «gemmæ accessoriæ», c'est-à-dire des bourgeons-sœurs du bourgeon principal situé à l'aisselle de la feuille; mais ils forment une espèce de ramification, qui toutefois peut subir un tel arrêt dans son développement, et rester tellement enfoncée dans l'aisselle de la feuille, qu'elle devient difficile à reconnaître. Qu'on se rappelle l'*Aristolochia Sipho*. Il me semble que les bourgeons sériés de cette plante à l'aisselle de chaque feuille (XI, 14—16), doivent surtout être rapprochés de ceux de l'inflorescence du *Verbascum* (voir cit. texte p. 131); ces derniers cependant forment incontestablement une ramification (XI, 11—13), tandis que les premiers sont avec presque autant de certitude des bourgeons-sœurs de même origine. Je crois qu'il sera très difficile de marquer partout la limite entre les vrais «gemmæ accessoriæ» et les «cymes sériales» de M. M. Bravais. (Voir plus loin les remarques relatives à l'*Euphorbia*).

[3]) Voir par ex. Ørsted, Vidensk. Meddel. fra d. naturhist. Foren. 1868, p. 89 et 95—98.

[4]) Hofmeister, Vergl. Untersuch., p. 119; Mettenius, Seitenknospen bei Farren, p. 625; Sachs, Lehrbuch etc.

ront par la connexion normale mentionnée comme existant entre le bourgeon et la feuille-mère. Le rapport dont il s'agit n'est en effet qu'un des cas extrèmes de cette connexion[1]).

L'autre se produit lorsque les feuilles naissent après leurs bourgeons dits axillaires et sur ces derniers. Cela semble avoir lieu dans un grand nombre d'inflorescences; je crois ainsi l'avoir démontré pour l'*Anthemis* (II, 6, 7, 8, 9), le *Sisymbrium* (I, 4, 9, 12), les *Umbelliferæ* (IV, 9, 10), et la même chose se passe certainement en beaucoup d'autres endroits chez les plantes nommées ci-après, mais il n'est pas facile d'en fournir la preuve.

S'il arrive plus rarement que la feuille-mère naisse en entier dans la base du bourgeon, les cas où elle naît en majeure partie en cet endroit, et apparaît après son bourgeon axillaire, sont cependant très fréquents, par ex. dans les inflorescences de plusieurs *Cruciferæ*, *Graminaceæ*, *Papilionaceæ*, *Umbelliferæ*, *Orchidaceæ*, *Valerianaceæ* (III, 23—25), *Asclepiadaceæ* (VII, 3, 4 etc.), *Cucurbitaceæ*, et le cyathium de l'*Euphorbe* etc. Comme le bourgeon est ici bien plus grand que la feuille, qui n'est que faiblement développée, et que celle-ci naît presque en entier sur le bourgeon, il peut certainement sembler qu'un corps formé sur l'axe se divise en deux corps nouveaux, dont l'un devient un bourgeon, et l'autre sa feuille-mère.

Ce phénomène a aussi été représenté comme une division d'un épiblastème neutre en feuille et en bourgeon (voir texte p. 31, 33 etc.), tandis que d'autres auteurs l'ont interprété comme une soudure de la feuille avec son bourgeon axillaire, ou ont fait de ces bourgeons une espèce à part: les «bourgeons pulvinaires». Qu'on consulte à cet égard p. ex. M.M. Caruel (sur la fleur femelle du *Carex*, Ann. des sc. nat, sér. V, vol. 7, 1867), Magnus (Sitzungsberichte naturforsch. Freunde zu Berlin, Janv. 1871), Koehne (Blüthenentwickelung bei den Compositen p. 17—18)[2]), Wretschko (sur les *Cruciferæ*, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 1868, vol. LVIII), Rohrbach (Hydrocharideen, p. 13).

J'ai déjà fait observer dans la deuxième partie que, lorsque la grande masse cellulaire qui apparaît d'abord se développe comme un bourgeon, et que les segmentations de cellules qui accompagnent la naissance de l'autre organe, la feuille, se montrent sur le bourgeon, ce n'est pas un organe neutre qui «se divise» en produisant un bourgeon et une feuille, mais un bourgeon tout ordinaire sur lequel naît la «feuille-aisselliére».

D'après M. Caruel, les Anémones présentent ce mode de développement dans la production de leurs ovules et de leurs carpelles[3]), un épiblastème «homogène» qu'il identifie plus tard avec le coussinet — «organe bien connu, quoique peu étudié» — se formant sur le réceptacle, et le carpelle et l'ovule naissant sur ce dernier[4]).

---

[1]) De la fig. 109, Sachs, Lehrbuch 1870, p. 132, il semble presque résulter que l'*Hippuris vulgaris* est identique aux plantes susmentionnées quant à la formation des bourgeons. Je ne connais pas les plus jeunes phases du développement des carpelles et des ovules du *Zannichellia macrostemon* (XI, 8—10), mais il me paraît vraisemblable que les ovules naissent ici absolument de la même manière que chez le *Ranunculus*.

[2]) Remarquons toutefois que M. Koehne dit du *Callistephus chinensis*, que la feuille-mère: «scheinbar mit grösster Deutlichkeit erst aus dem zugehörigen Achselsprosse hervorwächst».

[3]) Bull. Soc. bot. France 1865, XII, p. XXXVIII, et Ann. d. sc. nat., sér. V, t. 7, 1867, p. 109.

[4]) Voir les citations, texte p. 157, note 2.

Je ne saurais me prononcer sur ce caractère des Anémones, comme je n'ai pas vu les organes dont il s'agit dans un état aussi peu avancé qu'il le faudrait; mais des figures de M. Caruel[1]), je puis seulement conclure que les Anémones se comportent à cet égard comme le *Sedum* (XI, 1—4), l'*Amorpha* (II, 16—23) et le *Salix* (IV, 1—6), c'est-à-dire que le bourgeon se développe de la base de la feuille déjà formée, et, ce qui le confirme, c'est que les choses se passent précisément ainsi chez le *Ranunculus acris* (XI, 5—7).

Quant au résultat final, il présente une grande concordance dans les deux modes de développement, car soit que le bourgeon naisse de la base de la feuille, ou la feuille de la face inférieure du bourgeon, il se produira entre leurs parties libres et l'axe qui les porte une partie commune importante.

Si l'on se rappelle ce qui a été dit plus haut de l'union de la feuille et de son bourgeon axillaire, ce que nous rencontrons ici d'anormal ou d'extraordinaire dans «les bourgeons pulvinaires» disparaîtra. Ce sera seulement un phénomène survenant dans une phase déterminée de la métamorphose de l'axe, ou, en d'autres termes, une simple modification d'un rapport général; bien plus, si, comme je l'ai constaté presque partout, il existe une pareille union primitive entre la feuille et le bourgeon axillaire, ce sera tout bonnement une nécessité que le phénomène se présente comme il le fait, du moment que la feuille prend naissance après le bourgeon et est plus faible que ce dernier; il sera tout aussi inexact de l'appeler «Theilung» d'un épiblastème neutre qu'une union de deux épiblastèmes séparés, ou que de considérer les bourgeons qui offrent cette particularité comme se distinguant tellement des bourgeons ordinaires, qu'il faille leur donner un nom à part, celui de «bourgeons pulvinaires»[2]).

L'observation de ces rapports entre la «feuille-mère» et son «bourgeon axillaire» nous permettra maintenant de comprendre facilement le phénomène bien connu qui a été décrit comme une «concaulescentia», un surhaussement.

Le surhaussement ou déplacement de la feuille-mère de sa position ordinaire sur l'axe-mère à la base du rameau axillaire, et par suite duquel elle semble s'avancer plus ou moins sur ce dernier, constitue un phénomène très général. Il se produit, comme on sait, chez les *Thesium ebracteatum*, *Samolus Valerandi*, *Borraginaceæ*[3]), *Cordiaceæ*[4]), *Solanaceæ*[5]), *Crassulaceæ*, *Spiræa*, *Loranthaceæ*[6]), *Myrodendron*[7]), *Chailletiaceæ*, *Pterocarya*[8]),

---

[1]) Ann. d. sc. l. c., pl. VIII, fig. 12.

[2]) Le bourgeon, dans l'inflorescence femelle du *Salix nigricans*, naît, suivant moi, de la base de la bractée, comme chez l'*Amorpha*; mais je dois cependant faire remarquer que s'il y a un endroit où il puisse être question de la partition d'un épiblastème neutre en feuille et en bourgeon, c'est ici (conf. III, 1—6).

[3]) Voir p. ex. Bravais Ann. d. sc. nat., sér. II, tom. 7, p. 298 sq., p. 319.

[4]) Warming, Bot. Tidsskr., vol. III.

[5]) A cet égard, voir surtout Hochstetter: Über Anwachsungen der Blattstiele, Flora 1850, p. 177.

[6]) Eichler, Flora Brasiliensis, *Loranthaceæ*.

[7]) D'après Caruel.

[8]) Ørsted, Videnskabelige Meddelelser, 1870, p. 163.

Ipomœa bona nox, *Agave Americana*[1]), *Ruta*, *Paliurus aculeatus*, *Bignonia Catalpa*, *Tilia* (bractée de l'inflorescence), *Deutzia scabra*, *Helwingia*[2]) etc. etc.

La question proposée par la Société Royale des Sciences[3]), et à laquelle j'essaie ici de répondre, demande maintenant si les déplacements qui se produisent chez les *Solanées*, p. ex., sont la conséquence d'une formation de bourgeons par partition du point végétatif. J'ai déjà répondu négativement à cet égard, car je n'ai trouvé de partition que chez l'*Hyoscyamus*.

Mais le phénomène trouve son explication naturelle lorsqu'on se reporte à la circonstance mentionnée plus haut, à savoir que le bourgeon et la feuille-mère (à très peu d'exceptions près, que je sache) sont toujours unis à leur base dès la naissance. Il est alors bien facile de comprendre que l'union primitive entre ces deux organes peut devenir plus grande par un accroissement ultérieur de la partie basilaire commune, et donner ainsi lieu à un surhaussement. A l'appui de cette explication vient encore s'ajouter le fait que là où, dans la première partie, nous avons rencontré de grands déplacements, comme chez les *Solanaceæ*, le *Sedum Fabaria*, le *Ranunculus acris* (l'ovule dans l'ovaire), là aussi précisément nous trouvons une union des plus marquées entre la base du bourgeon et celle de la feuille; chez les deux dernières plantes, le bourgeon est même presque en entier un développement de la base de la feuille. Je n'ai pas eu l'occasion d'examiner d'autres plantes[4]).

Je ne puis me dispenser ici de revenir sur le rapport entre la feuille et le bourgeon, considéré en général.

Que la feuille et le bourgeon, chez les Phanérogames, soient étroitement liés l'un à l'autre, et qu'ils apparaissent unis en formant une espèce d'épiblastème double, cela résulte de ce que nous avons dit. Qu'il en soit de même chez les Cryptogames, c'est ce que prouvent notamment les belles recherches de M. Leitgeb sur la ramification des Mousses[5]), ou de M. Mettenius sur les Fougères, de M. M. Nägeli, Kny, Magnus, Pringsheim etc. sur les *Algues*, les *Characées* etc. Il n'y a de différence que relativement à la situation des deux parties l'une par rapport à l'autre. Chez les Phanérogames, la feuille est, comme on sait, ordinairement située au-dessous du bourgeon.

Quelques botanistes regardent la feuille comme la partie essentielle, comme l'individu proprement dit dans le règne végétal[6]); mais cette théorie toute spéculative a contre

---

1) D'après Bravais.

2) Decaisne, Ann. sc. nat., 2e sér., tom. VI, pl. 7.

3) Cfr. «Oversigt over d. Kgl. danske Videnskab. Selskabs Forhandlinger», 1870 et ce mémoire p. 3.

4) M. Caruel explique les surhaussements de la même manière, en renvoyant à ses bourgeons pulvinaires: «rien d'extraordinaire alors si d'autres fois il (le coussinet) s'étend en longueur, de manière à simuler une sorte d'entre-nœud cylindrique, comme dans les *Thesium* ou le *Samolus*» (Ann. d. sc. nat. V, t. 7, 1867, p. 110).

5) Bot. Ztg. 1871, Nr. 34.

6) Par ex. Roeper, Botanische Thesen, 1872, Nr. 8: «Das wirkliche Individuum — entsprechend dem Einzelpolypen — ist bei höheren Gewächsen, einschliesslich der Gefäss-Kryptogamen, in dem sogenannten Blatte und den diesem gleichwerthigen, aus ihm abzuleitenden Gebilden zu suchen».

elle aussi bien l'organogénie, et le mode de formation de la feuille et du bourgeon, que la circonstance qu'il y a, par ex., des inflorescences entières dont les organes latéraux du premier ordre sont tous des bourgeons sans feuilles-mères. Si la feuille était l'individu plante proprement dit, elle ne devrait pas disparaître ainsi entièrement (sans parler de la racine, qui est complètement privée de feuilles).

Réciproquement, on ne doit non plus exagérer l'importance du bourgeon jusqu'à en faire la partie essentielle, et à regarder la feuille comme un pur appendice, car il y a aussi des feuilles entièrement privées de bourgeons (surtout dans les fleurs). Mais le bourgeon est assurément la partie du double-épiblastème qui se montre doué de la plus grande indépendance, puisqu'il peut se former loin d'un point végétatif, tandis que nous ne connaissons aucun exemple avéré de feuilles intercalées sur une partie de tige qui n'est plus à l'état de tout jeune méristème, ou naissant isolées sur les côtés d'une tige entre des feuilles plus âgées et bien développées. Là où cela semble se produire, on a certainement affaire à un bourgeon dont la première feuille est extraordinairement grande et précoce, comme dans la vrille à un seul bras des *Cucurbitaceæ* (conf. pag. VI et plus bas) et les bourgeons adventifs du *Calliopsis*[1]. De même, le kaulome est le seul des trois épiblastèmes (kaulome, phyllome, trichome) qui puisse avoir une origine endogène.

Je comprends donc le rapport dont il s'agit de cette manière, que la feuille et son bourgeon axillaire constituent un tout, une espèce d'épiblastème double, dont chaque partie a un cachet différent et une valeur morphologique relativement différente. Suivant le rôle qu'elles sont appelées à remplir, c'est tantôt l'une, tantôt l'autre partie de cet organe double qui se développe aux dépens de l'autre, et tantôt toutes les deux sont en équilibre harmonique.

Pour voir clair dans cette question, il importe de se rappeler les résultats importants et pleins d'intérêt auxquels est arrivé M. Leitgeb, en ce qui concerne la ramification des Mousses. Ils constatent en effet que la même cellule ou groupe de cellules qui, dans un cas, donne naissance seulement à une feuille, dans un second cas, produit seulement un rameau, et, dans un troisième, une feuille et un rameau: «Die ganze bauchständige Segmenthälfte wächst nun zum Sprosse aus, und es entspricht der Seitenspross einem Segmenttheile, der unter gewöhnlichen Verhältnissen zum Blattunterlappen oder zum bauchsichtigen Theile eines Seitenblattes (öfters einen oder zwei seiner Zähnen bildend) heranwächst. Es ist diese Thatsache in morphologischer Beziehung vom höchsten Interesse, weil sie uns zeigt, wie wenig tief in dieser Pflanzengruppe, wo die Differenzirung des Pflanzenkörpers in Stamm und Blatt gewissermassen erst zum Durchbruch kommt, der morphologische Unterschied dieser Glieder noch gegriffen hat»[2]. Mais ce n'est pas tout; ils confirment en même temps notre manière de

[1]) Conf. Braun et Magnus l. c. Voir texte, cit. p. 141. — Je dois cependant faire observer que les aigrettes qui se trouvent sous le calice de l'*Agrimonia*, naissent après ou peut-être en même temps que les carpelles, et qu'elles doivent sans doute être regardées comme des phyllomes, ce que j'ai montré avec plus de détail dans les «Videnskabelige Meddelelser» de la Société d'Histoire naturelle de Copenhague, 1872, où j'ai donné la genèse de ces organes et de quelques autres épiblastèmes qu'on doit ranger parmi les trichomes («Emergenzen» de Sachs, Lehrbuch, Ausg. 3).

[2]) Bot. Ztg. 1871, p. 26.

voir quant aux Phanérogames. Les Algues présentent également des caractères qui peuvent conduire aux mêmes conclusions, comme le prouvent les observations de M. Magnus sur les *Polysiphonées*.

Ces épiblastèmes naissent, comme on sait, dans un certain ordre, en formant certaines spirales et verticilles déterminés, suivant des lois que jusqu'ici on a généralement appelées les lois de la Phyllotaxie, parce qu'on portait exclusivement son attention sur l'organe qui, dans un premier examen superficiel, paraissait être le plus important, et ne voyait pas que l'autre organe, le bourgeon, doit occuper le même rang, sinon un rang plus élevé. Or, il résulte évidemment des recherches qui précèdent, que la spirale commencée par les feuilles sur un axe (peut-être sans aucun bourgeon axillaire), continue sans le moindre changement quand les bourgeons deviennent plus avancés et plus vigoureux que les feuilles, et même si celles-ci avortent complètement.

Certains points de l'axe qui sont disposés dans un ordre déterminé par rapport les uns aux autres, deviennent ainsi le siège de productions nouvelles, les centres d'une espèce d'activité plastique. Quelles sont les conditions qui président à la formation de ces productions nouvelles dans les points dont il s'agit, ou qui déterminent la situation régulière qu'occupent les phyllomes et les kaulomes, c'est ce qu'on ignore; en tout cas il n'y a pas, ce me semble, de preuve suffisante que ce soient simplement des considérations de place qui jouent le rôle décisif. Les feuilles et les bourgeons apparaissent donc en ces points «plastiques», dans les rapports d'équilibre sur lesquels j'ai appelé l'attention; c'est tantôt une feuille sans bourgeon axillaire, tantôt un bourgeon sans feuille-mère, tantôt, et le plus souvent, des formes intermédiaires entre ces deux extrêmes.

Il y a cependant des cas où une pareille activité plastique se manifeste en dehors de la spirale normale, c'est-à-dire où des épiblastèmes se produisent en des points qui peuvent bien se trouver dans un rapport déterminé avec les épiblastèmes spiralés (ou verticillés), mais qui sont hors de la spirale que suivent ces derniers; dans tous les cas connus de ce genre, ce sont des bourgeons qui prennent d'abord naissance, savoir les bourgeons dits extra-axillaires.

Bourgeons extra-axillaires. Pourquoi naît-il des bourgeons en dehors de la spirale qu'occupent sur la tige les autres bourgeons et feuilles, c'est ce que nous savons tout aussi peu (ou, à proprement parler, encore moins) que la raison pour laquelle celles-ci sont disposées en spirale. Aussi nous abstiendrons-nous de réflexions à cet égard. Ce qui nous intéresse ici, c'est tout d'abord le rapport de ces bourgeons à la partition du point végétatif, et, à ce sujet, j'ai déjà dit qu'ils peuvent tout aussi bien naître de la partition du point végétatif qu'en dehors de ce dernier, par conséquent comme de véritables bourgeons latéraux. Mais j'appellerai l'attention sur la situation des feuilles de ces bourgeons, parce que je crois que, sous ce rapport, ils se rapprochent des bourgeons axillaires beaucoup plus qu'on ne l'a soupçonné jusqu'à présent.

On a supposé que ces bourgeons sont privés de feuilles-mères, et c'est là surtout ce qui les a fait appeler «extra-axillaires». Si nous comparons la situation de leurs feuilles avec celle des feuilles des bourgeons dits «axillaires», il ne se présente tout d'abord que des dissemblances; les deux premières feuilles de ces derniers sont en effet tournées à

droite et à gauche par rapport à la feuille axillante (les «Knospenkeimblätter» des botanistes allemands), tandis que la première feuille des bourgeons extra-axillaires est généralement tournée vers le bas.

A cet égard, je rappellerai d'abord les cas normaux que je connais de bourgeons extra-axillaires exogènes, savoir les vrilles des *Ampelidées*, les inflorescences des *Asclepiadées* et les vrilles des *Cucurbitacées.*

Je mentionnerai ensuite les bourgeons exogènes et anormaux qui naissent sur les côtés de la tige du *Calliopsis tinctoria*[1]), et les bourgeons hypocotyles. Car ces mêmes rapports de situation semblent exister chez ces derniers (en tout cas, lorsque l'axe-mère est vertical ou presque vertical), bien que les bourgeons dont il s'agit soient certainement pour la plupart des formations endogènes. Qu'on se rappelle, par ex., les bourgeons hypocotyles de l'*Euphorbia* (Warming: sur le cyathium de l'Euphorbe «Videnskabelige Meddelelser» 1871, p. 13, fig. 1—2, et le présent mémoire fig. 17—19. pl. XI)[2]), du *Thesium* (d'après Irmisch Flora, 1853, p. 2), de l'*Alliaria officinalis*, de plusieurs espèces de *Linaria* et de beaucoup d'autres plantes citées par M. M. Irmisch, Wydler, Braun etc.[3]).

Enfin, nous devons aussi mentionner les bourgeons disposés en série verticale au-dessus de l'aisselle de chaque cotylédon chez le *Juglans.* C'est certainement à tort que M. Schacht[4]) les appelle des bourgeons axillaires, car, même avant la germination, ils sont situés bien au-dessus de l'aisselle des cotylédons, et après, ils s'éloignent encore davantage de ce point comme aussi les uns des autres; enfin leur première feuille est tournée vers le bas, fait que M. Schacht n'a pas expressément signalé, et auquel il ne semble par suite attacher aucune importance. Tous ces caractères prouvent suffisamment, suivant moi, que les bourgeons en question ne doivent pas être rangés parmi les bourgeons axillaires ou accessoires; ils constituent une espèce de bourgeons extra-axillaires, et, comme tels, suivent la règle qui est commune aux autres.

L'*Utricularia* fournit le seul exemple certain que je connaisse d'un bourgeon extra-axillaire dont la première feuille ne soit pas tournée vers le bas; en effet toutes les feuilles sont situées ici latéralement par rapport à la ligne médiane du bourgeon. Mais on pourrait peut-être, dans ce fait, chercher une nouvelle preuve que «la vrille» n'est pas un ra-

---

[1]) Braun et Magnus: Verhand. d. bot. Ver. Brandenburgs 1870. Voir citation plus haut p. 141.

[2]) Les bourgeons hypocotyles de l'*Euphorbia medicaginea* présentent cette particularité intéressante (que j'ai souvent observée) que la feuille inférieure tournée en avant (fig. 18) est profondément lobée; la seconde, qui est tournée vers l'axe-mère, moins (fig. 19); la troisième, seulement échancrée (fig. 17), et la quatrième (*d*), arrondie à sa pointe. C'est seulement après que la fig. 17 a été gravée, que j'ai remarqué qu'elle ne reproduit pas très exactement ce caractère.

[3]) Voir Al. Braun, Sitzungsber. Naturf. Freude, 1870, p. 18, et Botan. Ztg. 1870, p. 438—40: «Bei allen genannten Pflanzen ist die Einsetzung der Blattstellung an den hypocotylen Knospen meist abweichend von der an den achselständigen und weniger regelmässig, am häufigsten so, dass ein erstes Blattpaar nicht transversal, sondern longitudinal zu stehen kommt, wobei das nach unten fallende Blatt deutlich gefördert ist». (Qu'elle naisse aussi la première, c'est ce que j'ai observé chez plusieurs *Euphorbes*).

[4]) Beiträge, 1854, p. 105; voir aussi sa pl. VIII.

meau, mais une feuille. Cette feuille alors serait sans contredit, sous d'autres rapports, beaucoup plus singulière que si c'était un rameau.

Mais après avoir montré que, dans quelques cas, les feuilles-mères apparaissent sur le bourgeon même, et ne sont en fait pas situées sur son axe-mère, il me semble que j'ai écarté le principal obstacle qui empêchait de considérer la première feuille des bourgeons extra-axillaires — lorsque cette feuille a d'ailleurs la même situation que les feuilles-mères, savoir sur la face inférieure du bourgeon (et cela paraît être la règle) — comme étant également la «feuille-mère» de ces bourgeons, et l'homologue de la feuille-mère d'un bourgeon axillaire ordinaire.

Par conséquent, lorsqu'on ne considère que la situation des feuilles, et non la position différente sur l'axe (en spirale ou hors de la spirale), la différence entre les bourgeons dits extra-axillaires et les bourgeons axillaires repose seulement sur «un plus ou un moins», sur la circonstance que la feuille-mère du bourgeon (ou plutôt la partie foliaire de l'organe double) est située plus ou moins sur le bourgeon lui-même, et naît avant ou après lui. Les bourgeons «axillaires», dont la feuille-mère naît longtemps avant le bourgeon et est située sur l'axe principal, forment l'un des extrêmes; les bourgeons «extra-axillaires», dont la feuille-mère naît longtemps après le bourgeon, et, comme chez le *Vitis*, est souvent située assez loin de l'axe-mère de ce dernier, par suite d'un grand surhaussement primitif, forment l'autre extrême.

Je ne saurais donc me ranger à l'opinion qui a prévalu jusqu'ici, suivant laquelle les feuilles aissellières appartiendraient à l'axe-mère de leurs bourgeons axillaires, et les deux préfeuilles du bourgeon («Knospenkeimblätter») seraient les deux premières feuilles de ce dernier. M. Bravais fait déjà observer qu'on pourrait tout aussi bien regarder la feuille-mère du bourgeon comme sa première feuille, et la prendre pour point de départ de la spirale sur l'axe latéral. Je suis d'avis qu'il faut dire: la feuille-mère est la première feuille du bourgeon, mais, en même temps, sa seule feuille. Lorsque le bourgeon prend un plus grand développement, et qu'il y naît de nouvelles feuilles, ces feuilles appartiennent en réalité à tout autant de nouveaux bourgeons, même si ces derniers ne sont pas encore visibles, ou ne se montrent pas du tout; dans ce cas, c'est la feuille seule qui représente les nouveaux épiblastèmes doubles.

Sans prétendre vouloir établir un parallèle complet entre la genèse des bourgeons chez les Phanérogames et les Cryptogames, je renverrai cependant encore une fois aux résultats intéressants obtenus par M. Leitgeb, relativement aux plantes chez lesquelles la différenciation et le contraste entre le bourgeon et la feuille commencent seulement à se manifester; ils nous montrent que le bourgeon et la feuille sont dans un rapport intime l'un avec l'autre, comme étant issus d'un germe commun, qui se développe, tantôt entièrement en feuille, tantôt entièrement en bourgeon, tantôt en ces deux espèces d'épiblastèmes. Je me représente comme suit la marche du développement dans le règne végétal: chez les plantes dont l'organisation est la plus primitive, on ne trouve que le thallome neutre, le «corps plante» pur et simple; ce thallome se ramifie, et ses rameaux, qui ont la même nature neutre que l'axe-mère dont ils sortent, se rangent suivant un ordre déterminé. A mesure qu'il se produit des formes d'une organisation plus élevée, la division du travail

achève de s'opérer, et l'extérieur et l'intérieur du thallome se différencient davantage. Les organes morphologiques fondamentaux, le kaulome et le phyllome, font leur apparition; mais, comme le montrent les belles recherches de M. Leitgeb, ils sont tous les deux des épiblastèmes issus du rameau thallomique, en vue de fonctions différentes à remplir. Suivant la nature du travail et le besoin de la plante, ils se montrent tantôt chacun à part, tantôt intimement unis.

Je n'entends nullement dire par là que le phyllome et le kaulome soient identiques. Il est incontestable qu'ils forment l'un avec l'autre un certain contraste déterminé, et que chacun d'eux est caractérisé par une série de propriétés qu'on retrouve rarement chez l'autre; mais, parce que, dans le cours du temps, ils ont acquis une pareille indépendance relative, on peut bien admettre qu'ils aient un point de départ commun.

C'est simplement à titre de spéculation que j'ai exposé ces dernières considérations sur la ramification et le rapport entre la feuille et le bourgeon. Nous connaissons encore trop peu le corps de la plante et les rapports de ses différents «membres», soit entre eux, soit avec l'ensemble, pour qu'on puisse établir une théorie suffisamment basée sur des recherches et des faits; mais, quant à ces derniers, j'espère, par les observations communiquées dans ce mémoire, en avoir constaté un certain nombre qui auront une valeur durable, même dans le cas où des recherches ultérieures conduiraient à des résultats contraires à mes idées sur les bourgeons extra-axillaires et sur quelques autres points.

Dans le mémoire résumé ici, je touche à diverses questions morphologiques qui sont en connexion plus ou moins étroite avec la question principale, et sur lesquelles il me reste à faire quelques remarques.

Après avoir mentionné, p. 62—64, les principaux ouvrages, à moi connus, qui traitent de la valeur morphologique de la vrille des *Cucurbitacées*, je m'occupe dans les pages suivantes (64—76) de la ramification dans cette famille. Sans entrer dans la discussion des différentes théories émises à ce sujet, j'expose mes propres observations et ma manière de voir, que j'ai déjà fait connaître en 1870 dans un article publié dans les «Videnskabelige Meddelelser fra den naturhistoriske Forening i Kjøbenhavn» avec un résumé français. (Voir aussi plus haut p. VI).

Sur le sommet en dôme surbaissé de la tige végétative, il ne se forme jamais autre chose que des feuilles, les bourgeons axillaires naissant à l'aisselle de la 2^e ou 3^e feuille située au-dessous (V, 1; cette figure, de même que les fig. 15 et 16, montre la disposition en spirale des épiblastèmes de ces tiges). Contrairement à l'indication de M. Rohrbach, les bourgeons ne sont jamais situés exactement sur la ligne médiane de l'aisselle, mais vers son côté anodique (voir sur ce mot, texte p. 65, note) (Pl. V, fig. 1, bourgeon III, IV etc.).

La vrille prend naissance environ vers la 4^e ou 5^e feuille au-dessous du sommet de la tige; elle est toujours située du côté anodique du bourgeon axillaire, et par suite

complètement en dehors de l'aisselle de la feuille. Où est située la vrille? Sur le bourgeon axillaire, ou sur l'axe-mère de ce dernier, la tige végétative?

La question est très difficile à résoudre quant à la vrille à un bras. En général, elle semble être située à la fois sur les deux axes (conf. *Bryonia* Pl. V, fig. 1, bourgeons V et VII, et fig. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8); même une recherche histologique ne dissipe pas les doutes à cet égard (V, 13, 14).

Le mamelon désigné par *v* dans les figures, et représentant la jeune vrille, semble quelquefois se développer directement en bras de vrille; dans d'autres cas, comme dans la fig. 31, Pl. V, il produit un épiblastème double, dont la partie la plus faible, *P*, se réduit tellement plus tard, qu'elle n'est plus visible dans la vrille développée.

Je regarde ces mamelons comme de jeunes kaulomes, comme des bourgeons qui ne donnent naissance qu'à une seule feuille, le bras de la vrille, laquelle, par sa formation, rejette de côté le sommet faible et peu développé de la tige. Ce sommet est le mamelon désigné par *P* dans la fig. 31, et je dois admettre l'existence d'une pareille partie de tige, même dans les cas où on ne peut la reconnaître extérieurement (qu'un organe puisse être présent sans être visible à l'extérieur, c'est ce que montre p. ex. la fig. 9, pl. I, où se trouve, sur le bourgeon *g*, une bractée *f*, qui n'est presque visible qu'à l'intérieur).

La vrille à plusieurs bras vient à l'appui de cette manière de voir.

1°. Elle naît beaucoup plus indépendante du bourgeon axillaire, et présente le caractère d'un véritable épiblastème extra-axillaire (V, 15, v^4 et 16, v^4);

2°. elle prend bientôt à un bien plus haut degré l'aspect d'un épiblastème double formé d'une feuille et d'un bourgeon «axillaire» ou, en d'autres termes, donne naissance à son premier bras (V, 31; comparez I, 1 et 8; III, 15; IV, 4, 18, 21; XI, 4, 6, 15, 16, etc.);

3°. elle développe enfin sur le sommet aplati de sa tige d'autres épiblastèmes ou bras de vrille disposés en spirale (fig. 32, 34, 36, V, et xyl. VIII et IX, p. 70).

Chaque vrille à un ou plusieurs bras est donc un bourgeon extra-axillaire à une ou plusieurs feuilles (bras) (conf. xyl. p. 70). Les monstruosités de M. Naudin peuvent très bien servir d'appui à cette manière de voir. La question mérite du reste d'être étudiée de nouveau.

Le bourgeon axillaire, par une ramification latérale ou quelquefois par une partition inégale du point végétatif, développe deux autres bourgeons: un nouveau rameau végétatif et une inflorescence (V, 5—10, 16 (bourgeon VI), 18, 19, 22), tandis que lui-même se termine le plus souvent par une fleur. [Comparez la cyme du *Valeriana*, III, 23—28]. (Quant à la disposition relative de ces parties, voir les xylographies texte p. 70).

Il a été question plus haut (p. IX, XII) de la ramification de l'inflorescence; nous parlerons plus bas des «gemmæ accessoriæ» du *Cyclanthera*.

Vrille des *Ampelidées*. J'ai mentionné p. 82—83 les ouvrages qui, à ma connaissance, traitent cette question. Mes idées et mes observations à cet égard ont été résumées plus haut. Chez l'*Ampelopsis hederacea*, toutes les vrilles et leurs rameaux sont ordinairement des bourgeons «extra-axillaires» latéraux; chez le *Vitis vulpina*, ce sont plus ou moins de vrais bourgeons de partition (voir VI, 16—28).

Cyathium de l'*Euphorbe.* Aux observations exposées dans mon mémoire intitulé «Le Cyathium de l'Euphorbe (*Euphorbia* L.) est-il une fleur ou réellement une inflorescence?»[1]), j'ai ajouté ici l'organogénie histologique (texte p. 106—137; aperçu de la littérature p. 107—108).

La fig. 2, IX (comp. fig. 1) représente le sommet de la tige végétative avec deux feuilles; les bourgeons naissent bien au-dessous de ce sommet. La partie supérieure de la tige florale est reproduite fig. 3; les bourgeons naissent à peu près en même temps que les feuilles et, par conséquent, sur le sommet même de la tige. On retrouve le contraste ordinaire entre la feuille et le bourgeon: celui-ci naît à une profondeur plus grande dans le périblème. Le même contraste se fait remarquer entre l'involucre (IX, 13—15) et les mamelons situés à l'aisselle de ses feuilles, lesquels donnent naissance aux premières étamines dans chaque groupe. Ces mamelons présentent une structure identique à celle des bourgeons (comp. par ex. fig. 13—15 avec fig. 4, 5, I et fig. 10, IV), ce qui me confirme dans l'opinion qu'ils sont des kaulomes, c. à. d. les bourgeons axillaires des feuilles involucrales.

Quant à mon interprétation du cyathium de l'Euphorbe comme une inflorescence dont chaque étamine représente une fleur mâle, je me permettrai de renvoyer le lecteur à un mémoire que je vais publier dans les «Botanische Abhandlungen» de M. Hanstein (vol. II, 2e livr.).

J'en donnerai ici un court aperçu. Les motifs qui m'ont conduit à cette interprétation sont les suivants:

1. Dans la région florale, chez les Phanérogames, le bourgeon et la feuille-mère naissent très souvent en même temps, et forment très distinctement un organe double, comme ils sont réunis par leurs bases (voir p. VIII—IX). On retrouve, chez l'*Euphorbia*, la même relation entre les bourgeons d'où se développent les cymes bien connues et leurs feuilles-mères (IX, 3), comme aussi entre les mamelons qui produisent la première étamine de chaque groupe dans le «cyathium», et leurs bractées axillantes (feuilles de l'involucre) (IX, 5—7, 13—15, 28). Il y a cette seule différence que ces dernières feuilles sont plus faiblement développées que les premières.

M. Hieronymus (voir texte p. 120) croit trouver des homologues de ces organes doubles du cyathium dans ceux qu'on rencontre dans quelques familles végétales, et qui se composent d'une pétale et d'une étamine. Il est certain que, dans tous les caractères extérieurs, ils paraissent ressembler aux épiblastèmes doubles formés d'un bourgeon et d'une feuille (XI, 20—22), même avec les diverses modifications sous lesquelles ceux-ci se montrent; mais, 1° d'après ce que j'ai vu (*Hypericum*), ils ne leur ressemblent pas intérieurement, et les étamines surtout ne ressemblent point à celles de l'*Euphorbia* ni aux bourgeons en général (XI, 24 et texte p. 121), 2° la structure et le mode de naissance des jeunes étamines de l'*Euphorbia* sont complètement identiques à ceux des bourgeons (IX, 13—15), et 3° les feuilles ainsi dédoublées sont des phénomènes très rares, tandis que dans la région florale de presque tout Phanérogame, on peut s'attendre à rencontrer des organes doubles

---

[1]) Voir «Videnskabelige Meddelelser fra d. naturh. Forening», Kjøbenhavn, 1871, avec un résumé français et 3 planches.

formés d'un bourgeon et d'une feuille. Autant que je sache, il n'existe non plus de traces de pareilles feuilles doubles chez d'autres *Euphorbiacées.*

Aux autres ressemblances que les étamines de l'*Euphorbe* présentent avec les kaulomes, on peut aussi ajouter la suivante: les faisceaux fibro-vasculaires dans l'axe central des étamines se forment très tard, lorsque les anthères sont déjà très avancées[1]), et ils naissent également tard dans les bourgeons ordinaires, seulement après l'apparition des feuilles. Mais, dans tous les phyllomes polliniféres que j'ai examinés[2]), ce sont les faisceaux fibro-vasculaires qui naissent les premiers dans la toute jeune feuille, qui n'a encore que la forme d'un mamelon hémisphérique, et les segmentations de cellules qui donnent naissance à l'anthère ont lieu plus tard.

2. Des feuilles à bourgeons axillaires d'où se développent les inflorescences cymeuses de l'*Euphorbia*, la spirale se continue très régulièrement jusqu'aux organes doubles formés des jeunes étamines et de leurs bractées-mères (feuilles de l'involucre), et, comme je l'ai établi dans mon mémoire déjà cité sur l'*Euphorbia* (conf. xyl. XII, XIII, p. 116 et 122 du présent mémoire), ces organes doubles suivent la spirale $^2/_5$. Par conséquent, s'ils devaient être interprétés comme des feuilles dédoublées, on serait, en suivant la spirale commencée, subitement conduit, par un saut des plus singuliers et complètement masqué, d'un organe double formé d'une feuille et d'un bourgeon axillaire, à un autre tout différent composé de deux feuilles, mais qui, en même temps, ressemblerait entièrement au premier, et s'y joindrait par une transition insensible (comp. Vidensk. Meddelelser, 1871, pl. I, par ex. fig. 6—7).

Relativement aux fleurs mentionnées par M. Hieronymus comme ayant des organes doubles formés de pétales et d'étamines, il y a encore à observer que, d'après les recherches publiées jusqu'ici (notamment Payer: Organogénie de la fleur), ces organes naissent simultanément, tous les 5 à la fois; ils diffèrent donc aussi par là de ceux de l'*Euphorbia*, qui naissent successivement. Je dois cependant ajouter qu'on trouvera peut-être aussi des exemples que les premiers naissent en spirale; c'est ce qu'indiquent mes recherches malheureusement incomplètes sur l'*Hypericum hircinum* (XI, 20, 21 et l'explication des planches).

Si les étamines de l'*Hypericum hircinum* naissent d'après une spirale (mais chacune en même temps que son pétale, auquel elle est unie par sa base), on aura une fleur présentant un développement analogue, mais c'est aussi la seule à ma connaissance; car si les recherches de M. Sieler sur l'organogénie de la fleur des *Ombellifères* (voir citat. texte p. 122) semblent indiquer une ressemblance complète, on doit remarquer que sa description n'est pas d'accord avec ses figures; celles-ci sont fidèles, ce que j'ai constaté pour l'organogénie de la fleur du *Daucus Carota*, représentée pl. XI, fig. 25—31; les étamines naissent bien en suivant la spirale $^2/_5$, mais toujours un peu plus tard que les sépales situés au-dessous, et elles ne sont jamais unies à ces derniers de la même manière

---

[1]) Comp. mon mémoire sur l'*Euphorbe* l. c. p. 33, xyl. 14 et 15 et le présent mémoire IX, 21.

[2]) Conf. Warming: Über Pollen bildende Phyllome und Kaulome, Hanstein: Botanische Abhandlungen, tome II.

que la feuille et le bourgeon axillaire en général, ou que les pétales et les étamines chez les *Hypericinées* etc., car la dépression qu'on voit entre eux, par ex. sur la fig. 28, XI, est située au même niveau que la surface du réceptacle (voir texte p. 122—124).

Je dois donc conclure que les épiblastèmes doubles que forment les premières étamines de chaque groupe et leurs feuilles axillantes (feuilles de l'involucre) se composent d'un bourgeon avec sa feuille-mère:

a. parce qu'ils sont, quant à la forme extérieure et à la structure intérieure, complètement identiques aux épiblastèmes formés d'un bourgeon et d'une «feuille-mère», qui sont si communs chez les Phanérogames, tandis que les étamines diffèrent par leur structure intérieure des phyllomes qui développent ordinairement le pollen;

b. parce qu'ils suivent une spirale, et que cette spirale s'unit directement à celle qui est formée par les feuilles situées au-dessous avec leurs bourgeons axillaires, lesquels produisent les cymes bien connues à deux feuilles, et se terminent en un cyathium.

3. Si nous passons maintenant à l'examen des 5 groupes d'étamines du cyathium de l'Euphorbe, pour reconnaître si chaque étamine est un kaulome ou un phyllome, nous trouverons également ici qu'il y a bien plus d'analogies en faveur de la première éventualité que de la seconde.

La première hypothèse qui se présente est celle-ci: chaque étamine est une feuille entière. Eh bien! On demandera alors: montrez nous une analogie, une fleur où les étamines se développent et se groupent d'une manière analogue.

Partout où nous trouvons des groupes d'étamines, n'avons-nous pas affaire à des étamines composées? C'est aussi quant à l'*Euphorbe* l'opinion de M. Hieronymus, qui renvoie aux *Hypéricinées*, aux *Malvacées* etc. (voir texte p. 126—127).

Mais le développement du groupe des étamines de toutes ces plantes ne ressemble nullement à celui que présente l'*Euphorbia* (voir Payer, Organogénie; cité dans le texte p. 125—127, et mes fig. 20, 21, 23, pl. XI, relatives à l'*Hypericum*). Les *Malvacées* seulement peuvent, d'après les dessins de M. Payer, sembler présenter quelques ressemblances, si ce botaniste a interprété le développement d'une manière exacte (conf. Hofmeister, Allgem. Morph. p. 505).

En effet, la ramification de ces étamines est monopodiale, et celle des étamines de l'*Euphorbia* doit évidemment être interprétée comme sympodiale (cincinnoïde), ce qui est aussi l'opinion de M. Hieronymus (cit. texte p. 127). Mais où trouvons-nous, dans tout le règne végétal, une ramification de feuilles analogue à celle de l'*Euphorbia*? M. Hieronymus indique celle de l'*Amorphophallus*; je ne puis croire que l'analogie soit complète, cette ramification me paraissant présenter la forme de «drepanum» (Buchenau) et non de «cincinnus»; mais je n'ai pas vu la plante vivante.

Tandis qu'il est ainsi très difficile de trouver des feuilles qui, dans leur ramification et la disposition de leurs folioles, ressemblent entièrement aux groupes des étamines de l'*Euphorbia*, les kaulomes présentent des analogies nombreuses.

Les étamines de chaque groupe sont disposées les unes par rapport aux autres comme les fleurs dans une cyme scorpioïde (conf. mon mémoire déjà cité sur l'*Euphorbia*, de même que IX, 16; X, 23, et xyl. XIII, p. 122); la 2e étamine (st^2) naît très distincte-

ment de la première (st^1, IX, 17, 25), mais, il est vrai, dans sa base; quant aux suivantes, il est au contraire très difficile de reconnaître par l'histologie si elles se développent chacune dans la base de la précédente (IX, 16, 18; X, 14, 15); mais ce qui semble indiquer que les choses se passent ainsi, c'est tant l'origine de la 2e étamine, que l'union qui existe toujours entre les bases de toutes les étamines d'un même groupe (IX, 27), et enfin la circonstance que l'examen extérieur des phénomènes montre souvent une liaison assez nette entre chaque étamine et celle qui la précède. Je considère chaque groupe comme provenant d'une espèce de ramification dans laquelle chaque bourgeon naît de la base du précédent, même de la partie de celui-ci qui est enfoncée dans son axe-mère, car rien, ce me semble, n'empêche de supposer qu'un bourgeon (*c*) peut naître presque en entier de la partie d'un autre bourgeon (*b*) ou axe qui est enfoncée dans l'axe-mère (*a*) de *b*, et de considérer cela comme une ramification de *b*.

Dans mon mémoire déjà cité, je regardais les groupes des étamines de l'*Euphorbe* comme des «cymes scorpioïdes», bien que leur situation relativement à l'axe du cyathium et aux feuilles involucrales, ne soit pas la même que celle des cymes scorpioïdes ordinaires par rapport à leur axe principal (ce qu'objecte aussi M. Hieronymus); mais j'avais constaté une disposition tout-à-fait analogue dans le groupe de bourgeons qu'on trouve à l'aisselle des feuilles caulinaires de l'*Aristolochia Clematitis* (voir texte p. 128, xyl. XIV et XV), lesquels sont interprétés comme des cymes scorpioïdes, quoiqu'ils soient disposés en lignes parallèles à la ligne médiane de l'aisselle de la feuille (conf. cit. texte p. 128, note 3).

Je dois encore considérer les groupes d'étamines de l'*Euphorbe* comme présentant une parfaite analogie avec ces bourgeons, et j'ajouterai avec tous les groupes de bourgeons qu'on trouve à l'aisselle des feuilles d'un grand nombre de plantes (voir citations texte p. 129), et qui: 1° sont disposés en zigzag; 2° naissent de haut en bas; 3° sont disposés en lignes parallèles à la ligne médiane de l'aisselle, et 4° sont interprétés par beaucoup d'auteurs comme formant une espèce de ramification (conf. citations des frères Bravais et autres p. 129), et en forment peut-être souvent réellement une, mais, souvent aussi peut-être, en perdent à un tel point le caractère, et se séparent tellement l'un de l'autre, qu'ils ont presque l'air de véritables bourgeons-sœurs («gemmæ accessoriæ»).

Je n'ai pas eu l'occasion d'examiner ces «cymes sériales» (Bravais) à bourgeons disposés en zigzag (excepté l'*Aristolochia Clematitis*); mais, pour en éclaircir la nature supposée, j'ai renvoyé (voir texte p. 131) aux cymes sériales à **une** rangée de bourgeons en ligne verticale, qu'on trouve chez le *Verbascum* (XI, 11—13) et le *Cyclanthera* (il ne naît ici de chaque fleur de la grappe principale qu'un bourgeon qui produit une autre grappe, V, 22, 24—27 et XI, 35; conf. aussi M. Rohrbach, l. c.), et établi une comparaison avec les productions semblables des bourgeons axillaires de l'*Aristolochia Sipho* (XI, 14—16). (Voir ég. *Euphorbia*, IX, 27; X, 14).

Cette incertitude quant à la question de savoir si l'on a affaire à une ramification (cyme sériale) ou à une formation de vrais bourgeons accessoires (bourgeons-sœurs), que présentent l'*Aristolochia Clematitis* et tous les bourgeons mentionnés p. 129 (autant que je puis le conclure de la littérature), rappelle à un haut degré celle qui règne au sujet des

groupes d'étamines de l'*Euphorbia*, et semble également indiquer que ce sont des organes de même nature.

Pour moi, l'interprétation la plus naturelle c'est que les groupes des étamines de l'*Euphorbia* sont des groupes de kaulomes (nous pouvons bien laisser de côté la question de ramification ou de non-ramification), qui trouvent leurs analogues dans les groupes de boutons disposés en zigzag, mentionnés p. 128—129, ce qui s'accorde avec le résultat auquel je suis arrivé plus haut, à savoir que la première étamine de chaque groupe doit être assimilée à un kaulome. Enfin, si l'on considère en outre l'appui que prêtent à cette manière de voir les intéressantes monstruosités observées par M. Schmitz (voir l'exposé de la littérature, p. 107—108), et le jugement que M. Joh. Müller, le savant qui, de nos jours, est le plus versé dans la systématique des *Euphorbiacées*, a porté sur le cyathium de l'*Euphorbe*, il me semble hors de doute que ce cyathium est réellement une inflorescence (voir aussi mes remarques sur les genres voisins (*Anthostema* etc.) dans mon mémoire sur l'*Euphorbia*).

Nous ne pouvons cependant en rester là, car vient ensuite cette autre question: le développement du pollen est-il confié à ces kaulomes, ou, comme à l'ordinaire, aux phyllomes; et, dans ce cas, les anthères de l'*Euphorbe* sont-elles composées de feuilles rudimentaires (Roeper, Sachs, Celakowsky), ou la partie située au-dessus de l'articulation de chaque fleur mâle, est-elle un phyllome terminal (Müller, Hieronymus) (voir texte p. 133—135)?

Relativement à la première opinion, je renverrai le lecteur à l'organogénie de l'anthère que j'ai représentée Pl. IX, fig. 13—15, 17—23, 25, auxquelles on peut ajouter la fig. 14, X, avec l'explication des planches, et à mon mémoire déjà cité sur les phyllomes et les kaulomes producteurs du pollen (Hanstein: «Botanische Abhandlungen», vol. II, 2e livr.). L'étamine se comporte ici absolument comme toute autre étamine, et l'on pourrait en considérer les anthères comme composées de feuilles rudimentaires tout aussi bien que celles de l'*Euphorbe.*

Mais avons-nous peut-être affaire ici à un phyllome terminal? Si le mamelon primitif d'où se forme la première étamine de chaque groupe, est un bourgeon, un kaulome, et qu'il se transforme directement en étamine; si l'articulation bien connue du filament ne se montre que longtemps après que la différenciation du sommet comme anthère a commencé (comp., par ex., X, 14), et même ne se produit que dans les couches les plus superficielles (X, 33), sans pénétrer dans l'intérieur du filament; si, par conséquent, il n'y a pas de trace d'un sommet de tige rejeté de côté et arrêté dans son développement d'un organe latéral, l'étamine, ou que, d'après les résultats de la morphologie comparée, il n'y ait aucune raison d'en supposer l'existence; si, dis-je, les choses se passent ainsi, on doit regarder chaque étamine de l'*Euphorbe* comme étant tout entière un kaulome aussi véritable que, par ex., celui qui est développé en ovule, et qui, en raison même de cette fonction, est arrêté dans son développement longitudinal.

Cette articulation de l'*Euphorbe* a peut-être la même signification morphologique que, suivant moi, le bourrelet qui se produit sous la corolle des Composées (I, 21—22;

II, 5)[1]), ou celui qu'on trouve sur la fleur femelle de l'*Euphorbe* sous l'ovaire (X, 32, 34), à savoir d'être un périgone rudimentaire.

Quant aux squamules du cyathium, je dois les considérer comme des trichomes. Je n'ai pas observé leur ramification régulière mentionnée par M. Hieronymus, et, après avoir eu connaissance de ses observations, je n'ai pas eu l'occasion d'entreprendre de nouvelles recherches. Les fig. 1—5, X, représentent de jeunes squamules (voir aussi X, 23, 24).

La structure que M. Hieronymus attribue à l'*Euphorbe* est loin d'être «einfach», et, suivant moi, loin d'être naturelle. D'après lui, chaque cyathium est une fleur formée de 5 feuilles outre le pistil; mais ces 5 feuilles se divisent en une partie supérieure et une partie inférieure; celle-ci est la feuille involucrale, celle-là, l'étamine ramifiée comme une cyme scorpioïde, mais chaque feuille porte en outre de chaque côté une stipule qui se ramifie de la même manière. Bien plus naturelle que cette interprétation et que toute autre, me paraît être la suivante: chaque cyathium est une inflorescence qui se compose de 5 bractées, outre la fleur femelle centrale; chaque bractée est la feuille aissellière d'une cyme sériale, les fleurs mâles, les étamines, étant analogues aux cymes sériales avec bourgeons en zigzag qu'on observe dans beaucoup d'autres plantes, ou aux bourgeons accessoires qui présentent la même disposition.

A l'occasion de l'organogénie du cyathium de l'*Euphorbe*, j'ai étudié la naissance des ovules et mentionné leur valeur morphologique. Leur genèse est représentée pl. X. D'abord se montrent les carpelles, dans la couche extérieure du périblème (fig. 8 et 7). Les ovules se forment ensuite dans la 2e couche du périblème par des segmentations tangentielles dans un petit groupe de cellules (voir fig. 9); la première couche du périblème est soulevée (de même que le dermatogène), mais celles de ses cellules qui sont situées au sommet de l'ovule se divisent plus tard par des segmentations tangentielles répetées, et quelques segmentations radiées (fig. 10—12, 16, 20). Les segmentations tangentielles des cellules dans la 2e couche du périblème finissent par donner naissance à des séries de cellules dans l'intérieur de l'ovule; une de ces cellules supérieures devient le sac embryonnaire (je n'ai pas obtenu d'images distinctes de ses parois ni des cellules environnantes).

Un capuchon formé de cellules provenant de la première couche du périblème par des segmentations principalement tangentielles, et, par conséquent, semblable à celui qu'on observe ici chez l'*Euphorbe*, se retrouve dans beaucoup d'autres ovules, mais il n'est pas si vigoureux (conf. X, 26, *Chrysoplenium*, et 31, *Myogalum*; XI, 10, *Zannichellia*).

J'ai parlé plus haut (pag. XVI) de la naissance d'autres ovules.

Les téguments, chez l'*Euphorbe*, naissent souvent (toujours?) de bas en haut, dans un ordre acropétal (X, 16—19). Ils prennent en grande partie naissance dans le dermatogène, ce qui est aussi le cas, même à un plus haut degré, avec d'autres ovules (X, 26, 30, 31; XI, 10).

---

[1]) Comp. aussi: Warming: sur les trichomes, dans les «Videnskabelige Meddelelser fra den naturhistoriske Forening i Kjøbenhavn», 1872, p. 188, fig. du *Senecio vulgaris*.

Le sac embryonnaire est quelquefois formé d'une cellule de la première couche du périblème (*Scrophularia*, X, 27—30).

Il me semble naturel d'interpréter les ovules de l'*Euphorbe* comme des kaulomes, et leurs téguments comme des phyllomes. Outre la position qu'ils occupent au devant des feuilles carpellaires comme s'ils étaient leurs bourgeons axillaires, ils ont aussi la même origine que les bourgeons, tandis que les carpelles naissent dans une couche plus superficielle du périblème. Chez le *Ranunculus*, ils ont la même situation et le même mode de naissance que les bourgeons axillaires du *Salix*, de l'*Amorpha* et du *Sedum*, et si plus tard, chez le *Ranunculus* et le *Zannichellia* (XI, 8), ils s'éloignent beaucoup de l'axe-mère, c'est un déplacement tout-à-fait analogue à celui qui est mentionné p. XXII.

Explication des Planches.

Planche I.

Crucifères. Composées.

f désigne les feuilles, *g* les bourgeons, *P* le point végétatif («punctum vegetationis»).

Fig. 1—5. *Sisymbrium strictissimum.*

Fig. 1 et 2. Les parties supérieures de deux tiges, dans leur passage de la région végétative à la région florale. Dans la Fig. 1, les feuilles (*f*) sont encore plus avancées et plus grandes que les bourgeons (*g*); la Fig. 2 offre le cas inverse, du moins pour les épiblastèmes les plus jeunes. De même que dans les figures semblables qui suivent, j'ai indiqué la structure histologique par des lignes.

Fig. 3. Le sommet d'une tige avec 6 couches de périblème (*pe*) et un plérome très régulier ($^{420}/_1$).

Fig. 4. Bouton avec sa bractée-mère. La bractée (appartenant à la préparation représentée Fig. 2) est indiquée intérieurement par des segmentations de cellules dans la 1e couche du périblème, et forme extérieurement un léger bourrelet sur la base même du bouton. Trois couches de périblème se voient dans le bouton. Intérieurement à ces couches se trouvent les séries du plérome.

Fig. 5. Bouton situé plus près de la région végétative que le précédent, et dont la bractée (*f*) est par suite plus grande et plus développée. La 1e couche du périblème ne présente pas des segmentations tangentielles de cellules dans la bractée, ce qui constitue un cas assez rare au moins pour les feuilles florales. La formation du procambium dans la feuille a commencé.

Fig. 6. Sommet d'une tige florale de l'*Erysimum* sp.; *bb* deux gros boutons; *gg* deux autres plus petits. De ces derniers, celui de gauche se forme sous la 1e couche du périblème, et très près du point végétatif (*P*) de l'axe principal, mais cependant plus haut que les cellules initiales du plérome dans ce point.

Fig. 7—9. *Sisymbrium strictissimum.*

Fig. 7. Sommet d'une tige florale. Les boutons (*b* et *g*) n'offrent pas trace de bractées-mères, tant extérieurement qu'intérieurement.

Fig. 8. Partie supérieure d'une tige dans son passage de la région végétative à la région florale. Les feuilles inférieures sont plus avancées dans leur évolution que leurs bourgeons axillaires; les supérieures, au contraire, sont à peu près au même point.

Fig. 9. Bouton dont la bractée-mère se réduit à quelques segmentations tangentielles de cellules dans la première couche du périblème au-dessus de la base du bouton. Extérieurement la bractée est à peine visible. (Comp. avec la fig. 12, qui représente la base d'un pédicelle).

Fig. 10. *Anthemis arvensis.* Partie supérieure d'un réceptacle qui est à peu près au même degré de développement que celui de la fig. 15. Entre les grandes cellules inférieures se trouvent des méats remplis d'air, au-dessus desquels était le point végétatif dont l'activité a maintenant pris fin. Il y a environ trois couches régulières de périblème.

Fig. 11—12. *Sisymbrium strictissimum.* Fig. 11. Partie supérieure d'une tige dans son passage de la région végétative à la région florale. Les bractées (*f*) sont très petites. A la base du pédicelle marqué *m*, et coupé en haut, on voit la bractée indiquée seulement par des segmentations de cellules dans la première couche du périblème, au-dessus de la base de la tige (fig. 12).

Fig. 13. *Sisymbrium strictissimum.* Bourgeon végétatif (ou peut-être bourgeon d'un rameau florifère) à l'aisselle de la feuille *f.* Il est formé de cellules segmentées dans tous les sens, sous la 2e couche du périblème.

Fig. 14. Même espèce. Bractée avec son bourgeon axillaire. La formation de la bractée, qui est plus avancée que celle du bourgeon, a soulevé toute la première couche du périblème, et celle du bourgeon, les deux couches extrêmes de ce système histologique.

Fig. 15. *Doronicum macrophyllum.* Coupe longitudinale d'une jeune inflorescence; *gg* boutons complètement privés de feuilles-mères.

Fig. 16. *Rudbeckia Neumanni.* Partie d'une coupe longitudinale d'une inflorescence. Les feuilles inférieures sont des feuilles de l'involucre qui n'ont pas de bourgeons axillaires; les supérieures sont des bractées avec des boutons à leur aisselle. Ces bractées sont plus avancées que leurs bourgeons axillaires.

Fig. 17. Même espèce. Jeune bractée surtout formée par des segmentations de cellules dans la première couche du périblème. Il n'y a pas trace encore de bourgeon axillaire.

Fig. 18. *Inula Helenium.* Jeunes fleurs sans traces de bractées. Les fleurs sont formées de cellules segmentées dans tous les sens, sous la première couche du périblème (la seule qui existe).

Fig. 19. *Doronicum macrophyllum.* Coupe longitudinale d'une fleur. La bractée n'est pas même indiquée par une seule segmentation de cellule; le côté droit de la fleur en est le côté antérieur. La formation cupulaire qui constitue les premiers éléments de la corolle et de l'androcée, résulte, tout comme les feuilles, d'une segmentation des cellules dans la première couche du périblème, et prend rapidement la structure et le mode de croissance des feuilles (comp. fig. 12, planche II).

Fig. 20. *Rudbeckia platyglossa.* Partie supérieure d'un réceptacle sur lequel il n'y avait encore que les feuilles de l'involucre, mais aucune fleur.

Fig. 21. *Doronicum macrophyllum.* Coupe longitudinale d'une fleur. On voit d'un côté une proéminence (*c*); c'est le calice en train de se développer. Il se présente toujours comme un bourrelet peu élevé.

Fig. 22. Même préparation. Dessin histologique du côté droit (par suite d'un malentendu, le graveur l'a disposé de travers). Le calice (*c*) se forme par des segmentations de cellules dans la première couche du périblème.

Planche II.

Composées. Papilionacées.

f, g, P désignent la même chose que sur la pl. I.

Fig. 1. *Anthemis arvensis.* Partie d'un réceptacle avec des boutons (*gg*). Les plus âgés portent extérieurement des traces visibles de bractées (*f*); les plus jeunes n'en ont pas trace. On ne distingue sur le réceptacle qu'une couche de périblème.

Fig. 2. Même espèce. Une inflorescence plus développée avec des fleurs jeunes et âgées. On voit le passage des bractées aux feuilles de l'involucre. *m*, moelle munie de méats intercellulaires remplis d'air.

Fig. 3. *Rudbeckia platyglossa.* Coupe longitudinale d'une très jeune inflorescence.

Fig. 4. *Anthemis rigescens.* Jeune inflorescence avant que la formation des fleurs ait commencé. *m*, moelle munie de méats intercellulaires remplis d'air. Le réceptacle prend ici, et, en général, chez les Composées, presque sa forme définitive avant que les fleurs commencent à y naître.

Fig. 5. *Anthemis arvensis.* Coupe longitudinale d'une jeune fleur. *c*, calice; *f*, bractée réellement placée sur la base de la fleur; *ov*, ovule.

Fig. 6—10. Même espèce. Fleurs à divers degrés de développement. La Fig. 7 représente les plus jeunes. La Fig. 6, qui est un peu plus âgée, n'offre pas encore trace de bractées; mais on y voit, comme dans la Fig. 7, les fleurs se former par des segmentations de cellules sous la première couche du périblème. Dans les Fig. 8 et 9 (la bouton à gauche), on voit naître la bractée par des segmentations de cellules, sur la base du bourgeon lui-même. Dans la Fig. 10 (laquelle, ainsi que la Fig. 9, est plus fortement grossie que les autres), plusieurs cellules se sont segmentées, et il en est de même de la Fig. 9 (la fleur de droite); cette dernière n'a pas été exactement coupée par le milieu. La première couche du périblème croît

seulement par des segmentations radiées jusqu'au moment de l'apparition de la bractée, et alors apparaissent des cloisons tangentielles. C'est aussi le cas lorsque la formation du périgone commence (Fig. 9; conf. la Fig. suivante).

Fig. 11. *Chrysanthemum leucanthemum.* Moitié d'une coupe longitudinale d'une jeune fleur; elle montre que la structure en est la même que celle d'une feuille ordinaire (comp. fig. 12), et je crois devoir, avec Mr. Koehne, considérer la cupule qui se forme sur la jeune fleur des *Composées*, et d'où se développent la corolle, l'androcée et le gynécée, comme une formation foliaire.

Fig. 12. *Anthemis rigescens.* Coupe longitudinale d'une feuille de l'involucre, comme comparaison avec la fig. 11.

Fig. 13. Même espèce. Jeune inflorescence; le point végétatif (ɔ: »die Scheitelzellgruppe« de Hanstein) est assez apparent, et la structure interne est encore régulière. Comp. fig. 10, I.

Fig. 14—15. *Chrysanthemum leucanthemum.* Fig. 14, coupe longitudinale d'une fleur, montrant la structure de la corolle; celle-ci n'est, dans sa partie centrale, *t*, formée que d'épiderme, excepté vis-à-vis des étamines, entre les pétales, où l'on voit de faibles fibres vasculaires (*m*, fig. 15). A la base et au sommet de la corolle, apparaît de nouveau le mésophylle. Au sommet, *l*, de la corolle, les cellules épidermiques sont également très développées. *ov*, l'ovule.

Fig. 16—23. *Amorpha fruticosa.*

Fig. 16. Partie supérieure du sommet de la tige, montrant sa structure. On ne distingue qu'une couche régulière de périblème; entre elle et les séries du plérome s'étend un méristème irrégulier.

Fig. 17. Naissance d'une bractée; les cellules commencent à se segmenter tangentiellement surtout dans la première couche du périblème.

Fig. 18—19. Deux bractées plus âgées; il n'y a pas trace de formation de bourgeons, à moins que les cellules allongées qui se trouvent à l'aisselle des feuilles n'en soient le commencement. Dans la dernière figure, le procambium a commencé à se former dans la base de la feuille.

Fig. 20. Une proéminence à peine visible à la base de la feuille indique que la formation du bourgeon a commencé.

Fig. 21—22. Le bourgeon a grossi, et apparaît distinctement sur la base de la feuille; je ne puis indiquer exactement les segmentations des cellules, mais la première couche du périblème joue certainement un rôle considérable. La formation du procambium dans la feuille se voit clairement.

Fig. 23. Esquisse générale d'une portion d'inflorescence, qui montre que les productions supérieures de l'axe, contrairement à l'indication de M. Hofmeister (Allgem. Morphologie, p. 411 et 430), sont des feuilles; les bourgeons naissent distinctement dans la base des feuilles.

Fig. 24. *Medicago sativa.* Coupe longitudinale d'une jeune inflorescence. Le bourgeon et la feuille sont unis par leurs bases comme chez les Crucifères. A la base de l'inflorescence, les feuilles sont beaucoup plus développées que leurs bourgeons axillaires; immédiatement après viennent des bractées, qui ne sont pas plus avancées que leurs bourgeons, et, vers le sommet de l'inflorescence, il ne naît que des bourgeons.

Fig. 25. *Melilotus officinalis.* Extrémité d'une tige florale, et bractée avec son bourgeon axillaire. Le sommet de la tige a une structure très régulière (voir xyl. I, texte p. 44). Le plérome de l'axe-mère est en activité pour la formation du bourgeon. Celui-ci se forme à l'aisselle de la feuille, mais dans des couches plus profondes que cette dernière. On voit clairement comment sont unis la base de la feuille et celle du bourgeon.

Planche III.

Graminaceæ. Ribes. Valeriana.

f, g, comme sur les planches précédentes; *gl*, glumelle; *pi*, paillette inférieure; *ps*, paillette supérieure; *st*, étamine. Les chiffres romains désignent les axes.

Fig. 1—7. *Secale cereale.* Inflorescences et parties d'inflorescences.

Fig. 1. Deux boutons qui se développeront en épillets; celui d'en bas plus âgé est seulement indiqué. Le dermatogène n'est segmenté que radialement dans la feuille.

Fig. 2. Un épillet dont la fleur et la glumelle inférieures (I) manquent; il y a jusqu'à 5 fleurs, desquelles les deux inférieures, I et II, continuent seules à se développer, les trois autres restant rudimentaires.

Fig. 3. Sommet de la tige de la précédente préparation, avec le cinquième bourgeon (*g*). Le dermatogène est segmenté tangentiellement dans la feuille (*f*); *n*, segmentation tangentielle dans la deuxième couche du périblème, indiquant la naissance du bourgeon.

Fig. 4—5. Dans la fig. 4, on voit les bourgeons *p*, *m* et *n* de la fig. 5. A la base de l'épi, les feuilles diminuent graduellement de grandeur; avant de disparaître complètement, elles ne sont indiquées, comme dans les bourgeons *m* et *p* fig. 4, que par quelques segmentations dans le dermatogène, sur la base du bourgeon. Le côté gauche de l'épi, fig. 5, montre aussi le passage des feuilles caulinaires stériles aux bractées-mères des bourgeons axillaires floraux.

Fig. 6—7. Partie supérieure de deux épis, montrant le passage à l'épillet terminal. I et II sont des boutons de fleurs, dont les bractées sont des paillettes inférieures; III et IV sont les bourgeons axillaires non développés des deux glumes; V, VI, VII etc. sont des épillets ayant la même structure que la fig. 2, et sans trace de bractées-mères à leur base.

Fig. 8—9. *Poa annua.* Inflorescence vue de deux côtés opposés. La formation des axes du 2e ordre est presque terminée, et celle des axes du 3e ordre commencée, ou peut-être terminée d'un côté. Même passage à l'épillet terminal que chez le *Secale* fig. 6—7. Tous les axes du 2e ordre ont des bractées-mères.

Fig. 10. *Bromus pendulinus.* Partie supérieure d'un épillet montrant la naissance des bourgeons; le sommet de la tige est rejeté alternativement à droite et à gauche.

Fig. 11—12. *Hordeum vulgare.* Naissance des bourgeons de l'inflorescence. La fig. 12 principalement montre que les séries du plérome dans les bourgeons partent de la 4e couche de cellules, laquelle doit certainement être considérée comme appartenant au plérome. La naissance des feuilles est accompagnée de segmentations tangentielles des cellules du dermatogène (fig. 11).

Fig. 13—15. *Hordeum vulgare.*

Fig. 13. Sommet d'une tige avec le bourgeon supérieur et sa bractée-mère.

Fig. 14—15. Fig. 14: Bourgeons I et II avec leurs bractées-mères de la fig. 15. Le bourgeon I n'est indiqué que par des segmentations dans la 2e couche du périblème; la 1e couche concourt, par contre, à la formation de la feuille. La partie inférieure de la fig. 15 montre le passage de la région végétative à la région florale de l'axe, ainsi que les caractères propres à chacune d'elles.

Fig. 16. *Poa annua.* Partie supérieure d'un épillet; I, II, III etc. désignent des axes du 2e ordre (fleurs). Un bourgeon est ici la production latérale supérieure de l'axe.

Fig. 17. *Avena fatua.* Partie supérieure d'un épillet. Le sommet de la tige est rejeté alternativement à droite et à gauche, à mesure que les bourgeons se montrent. I, II etc. fleurs.

Fig. 18—22. *Ribes sanguineum.*

Fig. 18. Partie supérieure d'une inflorescence. Sous le sommet en dôme surbaissé de la tige, on voit les séries du plérome se former dans l'intérieur de la tige avant que le bourgeon I devienne bien visible à l'extérieur; ces séries prennent naissance sous la 2e couche du périblème, tandis que la bractée semble naître surtout dans la 1e couche (par suite d'une erreur du graveur, la couche du périblème au-dessous de *f* est trop large).

Fig. 19. Sommet d'une tige végétative. Il n'y a pas de bourgeons à l'aisselle des feuilles.

Fig. 20 et 22. Inflorescence vue de deux côtés opposés.

Fig. 21. Autre inflorescence vue d'en haut. Le sommet en dôme surbaissé de la tige, occupe toujours le centre de toute l'inflorescence.

Fig. 23—28. *Valeriana Phu.* Les chiffres romains désignent les axes des divers ordres; I, l'axe principal; II, l'axe du 2e ordre etc. Les figures donnent d'après leurs numéros le développement de l'inflorescence cymeuse. Les axes latéraux se montrent avant qu'il y ait trace de la bractée-mère *f* (du moins pas extérieurement); celle-ci naît de la base du bourgeon.

Planche IV.

Salicineæ. Umbelliferæ. Scrophulariaceæ, etc.

Fig. 1—6. *Salix nigricans* (chaton femelle).

Fig. 1. Coupe longitudinale d'un jeune chaton. La figure montre la naissance des bourgeons bien au-dessous du sommet de la tige, sur la base des bractées.

Fig. 2. La formation des feuilles se poursuit dans les couches extrêmes du périblème.

Fig. 3. Une feuille plus âgée.

Fig. 4. Feuille plus âgée, dont la structure se rapproche maintenant beaucoup plus de celle des feuilles ordinaires, et sur la base de laquelle le bourgeon a commencé à se former (en *g*).

Fig. 5. Feuille encore plus âgée.

Fig. 6. Etat encore plus avancé. Le procambium est en voie de formation dans la feuille (en *c*). Le bourgeon montre déjà distinctement des séries de plérome (comp. xyl. II, p. 54).

Fig. 7—11. *Chærophyllum aureum.*

Fig. 7—8. Coupe verticale de jeunes ombellules, montrant la forme du sommet de la tige, et les épiblastèmes latéraux dans leurs rapports avec ce sommet et entre eux.

Fig. 9—11. Jeunes bourgeons (*g*) avec leurs bractées-mères (*f*). La structure des bourgeons est très régulière. Les bractées-mères (feuilles de l'involucre) semblent naître de la base des bourgeons, du moins dans quelques cas.

Fig. 12. *Ægopodium Podagraria.* Coupe d'une ombelle. Les bractées des fleurs inférieures dans les ombellules sont également ici indiquées par de petits bourrelets calcanéiformes à la base des bourgeons.

Fig. 13. *Veronica virescens.* Coupe d'une inflorescence. Les bractées se montrent avant leurs bourgeons axillaires sur le sommet en forme de dôme de la tige, laquelle est bien développée et de structure régulière.

Fig. 14. *Linaria striata.* Coupe verticale d'une inflorescence. On voit clairement que les bourgeons et les bractées-mères sont réunies à leurs bases.

Fig. 15—17. *Delphinium consolida* (inflorescence).

Fig. 15 et 16. Elles représentent deux jeunes bractées; celles-ci prennent naissance dans les couches extrêmes du périblème bien avant leurs bourgeons axillaires, et sur le sommet un peu aplati de la tige, dans l'intérieur de laquelle se forment rapidement des méats intercellulaires remplis d'air (comp. fig. 17).

Fig. 18—19. *Digitalis lutea.*

Fig. 18. Coupe longitudinale d'une inflorescence, montrant le sommet en forme de dôme de la tige, et les épiblastèmes qui se forment à sa base.

Fig. 19. Feuille avec son bourgeon axillaire. Les couches extrêmes du tissu cellulaire sous le dermatogène ont été en activité pour la formation de la feuille, mais elles ont moins contribué à celle du bourgeon. Ce dernier prend naissance après sa feuille-mère.

Fig. 20—23. *Digitalis parviflora.*

Fig. 20. Le sommet d'une tige dans son passage de l'état végétatif à l'état floral; il ne s'est encore montré aucun bouton.

Fig. 21. Sommet d'une tige florale. Les bractées sont un peu plus avancées que leurs bourgeons axillaires sur le bord du sommet cratériforme très remarquable de la tige.

Fig. 22—23. Elles montrent la structure très rare du sommet de cette tige, un méristème tout-à-fait irrégulier se trouvant immédiatement sous la couche de dermatogène. Dans la formation des bourgeons (fig. 23), on voit les séries du plérome prendre naissance dans l'intérieur de ce tissu irrégulier.

Fig. 24—25. *Rheum compactum* (inflorescence).

Fig. 24. On y voit les extrémités d'une jeune inflorescence avec ses épiblastèmes et le sommet de la tige. Les bourgeons et les feuilles-mères naissent simultanément.

Fig. 25. Bourgeon avec sa bractée. La coupe ne passe pas exactement par le milieu du bourgeon. Cependant, on voit clairement que les bords de la feuille se sont développés seulement du dermatogène.

Fig. 26—27. *Orchis mascula* (inflorescence). Le bourgeon et sa bractée-mère se montrent presque en même temps sur le sommet en dôme surbaissé de la tige. La fig. 27 est une coupe longitudinale.

Fig. 28. *Epipactis palustris.* Inflorescence vue d'en haut. La production la plus élevée de l'axe est aussi ici un bourgeon.

Planche V.

Cucurbitacées.

P, *f* et *g*, comme sur les planches précédentes; *v*, vrille. Les chiffres arabes désignent les feuilles des axes principaux, et les chiffres romains correspondants, leurs bourgeons axillaires ou, en général, des kaulomes.

Fig. 1—14. *Bryonia.*

Fig. 1. Sommet d'une tige vu d'en haut, avec toutes les feuilles supérieures, leurs bourgeons axillaires et les vrilles, qui sont désignées par des chiffres correspondant aux bourgeons auprès desquels elles se trouvent.

Fig. 2—10. Bourgeon axillaire se développant en ramification cymeuse. Des deux axes latéraux, l'un, *a*, donne naissance à une inflorescence en forme de grappe, et l'autre, *b*, produit un bourgeon qui répète le mode de développement de l'axe principal.

Fig. 11—12. Inflorescence vue de côté et d'en haut. Dans la fig. 11, on voit les bractées indiquées comme de petits bourrelets calcanéiformes à la base du bourgeon.

Fig. 13—14. Coupe transversale d'une tige, montrant deux feuilles successives avec leurs productions axillaires, desquelles un bourgeon avec sa vrille est représenté fig. 13.

Fig. 15. *Sicyos parviflora.* Partie supérieure d'une tige. Les chiffres impairs à droite, désignent des feuilles dont les productions axillaires et les vrilles ne se voient pas, et les chiffres pairs à gauche, des feuilles dont les productions axillaires et les vrilles sont visibles.

Fig. 16—27. *Cyclanthera pedata* et *elastica.*

Fig. 16. Partie supérieure d'une tige; à gauche, feuilles à numéros impairs, et à droite, feuilles à numéros pairs. Les productions axillaires de ces dernières sont seules visibles. La vrille v^4 est nettement séparée du bourgeon IV.

Fig. 17. Inflorescence vue d'en haut. *P*, sommet de la tige.

Fig. 18. Bourgeon axillaire en train de se ramifier (cyme). La vrille est en partie cachée par le bourgeon.

Fig. 19. Bourgeon axillaire dont la ramification est terminée. Son axe principal se termine en une fleur. L'un des axes latéraux (*a*) produit une inflorescence, comme chez le *Bryonia,* et l'autre, un bourgeon végétatif, qui est une répétition de l'axe sur lequel est située toute la petite inflorescence cymeuse.

Fig. 20. Partie supérieure d'une inflorescence màle. On voit au centre le sommet de la tige *P*; à gauche, la plus jeune fleur; à droite, celle qui la précède. Toutes les deux sont évidemment des productions latérales du sommet de la tige.

Fig. 21. Partie supérieure d'une inflorescence màle dont les fleurs se forment peut-être par une partition du point végétatif.

Fig. 22. Inflorescence cymeuse à un degré plus avancé de développement. Le rameau végétatif *b*, qui est tourné vers la vrille, a produit deux feuilles; l'autre *a*, d'où sort une inflorescence, a déjà, à son extrémité *P*, donné naissance à 6 fleurs, dont les plus basses ont produit chacune, sur leur face inférieure, une petite inflorescence en forme de grappe (*d* sur la fleur IV).

Fig. 23. Coupe longitudinale d'une inflorescence màle. Dans la fleur de gauche, l'anthère (l'axe pollinifère) est coupée de manière à rendre visibles les loges de l'anthère.

Fig. 24. Inflorescence. Au sommet de la tige, *P*, naît la fleur I; plus bas, 6 autres fleurs. Sur les fleurs V et VI, on voit la petite inflorescence «accessoire», et, au milieu de la fleur VI, l'anthère en train de s'élever.

Fig. 25. Coupe longitudinale d'une inflorescence mâle. Sous les fleurs marquées II, on voit la petite inflorescence III sur la face inférieure de sa tige.

Fig. 26—27. Partie d'une inflorescence dont la portion de droite est représentée fig. 27. L'inflorescence accessoire de la fleur II se voit dans sa formation histologique dans III.

Fig. 28. *Sicyos angulata.* Inflorescence mâle.

Fig. 29—30. *Cucumis prophetarum.* Grappe vue de côté et d'en haut; dans la première figure, on voit les bractées. Comme en beaucoup d'autres cas, celles-ci se montrent comme de petits bourrelets sur la base du bourgeon.

Fig. 31. *Cucurbita Pepo.* Jeune vrille; v^1 en est le bras principal, et P, l'axe sur lequel naissent les autres bras.

Fig. 32. Même espèce. Coupe longitudinale d'une vrille. P, sommet de la tige autour de laquelle sont situées les bras.

Fig. 33. Structure histologique du point végétatif de la vrille de cette Cucurbitacée.

Fig. 34. Jeune vrille. On voit en v^1 le bras principal de la vrille. Son »bourgeon axillaire« a donné naissance à deux autres bras (v^2 et v^3), qui sont situés, comme les deux premières feuilles, sur les bourgeons ordinaires, c'est-à-dire à droite et à gauche de la feuille-mère.

Fig. 35. Elle montre la même chose que la fig. 33.

Fig. 36. — — — — fig. 32.

(Relativement à la situation des différentes parties, voir les xylographies dans le texte, pag. 70, et fig. 35, pl. XI).

Planche VI.

Hydrocaridées. Utriculariacées. Ampelidées.

Fig. 1—6. *Vallisneria spiralis.*

Fig. 1. Bourgeon dont la partition est terminée. Le bourgeon désigné par P porte une feuille sur le côté qui est tourné vers le bourgeon-sœur, P^1. On voit distinctement les feuilles naître de la première couche du périblème. Le plérome du bourgeon partagé compte 4 séries de cellules.

Fig. 2. Partition d'une tige plus avancée que dans la fig. 3. A gauche, on voit la formation de la feuille dans sa première phase.

Fig. 3. Sommet d'une tige en partition.

Fig. 4. Sommet d'une tige qui n'est pas en partition; de même que toutes les précédentes, elle a 4 séries de plérome et une couche de périblème sous le dermatogène. On voit en f la formation des feuilles.

Fig. 5. Jeune fleur; on voit que la spathe est en majeure partie formée par des segmentations du dermatogène. La partie inférieure de cette préparation n'était pas très distincte.

Fig. 6. Autre coupe de la spathe, qui montre la même chose.

Fig. 7. Coupe transversale d'un pétale de l'*Acacia armata*; il présente le même aspect que la spathe du *Vallisneria* ɔ: il est formé en majeure partie par des segmentations de cellules épidermiques.

Fig. 8—10. *Hydrocharis Morsus ranæ.*

Fig. 8—10. Elles montrent différents degrés dans la partition des bourgeons. Celle-ci se produit de la même manière que chez le *Vallisneria*; les segmentations des cellules dans tous les sens sont remplacées vers la ligne médiane du bourgeon par des segmentations radiées, et il se forme par suite sur cette ligne des séries transversales. A droite et à gauche, les cellules continuent à se segmenter dans tous les sens en formant ainsi deux nouveaux bourgeons.

Fig. 11—15. *Utricularia vulgaris.*

Fig. 11. Sommet d'une tige. Les trichomes qui y naissent sont omis.

Fig. 12. On voit en haut le sommet d'une tige P; sur son côté interne naît un bourgeon g de la couche extérieure du périblème.

Fig. 13. Préparation semblable à celle de la fig. 12. On voit deux des bourgeous sans feuilles-mères (»Ranken« de M. Pringsheim) situés sur la face interne.

Fig. 14—15. Sommets de deux des rameaux minces et faibles qni sont situés sur la face interne de la tige enroulée en spirale: »Ranken» de M. Pringsheim.

Fig. 16—20. *Ampelopsis hederacea.*

Fig. 16. Esquisse de la partie supérieure d'une tige; f et g désignent comme d'habitude les feuilles et les bourgeons axillaires, et v, la vrille. Les chiffres qui accompagnent les lettres indiquent quels sont les organes qui se correspondent.

Fig. 17. Partie supérieure d'une vrille, qui montre que les bras de celle-ci sont des bourgeons latéraux.

Fig. 18. Partie d'une vrille développée.

Fig. 19. Esquisse de la ramification d'une tige.

Fig. 20. Partie supérieure d'une tige au même degré de développement que dans la fig. 19. La vrille se forme en v en dehors du point végétatif P.

Fig. 21—27. *Vitis vulpina.*

Fig. 21. Esquisse de la partie supérieure d'une tige, où une feuille est près d'écarter le sommet de la tige de la direction qu'il avait suivie jusqu'alors. On voit en même temps que les bourgeons axillaires marqués de hachures sont situés dans un autre plan que les vrilles; v^2, vrille commençant de se ramifier.

Fig. 22. Elle montre que la première ramification de la vrille est une partition. Au-dessous, le bourgeon axillaire g de la feuille située au bas de cette vrille.

Fig. 23. Sommet d'une tige sur laquelle une vrille prend naissance à droite. La ramification est presque une véritable partition du point végétatif. On remarquera le vigoureux développement de la feuille f, et des séries transversales des cellules situées entre elle et le sommet de la tige.

Fig. 24—27. Vrilles à divers degrés de ramification, c'est-à-dire de dichotomie.

Fig. 28. *Vitis vinifera.* Coupe verticale de l'extrémité d'une plante germante. Les feuilles sont en partie enlevées; n désigne le tissu nodal, entre lequel se voient les séries du plérome disposées en zigzag.

Planche VII.

Asclépiadées. Solanées.

Fig. 1. *Vincetoxicum nigrum.* Partie supérieure d'une tige végétative, vue de côté.

Fig. 2. *Asclepias syriaca.* Même partie vue d'en haut.

Fig. 3. *Vincetoxicum nigrum.* La première inflorescence (g) se montre sur le sommet aplati et très large de la tige. Plus tard, elle sera située sur le côté de la tige, sans doute entre les feuilles $a-a$.

Fig. 4. *Asclepias syriaca.* L'inflorescence qui s'est montrée la première a déjà sa bractée-axillante (β), qui apparaît comme un bourrelet sur la base du bourgeon (voir fig. 5—6). Les deux feuilles suivantes a^1-a^2 sont nées, et on voit qu'à partir de ce moment les verticilles des feuilles ne se coupent en général plus à angle droit.

Fig. 5—6. Même préparation que fig. 4, vue de deux côtés.

Fig. 7. Même espèce à un degré de développement plus avancé. Les deux feuilles supérieures sont devenues plus grandes.

Fig. 8. *Vincetoxicum nigrum.* Sommet d'une tige au même degré de développement que la figure précédente, vu de côté.

Fig. 9. Même espèce. Trois inflorescences ont paru. La plus jeune, g, se montre précisément sur le sommet de la tige, au-dessus des deux feuilles $a—a$. La suivante, g^1, a déjà une grande bractée, β, et la troisième a déjà produit plusieurs boutons et bractées.

Fig. 10. Même espèce. Deux inflorescences ont paru; la plus jeune est située sur le sommet même de la tige. La disposition des feuilles est encore la même que sur la tige végétative.

Fig. 11—12. *Asclepias syriaca.* Coupes verticales du sommet de la tige florale. A droite, une inflorescence avec sa première bractée.

Fig. 13—14. Même espèce. Esquisse et représentation histologique d'une coupe longitudinale de la partie supérieure d'une tige. Le sommet de la tige présente un méristème assez irrégulier avec 2—3 couches de périblème. Entre les deux bourgeons, celui qui se développe en inflorescence et celui qui continue la direction de la tige, on voit les séries transversales de cellules *m*, qui ont à peu près la même situation que dans les bourgeons dichotomiques des *Hydrocharidées* et des *Ampelidées*. C'est seulement au-dessous du sommet de la tige que se différencient les tissus nodal (*n*) et internodal (*i*); ce dernier a des cellules plus allongées et présente la structure ordinaire de la moelle.

Fig. 15. *Vincetoxicum nigrum*. Partie supérieure d'une tige florale. Jeunes boutons et inflorescences. A gauche, à l'aisselle de β^1, on voit un bourgeon, g^2, sur lequel, à l'aisselle de *n*, se forme un autre bourgeon *m*, qui ne résulte point d'une dichotomie du point végétatif, mais, en tout cas, est le bourgeon le plus haut placé sur l'axe.

Fig. 16—21. *Solanum nigrum*.

Fig. 16. Jeune pousse dont les deux préfeuilles végétatives f^1 et f^2 sont formées. Elles n'ont pas encore de bourgeons axillaires.

Fig. 17. Développement plus avancé. Le bourgeon axillaire de la préfeuille supérieure f^2 a fait son apparition.

Fig. 18. Un bourgeon II sans feuille-mère s'est montré sur l'axe principal; c'est un bourgeon-sœur de *g*, et il produira la seconde fleur de la cyme scorpioïde terminale, dont la première fleur, la plus âgée, termine l'axe principal I.

Fig. 19. Sur le 2e axe de la cyme scorpioïde, se montre un troisième axe III, également sans feuille-mère, sur le côté de l'axe-mère II. Le bourgeon axillaire de la première préfeuille a aussi paru.

Fig. 20. Sommet d'une cyme scorpioïde florifère. Une fleur IV apparaît à côté de la fleur III comme véritable production latérale; toutes les fleurs sont sans bractées.

Fig. 21. Les plus jeunes fleurs d'une cyme scorpioïde à un degré de développement un peu plus avancé.

Fig. 22. *Solanum Dulcamara*. Sommet d'une cyme scorpioïde.

Fig. 23. *Lycopersicum esculentum*. Sommet d'une cyme scorpioïde avec les quatre derniers axes; le quatrième est précisément en train de se développer sur le côté de l'axe III, dont il est une production latérale.

Fig. 24—27. *Datura stramonium*.

Fig. 24. Jeune pousse dont les deux seules feuilles caulinaires f^1, et f^2, ont paru.

Fig. 25. Les bourgeons axillaires de ces deux feuilles sont devenus visibles, beaucoup au-dessus et en dehors du point végétatif.

Fig. 26—27. La première donne l'image histologique de l'axe (*r*) de la fleur. Elle montre qu'il y a quatre couches de cellules nettement limitées, quoique le sommet de la tige soit si large et si aplati. La fig. 27 représente la petite pousse entière avec ses deux feuilles, leurs bourgeons axillaires et la fleur-terminale, dont on voit les sépales, *s*.

Fig. 28—29. *Petunia hybrida*.

Fig. 28. Tige florifère vue d'en haut. La figure montre trois systèmes d'axes. Les deux premiers ont leurs deux préfeuilles (feuilles caulinaires), et le plus âgé, même tous ses sépales. Le plus jeune, III, apparaît comme une production latérale sur la base de II.

Fig. 29. Pousse semblable, mais plus âgée, vue de côté.

Planche VIII.

Solanées. Borraginées. Cistacées. Hydrophyllacées.

Les chiffres romains désignent des axes de différents ordres; *s*, les sépales; *m*—*n*, les deux préfeuilles.

Fig. 1. *Physalis Alkekengi*. Jeune pousse avec ses deux préfeuilles. Le bourgeon axillaire de la 2e préfeuille *n* résulte d'une partition dichotomique de l'axe principal.

Fig. 2—3. *Solanum nigrum.*

Fig. 2. Coupe verticale d'une cyme scorpioïde, montrant la formation de la plus jeune fleur IV, sur le côté de III.

Fig. 3. Coupe d'une pousse, montrant la liaison exacte entre la préfeuille n et son bourgeon axillaire II. Celui-ci ne provient pas d'une partition du point végétatif, quoiqu'il soit la production extrême de l'axe; la première préfeuille m n'a pas encore de bourgeon axillaire.

Fig. 4. *Datura Stramonium.* Coupe verticale d'une pousse, qui en montre l'histologie, ainsi que la position du point végétatif au-dessus des jeunes bourgeons qui apparaîtront à l'aisselle des feuilles.

Fig. 5—9. *Hyoscyamus niger* et *pusillus.*

Fig. 5. Sommet d'une inflorescence. Le bourgeon III est un bourgeon-sœur de II, et issu comme lui de la partition d'un bourgeon-mère commun; III est de nouveau en train de se diviser par dichotomie.

Fig. 6. Le bourgeon axillaire de n est formé par une partition à peu près égale de l'axe principal.

Fig. 7—8. Esquisse et vue histologique d'une coupe verticale des plus jeunes bourgeons dans une cyme scorpioïde. Sur la ligne médiane du vieil axe, on voit en m des séries de cellules transversales, qui séparent l'un de l'autre les deux nouveaux points végétatifs I et II, et qui indiquent l'arrêt de la croissance en longueur dans la ligne médiane.

Fig. 9. Le bourgeon-sœur de III est en train de se partager par dichotomie en deux autres bourgeons IV et V.

Fig. 10—13. *Cerinthe gymnandra.*

Fig. 10. Le bourgeon-sœur de II est en train de se diviser par dichotomie en deux autres bourgeons III et IV. La feuille-axillante de IV, n, n'est pas encore visible.

Fig. 11. Coupe du sommet d'une inflorescence. Le plus jeune bourgeon, I, n'a pas encore commencé à se partager.

Fig. 12—13. Deux dichotomies chez cette plante. La bractée-axillante du bourgeon IV, n^3, a paru presque au même temps que s'opérait la dichotomie.

Fig. 14. *Borrago officinalis.* Coupe du plus jeune bourgeon en partition. Les stries indiquent la structure histologique, et on voit notamment en m des séries transversales de cellules qui séparent l'un de l'autre les deux nouveaux points végétatifs.

Fig. 15. *Helianthemum vulgare.* Sommet d'une inflorescence avec les quatre plus jeunes boutons; on voit clairement que III et IV sont des bourgeons-sœurs, formés par dichotomie du bourgeon-sœur de II. La bractée-axillante de IV est visible en n^3.

Fig. 16. *Symphytum asperrimum.* Jeune inflorescence située à l'aisselle d'une feuille caulinaire sur l'axe principal. Il y a 5 systèmes d'axes. Le bourgeon V est sœur de IV, et il est en train d'augmenter de volume pour se partager. Les bractées manquent complètement. L'inflorescence commence comme cyme dichotomique, mais les deux axes latéraux la continuent comme cyme scorpioïde.

Fig. 17—20. *Caryolopha sempervirens.*

Fig. 17. Une des inflorescences axillaires de la tige principale, laquelle, comme chez le *Symphytum*, est une cyme scorpioïde double. Les bractées ont paru. La ramification se fait encore par formation de bourgeons latéraux.

Fig. 18. Degré de développement plus avancé. La ramification latérale fait place à une dichotomie. Le bourgeon IV à droite n'est pas encore partagé, mais s'est étendu beaucoup transversalement. Il est soutenu par la bractée n^3. Le bourgeon III, dans cette cyme scorpioïde, n'a encore qu'un sépale. La cyme scorpioïde à gauche est plus avancée; son bourgeon III a tous ses sépales, et son bourgeon IV s'est déjà partagé en deux bourgeons-sœurs IV et V, et, à la base de V, en même temps que se fait la dichotomie, se montre un bourrelet qui est la bractée-mère de V.

Fig. 19. Elle montre la formation des jeunes inflorescences scorpioïdes doubles à l'aisselle des feuilles de l'axe principal. g est le bourgeon axillaire de f, et donnera plus tard naissance à deux bourgeons latéraux, II—II, absolument comme dans la cyme du *Valeriana* (III, 23—28) et chez les *Cucurbitacées* (p. ex. V, 7, 8). II—II continueront la ramification cincinnoïde représentée fig. 17 et 18.

Fig. 20. Première ramification d'une cyme scorpioïde; elle n'est pas dichotomique.

Fig. 21—22. *Cosmanthus viscidus.*

Fig. 21. Sommet d'une inflorescence, vu d'en haut. III et IV sont des bourgeons-sœurs formés par dichotomie.

Fig. 22. Inflorescence semblable, vue de plus haut.

Fig. 23. *Sphacelia tanacetifolia.* La ramification est une partition dichotomique. Les deux premiers sépales (s^1, s^2) sont bien en avance sur les suivants.

Fig. 24. *Symphytum asperrimum.* Coupe menée par le sommet d'une inflorescence parallèlement au plan d'enroulement de l'inflorescence. Elle montre la structure histologique et les séries transversales de cellules qui se trouvent entre les deux bourgeons, dont l'un, *g*, se développera en une fleur, tandis que l'autre, *P*, continuera le mode de ramification de l'axe-mère.

Fig. 25—28. *Tiaridium indicum.*

Fig. 25—26. Coupes verticales d'une cyme scorpioïde, menées parallèlement au plan d'enroulement. Elles montrent la structure histologique du pseudo-monopode, dont le point végétatif est en *P*, et ses bourgeons pseudo-latéraux, en *g—g*.

Fig. 27. Sommet d'une cyme scorpioïde, montrant l'extrémité très vigoureuse de la tige pseudo-monopodiale, et les fleurs pseudo-latérales, relativement insignifiantes, de sa face dorsale.

Fig. 28. Coupe verticale d'une cyme semblable; *P*, point végétatif; *g—g* fleurs. On a indiqué le système fibro-vasculaire du pseudo-monopode.

Planche IX.

Euphorbia.

Fig. 1. *Euphorbia trigonocarpa.* Coupe longitudinale du sommet d'une tige végétative. Les bourgeons ne sont pas encore nés.

Fig. 2. Même espèce. Esquisse histologique du sommet d'une tige végétative; à droite, une jeune feuille; à gauche, une autre plus âgée.

Fig. 3. Même espèce. Coupe longitudinale d'une tige florale. Le bourgeon et sa feuille-mère se montrent à peu près en même temps.

Fig. 4. *E. Cyparissias.* Partie supérieure du sommet d'une tige florale, dont la structure offre la plus grande régularité.

Fig. 5. *E. geniculata.* Jeune cyathium; on voit à gauche une feuille de l'involucre, *i*, et son étamine (*st*) superposée.

Fig. 6—7. *E. Peplus.* Jeune Cyathium, vu de deux côtés opposés. Trois feuilles de l'involucre sont nées; avec leurs bourgeons axillaires superposés (étamines), qui ont pris naissance en même temps, elles forment trois mamelons ovales assez aplatis, traversés par une très légère dépression.

Fig. 8. *E. trigonocarpa.* Tige florale, vue d'en haut après l'apparition du Cyathium terminal. La spirale que forment les bractées inférieures avec leurs bourgeons axillaires (qui se développent en cymes), est continuée par les feuilles de l'involucre avec leurs bourgeons axillaires (étamines superposées st^1, st^2 etc.).

Fig. 9. *E. cyparissias.* Jeune feuille; elle naît dans les deux couches extérieures du périblème.

Fig. 10—12. Même espèce. Jeune cyme, avec ses deux bractées, *m—n*. A l'aisselle de *n*, il se forme un bourgeon; il n'y en a encore aucun de visible à celle de *m*. La coupe ne passe peut-être pas exactement au milieu.

Fig. 13—15. Même espèce. Coupe longitudinale d'un jeune Cyathium. La fig. 13 montre la structure régulière du sommet de la tige, et une feuille de l'involucre avec son bourgeon axillaire (ɔ: étamine, *st*), et la fig. 14, un état moins avancé des mêmes organes. Dans la fig. 15, on voit à gauche une feuille de l'involucre avec son bourgeon axillaire (première étamine de chaque groupe d'étamines), et à droite, en *i*, la formation des parties de l'involucre insérées entre les lobes primitifs des feuilles, et par lesquelles l'involucre devient gamophylle.

Fig. 16. Même espèce. Inflorescence composée de trois fleurs mâles, vue par devant. On voit poindre en st^4 une quatrième fleur mâle. En *s*, entre les fleurs mâles, groupes de squamules (voir fig. 18 pour l'histologie).

Fig. 17. *E. trigonocarpa.* A la base de la première fleur mâle (st^1), mais sur son côté, au-dedans de la deuxième couche de périblème, prend naissance la deuxième fleur mâle (st^2) du groupe.

Fig. 18. Histologie de st^4, fig. 16. L'étamine st^2 est coupée longitudinalement, de manière à faire voir les segmentations des cellules dans la première couche du périblème.

Fig. 19—21. *E. Cyparissias.* Coupe longitudinale de fleurs mâles à divers degrés de développement, montrant l'origine des cellules-mères du pollen de la première couche du périblème, et la formation de la paroi de l'anthère par des segmentations tangentielles (marquées 1, 2, 3, 4), radiées et horizontales, qui se montrent en ordre centrifuge. Les cellules foncées sont les cellules-mères du pollen.

Fig. 22. *E. Esula.* Coupe transversale d'une fleur mâle; en comparant cette figure avec la coupe longitudinale fig. 19 et 21, on voit que les cellules-mères du pollen (les foncées) forment une véritable couche et non une simple série longitudinale. Pour plus de clarté, on a seulement représenté le dermatogène et la première couche du périblème.

Fig. 23. Même espèce. Coupe transversale d'une fleur mâle plus âgée (on n'en a dessiné que le quart) montrant la même chose que la figure précédente; même degré de développement que la fig. 21.

Fig. 24. *E. Peplus.* Paroi de l'anthère après que les couches internes secondaires *r* du périblème ont disparu, et avant que les fibres en spirale se montrent dans la plus externe (à grandes cellules) de ces couches (*s*); *d* signifie l'épiderme.

Fig. 25. *E. Cyparissias.* Trois fleurs mâles vues du centre du *Cyathium.* Sur l'une d'elles, la deuxième fleur mâle, st^2, est en train de naître.

Fig. 26. Anthère à peu près mûre. Coupe transversale.

Fig. 27. *E. Lathyris.* Groupe de fleurs mâles, vu de côté.

Fig. 28. Même espèce. Coupe longitudinale d'un jeune Cyathium. On voit à gauche une feuille de l'involucre, *i*, avec son bourgeon-axillaire, *st* (l'étamine).

Planche X.

Euphorbia.

Fig. 1—4. *E. Cyparissias.* Squamules du Cyathium à divers degrés de développement.

Fig. 5. *E. Peplus.* Squamule du Cyathium. Coupe transversale.

Fig. 6—7. *E. Cyparissias.* Coupe longitudinale d'un Cyathium. Dans la fig. 7, on voit à droite, en *i*, l'involucre, qui présente la même structure que les feuilles proprement dites. A gauche, feuille de l'involucre avec son bourgeon axillaire ɔ: première fleur mâle (*st*). Les carpelles (*cp*) sont en train de se former par des segmentations de cellules, principalement dans la première couche du périblème.

Fig. 8. Même espèce. Fleur femelle à un degré de développement peu avancé. La formation des carpelles est indiquée en *cp* (dans la première couche du périblème).

Fig. 9. Même espèce. Etat plus avancé où les ovules commencent à se montrer par des segmentations de cellules, principalement dans la deuxième couche du périblème.

Fig. 10—11. Même espèce. Deux ovules de la même fleur femelle. Les cellules de la premiére couche du périblème, vers le sommet de l'ovule, ont commencé à s'étendre dans le sens du rayon, et l'une d'elles est segmentée par une cloison tangentielle.

Fig. 12. Même espèce. Ovule à un état plus avancé. Les cellules supérieures de la première couche du périblème se sont segmentées tangentiellement, et les cellules extrêmes, parmi celles qui se sont nouvellement formées, ont des segmentations radiées.

Fig. 13. Même espèce. Coupe longitudinale d'une fleur femelle.

Fig. 14—15. Même espèce. Groupe de fleurs mâles vu de côté (fig. 14); en st^1, on a indiqué les cellules-mères du pollen *p*, et la structure de la paroi de l'anthère. La fig. 15 donne l'histologie de la quatrième fleur mâle st^4 (dont les cellules sont d'une teinte plus foncée que les cellules environnantes).

Fig. 16. *E. Esula.* Ovule, coupé longitudinalement, dont le tégument extérieur, à gauche, se forme par des segmentations de cellules dans le dermatogène et la couche extérieure du périblème.

Fig. 17—18. Même espèce. Parties d'ovules, où les téguments extérieur (*ii*) et intérieur (*is*) sont en train de naître, ce dernier après l'autre.

Fig. 19. *E. Cyparissias.* Un ovule. Les deux téguments sont formés.

Fig. 20. Même espèce. Un ovule, coupé longitudinalement. Les deux téguments sont formés; *se*, sac embryonnaire; les parois des cellules qui l'entourent n'étaient pas très distinctes; de même fig. 16.

Fig. 21. *E. Esula.* Ovule dans un état de développement assez avancé. Beaucoup plus bas dans le nucelle, on voit le sac embryonnaire; il en sort un système de rayons dus à la formation toute particulière de cellules qui est commencée dans la fig. 12, et très avancée dans les fig. 16 et 20.

Fig. 22. *E. trigonocarpa.* Extrémité du nucleus et des téguments internes d'un ovule dont le développement est assez avancé. Le dermatogène présente de nombreuses segmentations de cellules.

Fig. 23—24. *E. Cyparissias.* Coupe transversale d'un Cyathium passant par la base et un peu au-dessus: *sq*, squamules du *Cyathium*, en partie fixées sur l'involucre; *st*, fleurs mâles, disposées en zigzag. Dans l'involucre, on voit l'arrangement des fibres vasculaires (comp. xyl. XI, p. 110).

Fig. 25. *Chrysoplenium alternifolium.* Les ovules naissent sur le placenta dans la deuxième couche du périblème.

Fig. 26. Même espèce. Ovule très développé. Le sac embryonnaire est formé en *se*, et, à l'extrémité du nucleus, on voit que les cellules de la première couche du périblème ont commencé à se segmenter tangentiellement comme chez l'*Euphorbe.* Les téguments naissent du dermatogène.

Fig. 27—30. *Scrophularia nodosa.*

Fig. 27. Les ovules se forment sur le placenta par des segmentations de cellules dans la deuxième couche du périblème.

Fig. 28. Etat plus avancé des mêmes ovules. Le sac embryonnaire se montre; il est formé par la cellule supérieure dans la première couche du périblème.

Fig. 29. Ovules, dans un état de développement un peu plus avancé.

Fig. 30. Etat encore plus avancé. Les téguments commencent à se former. Le sac embryonnaire est rejeté à gauche par une croissance unilatérale de l'ovule.

Fig. 31. *Myogalum nutans.* Un ovule; on voit la formation du tégument et du sac embryonnaire, ainsi que des segmentations de cellules dans la première couche du périblème, au sommet du nucléus.

Fig. 32. *Euphorbia Cyparissias.* Le calice de la fleur femelle naît du périblème. Le dermatogène présente des segmentations radiées, comme dans la formation des feuilles ordinaires.

Fig. 33. Même espèce. Le calice de la fleur femelle prend naissance.

Fig. 34. Même espèce. L'articulation du filet de la fleur mâle se forme.

Planche XI.

Fig. 1—4. *Sedum Fabaria.* Diverses inflorescences qui montrent la formation des feuilles et des bourgeons dans leurs rapports réciproques. Le bourgeon naît de la base de la feuille.

Fig. 5—7. *Ranunculus acris.*

Fig. 5. Partie d'une coupe longitudinale d'une fleur. En bas, quelques étamines, *st*; en haut, carpelles; l'ovule naît de la base du carpelle.

Fig. 6—7. Carpelles avec leurs bourgeons axillaires (ɔ: ovules), qui prennent naissance surtout dans la première couche du périblème.

Fig. 8—10. *Zannichellia macrostemon.*

Fig. 8. Carpelle avec son ovule, en coupe longitudinale.

Fig. 9—10. Coupe d'un jeune carpelle avec son ovule. Les téguments des ovules se forment en partie, sinon exclusivement, dans le dermatogène. Au sommet du nucleus, on voit les mêmes segmentations tangentielles des cellules de la première couche du périblème que dans les ovules précédents (Pl. X).

Fig. 11—13. *Verbascum nigrum* et *pulverulentum.* La fig. 13 représente une des cymes sériales qui se trouvent à l'aisselle des bractées, et la fig. 11, les plus jeunes fleurs d'un de ces groupes, vues de côté.

Fig. 12, cyme semblable vue de devant; β, préfeuilles rudimentaires; *s*, sépales; ces deux figures montrent qu'en réalité cette cyme sériale est une sorte d'inflorescence.

Fig. 14—16. *Aristolochia Sipho.* Fig. 14: coupe longitudinale de la partie supérieure d'un rameau; le plus jeune bourgeon se trouve à l'aisselle de la troisième feuille à partir d'en haut. Les fig. 15 et 16 donnent les relations des bourgeons accessoires. Sur la fig. 16, le bourgeon supérieur et sa première feuille sont seuls formés, le premier dans les couches plus profondes du périblème, et la seconde, dans les couches extérieures; au-dessous, une grande masse de cellules d'où naissent tous les bourgeons ultérieurs, de haut en bas. On voit en *m* des séries transversales de cellules, qui séparent le bourgeon *g* de cette masse plastique.

Fig. 17—19. *Euphorbia medicaginea.* Un bourgeon hypocotyle avec ses deux premières feuilles, *a* fig. 18, et *b* fig. 19. La feuille inférieure (*a*) est bilobée et tournée en avant; les suivantes sont toujours moins émarginées.

Fig. 20—24. *Hypericum hircinum.*

Fig. 20. Jeune fleur avec ses pétales, *p*, ses étamines, *st*, et ses carpelles, *cp*. Les étamines (avec les sépales) sont disposées en spirale; les plus âgées ont 3 folioles (étamines).

Fig. 21. Fleur moins avancée, vue de côté; *p*, pétales; *st*, étamines.

Fig. 22. Fleur coupée de manière à faire voir que les pétales et les étamines sont unis à leurs bases.

Fig. 23. Un pétale avec l'étamine située au-dessus. Celle-ci a produit en tout 6 folioles dans l'ordre *a*, *b*, *c*, *d*.

Fig. 24. Jeune étamine; elle ne présente pas dans sa structure la même régularité que les étamines de l'*Euphorbe.*

Fig. 25—31. *Daucus Carota.* Organogénie des fleurs; *s*, sépales; *p*, pétales; *st*, étamines. Les étamines naissent successivement en spirale, mais toujours après les sépales, au-dessus desquels elles sont situées, mais aux bases desquels elles ne sont pas unies.

Fig. 32—34. *Ricinis communis.* Ramification des étamines. La fig. 33 montre la toute jeune étamine qui s'élève au-dessus de l'axe de la fleur; les autres sont plus âgées. Il se fait une véritable dichotomie. *m*, ligne médiane des ramifications.

Fig. 35. *Cyclanthera pedata.* Diagramme donnant les situations respectives de la vrille *v*, du bourgeon végétatif *g* avec ses premières feuilles f^1—f^3, des fleurs mâles dans l'inflorescence (I, II, III . . . .), et des grappes accessoires sur la face inférieure de quelques fleurs mâles. On n'en trouve que sur les deux fleurs les plus basses I et II. Le bourgeon végétatif est antidrome à l'inflorescence; les grappes accessoires paraissent être poecilodromes; *p* feuille-mère de toute la cyme.

Thermochemiske Undersøgelser.

XI. Undersøgelser over Affiniteten imellem Brint og Metalloiderne.

Ved

Julius Thomsen.

Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10 B. II.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

1873.

Undersøgelser

over

Affiniteten imellem Brint og Metalloiderne.

Ved

Julius Thomsen.

Kjøbenhavn.

Blanco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

1873.

I den følgende Afhandling har jeg meddeelt mine Undersøgelser over Brintens Affinitet til de vigtigste Metalloider. Lignende Undersøgelser have vel allerede tidligere været udførte, men da flere af disse Størrelser have stor Betydning ved Behandlingen af mange thermochemiske Problemer, og da det derfor er af Vigtighed at have disse Størrelser bestemte med Nøiagtighed, forinden man skrider til en Anvendelse af dem, har jeg ikke skyet det besværlige Arbeide at foretage en selvstændig Bestemmelse af Affinitetens Størrelse i de vigtigste Brintforbindelser. Det har ved disse Undersøgelser blandt Andet viist sig, at en af disse Fundamentalstørrelser, nemlig Brintens Affinitet til Chlor, tidligere har været unøiagtigt bestemt, hvorved tillige et meget stort Antal af de ældre Angivelser af thermochemisk Art ere blevne unøiagtige, nemlig alle de, som paa en eller anden Maade ere afhængige af den unøiagtige Bestemmelse af Affiniteten imellem Chlor og Brint.

I *det 1ste Afsnit* gjennemgaaer jeg Bestemmelserne af Affiniteten imellem Brint og *Chlor*, *Brom* og *Jod*. Af disse Bestemmelser har jeg udført den, som angaaer Affiniteten imellem Chlor og Brint, directe, hvorimod jeg har bestemt Brintens Affinitet til Brom og Jod ved at lade Chlor indvirke paa Brom- og Jodforbindelser i vandig Opløsning. Da det til Beregningen af disse Processer er nødvendigt tillige at kjende Absorptionsvarmen for Chlor-, Brom- og Jodbrinte, har jeg ogsaa bestemt disse Størrelser.

I *det 2det Afsnit* meddeler jeg mine Undersøgelser over Brintens Affinitet til *Ilt* i Vandet og til Svovl i Svovlbrinten, SH^2. Den første af disse Størrelser har jeg bestemt directe ved Forbrændingen af Ilt i Brint, den anden indirecte ved Indvirkning af Jod paa Svovlbrinte. Svovlbrintens Absorptionsvarme har jeg allerede tidligere meddeelt i Afsnittet om denne Syres Neutralisationsforhold.

I *det 3die Afsnit* meddeler jeg mine Undersøgelser over Affiniteten imellem Brint og *Qvælstof*. Som bekjendt kan Forbindelsen ikke dannes directe, og jeg har derfor benyttet Chlorets Indvirkning paa Ammoniakvand som Udgangspunct for Undersøgelsen.

Derved bliver det imidlertid nodvendigt tillige at kjende Ammoniakluftens Absorptionsvarme. — Det havde været mit Ønske tillige at komme til at bestemme Affiniteten imellem Phosphor og Brint; men endskjøndt Kjendskab til denne Størrelse kunde være interessant, er dens Bestemmelse dog mindre paatrængende, fordi der kun haves en mindre udstrakt Brug for samme, og jeg har af den Grund udsat denne vanskelige Bestemmelse til en anden Gang.

I *det 4de Afsnit* har jeg undersøgt Brintens Affinitet til Kulstof i de tre vigtigste Kulbrintearter: *let Kulbrinte*, *Æthylen* og *Acetylen*. De ældre Forsøg over Varmeudviklingen ved Forbrænding af de tvende førstnævnte Luftarter stemme i det Hele ret godt indbyrdes, og jeg henvendte derfor særligt min Opmærksomhed paa Acetylen (C^2H^2), over hvilken Kulbrinte endnu ingen Forsog vare anstillede. Men for dog at kunne controllere de ældre Bestemmelser af Forbrændingsvarmen for de tvende andre Kulbrinter, og for at have Sikkerhed for, at min Bestemmelse af Acetylenets Forbrændingsvarme kunde sammenstilles med hine, har jeg tillige undersøgt Forbrændingsvarmen for Æthylen. Af Kulbrintearternes Forbrændingsvarme afledes Affiniteten imellem Kul og Brint, idet man drager hiin Størrelse fra Summen af Brintens og Kulstoffets Forbrændingsvarme; den første af disse Størrelser har jeg selv bestemt, for den anden har jeg benyttet de ældre Bestemmelser.

Som det vil fremgaae af denne korte Oversigt, har Bestemmelsen af Affiniteten imellem Chlor og Brint en Indflydelse paa Beregningen af Affiniteten imellem Brint og Brom, Jod, Svovl og Qvælstof.

I *det 5te Afsnit* har jeg endeligt sammenstillet mine Resultater og dertil knyttet nogle almindelige Bemærkninger om Brintens Affinitet til Metalloiderne.

A. Dannelsen af Chlor-, Brom- og Jodbrintesyre.

1.

Chlorbrintesyre. Da Brintens Affinitet til Chlor er en af Thermochemiens Fundamentalstørrelser, har jeg anvendt særlig Omhu for at faae den bestemt med den størst mulige Nøiagtighed. Et stort Antal chemiske Processer kunne nemlig kun beregnes ved Hjælp af denne Størrelse, og en Feil i dens Bestemmelse vilde derfor influere paa en stor Mængde andre Bestemmelser.

Fra Theoriens Side er denne Bestemmelse meget simpel, idet Chlor og Brint med Lethed forene sig directe med hinanden til Chlorbrinte, og det er saaledes kun nødvendigt at maale den Varmeudvikling, som ledsager denne Proces; i praktisk Henseende er den derimod forbundet med betydelige Vanskeligheder.

I de Forsøg, som *Favre & Silbermann* have anstillet for at bestemme denne Størrelse, og sandsynligviis ogsaa i *Abrias* Forsøg, opsamledes Chloret over Vand; denne Fremgangsmaade forekom mig mindre nøiagtig, fordi Vandet som bekjendt decomponeres af Chlor, navnligt i Dagslyset, hvorved Chlorluften kommer til at indeholde Ilt eller vel snarere Chlorundersyrling. Men Tilstedeværelsen af Ilt i Chlorluften maa absolut undgaaes, fordi selv en ringe Mængde Ilt vilde forhøie Resultatet meget betydeligt; thi den ved Iltens Forbrænding udviklede Varme adderer sig til Resultatet uden at forøge Vægten af Productet, der bestemmes som Chlorbrinte, saa at en Indblanding af 1 Procent Ilt i Chlorluften forøger Resultatet med 3—4 Procent, og endnu større bliver Feilen, naar Chloret indeholder Chlorundersyrling.

I mine Forsøg blev Chloret opsamlet og opbevaret over concentreret Svovlsyre. Det hertil anvendte Apparat er temmelig sammensat, fordi det er nødvendigt med Lethed at kunne fylde Luftbeholderne med reent Chlor og senere at kunne iværksætte Chlorets

Udstromning paa en fuldkomment regelmæssig Maade og med den Hastighed, som bestemmes for Forsogets Begyndelse. Hvorledes denne Opgave er lost paa en fuldkomment tilfredsstillende Maade, vil sees af den vedfoiede Tegning, der viser hele det til Bestemmelsen af Chlorets Forbrændingsvarme i Brint anvendte Apparat.

2.

Apparatet bestaaer af 3 Hoveddele: *a*) Chlorbeholderen med tilhørende Udviklings- og Reguleringsapparat; *b*) Brintudviklingsapparatet og *c*) Calorimetret med et Apparat, hvori den dannede Chlorbrinte absorberes.

a. Chlorbeholderen bestaaer af de to Glasbeholdere *I* og *K*, som rumme omtrent 8 Litre hver. Gjennem Kautschukpropperne, der have tre Gjennemboringer hver, gaaer et dobbeltboiet Glasrør *ik* af 1 Centimeters indvendigt Tvermaal ned til Bunden i begge Beholdere. Gjennem dette Rør bevæger sig den Svovlsyre, der findes i de to Beholdere, fra den ene til den anden. Af Rørene 9 og 10, der staae i Forbindelse med den nederste Beholder, fører det første til Calorimetret, det sidste til Chlorudviklingsapparatet; begge kunne de lukkes med Glashaner. Den overste Beholder *K* har ligeledes to Rør, af hvilke det ene, der kan lukkes med Hanen 12, staaer i Forbindelse med en Bunsensk Aspirator, medens det andet fører til Reguleringsapparatet.

Chlorudviklingsapparatet bestaaer af en Kolbe, *P*, og 5 Cylinderglas til Chlorets Rensning; det forste af disse er fyldt med concentreret Saltsyre, de næste 3 med Vand og det 5te med concentreret Svovlsyre. Mellem dette sidste og Hanen 10 er der anbragt en Tregangshane 11, hvis ene Aabning staaer i Forbindelse med Glasrøret *g*, der gaaer ud gjennem en Aabning i et af Arbeidsværelsets Vinduer.

Fyldningen af Beholderen I med Chlorluft skeer paa følgende Maade. Hanen 11 stilles saaledes, at der er Forbindelse mellem den ydre Luft og Udviklingsapparatet; Chlorets Udvikling fortsættes nu saalænge, indtil det *fuldstændigt* absorberes af Natronlud. Derefter tilveiebringes ved en Dreining af Hanen 11 Forbindelsen med Beholderen *I*. Denne Beholder er fyldt med Svovlsyre indtil 1 Centimeter fra Proppen, og ved Lukning af Hanerne 12, 13 og 14 forhindrer man, at der løber mere Svovlsyre til fra Beholderen *K*. Man aabner Hanerne 8, 9 og 10, og Chlorluften strømmer da fra Udviklingsapparatet gjennem Hanerne 9 og 10, af hvilke den sidste er en Tregangshane, hvis ene Aabning fører ud gjennem Vinduet. Naar Luften i Beholderen *I* er fuldstændigt fortrængt af Chloret, lukker man Hanen 9 og aabner Hanen 12, der staaer i Forbindelse med Aspiratoren. Ved dennes Hjælp suges Svovlsyren nu efterhaanden fra Beholderen *I* op i *K*, idet den giver Plads for Chlorluften, der stadigt udvikler sig. Hanerne 12 og 10 reguleres saaledes, at Beholderen *I*'s Tømning holder Skridt med Chorudviklingen, saa at der i Kolben *P* stedse er et positivt Tryk. Hanen 15 gjør det muligt ved tilstødende Uheld at

kunne lukke for Kolben. Naar man til Udviklingen anvender den bekjendte Blanding af 8 Dele Kogsalt, 6 Dele Bruunsteen, 14 Dele Svovlsyre og 7 Dele Vand, idet man deler Udviklingen i to Afsnit og kun benytter Halvdelen af Syreblandingen hver Gang, er Udviklingen saa regelmæssig, at Apparatet, eengang indstillet, næsten ikke trænger til nogen yderligere Regulering. Jeg havde valgt Kolbens Størrelse saaledes, at Halvdelen af Syremængden var tilstrækkelig til en enkelt Fyldning af Beholderen. Naar Beholderen I er fyldt saavidt med Chlor, at Svovlsyren netop endnu lukker for det store Hævertrør, dreies Hanen 11 saaledes, at Resten af den udviklede Chlormængde ledes ud gjennem Vinduet.

Chlorets Udstrømning fra Beholderen I til Calorimetret bevirkes selvfølgeligt derved, at Svovlsyren løber tilbage fra Beholderen K gjennem Hævertrøret ik til Beholderen I. Men da man kun kan opnaae et nøjagtigt Resultat, forsaavidt Chloret strømmer til Calorimetret med en constant fra Begyndelsen af reguleret Hastighed, maa der træffes særegne Forholdsregler.

Reguleringsapparatet for Chlorluftens Udstrømning er i Tavlen betegnet med L, M og N og virker paa følgende Maade. Røret l gaaer til Bunden af K; da Hanen 12 er lukket, medens Svovlsyren løber ud af K, maa den Luft, der skal tage Syrens Plads, gaae gjennem Røret l. Derved holdes den Forandring, som Hævertrøret iks Trykhøjde lider ved Forandringen af Syrens Niveau i K, i Ligevægt. Men nu forandres ved Syrens Bevægelse ogsaa dens Niveau i I, og Hævertrørets Trykhøide vilde derved undergaae en Forandring, saafremt der ikke var truffet yderligere Forholdsregler. Da Beholderne I og K have samme Diameter, forandres Syrens Stand lige meget i dem begge; for at opnaae en fuldstændig Regulering er det derfor nødvendigt at formindske Modstanden, som den til Beholderen K strømmende Luft har at overvinde, i samme Forhold, som Syrens Overflade i I stiger, eller, hvad der er det Samme, som den synker i K. Dette opnaaes nu ved Hjælp af Beholderne L, M og N, som alle deelviis ere fyldte med concentreret Svovlsyre. Den Luft, der strømmer ind i K, passerer Røret m, overvinder Syrens Tryk i M, gaaer dernæst gjennem Røret med den aabne Hane 13, overvinder saa Svovlsyrens Tryk i L, hvorfra den endeligt gjennem Røret l træder ind i Beholderen K som Erstatning for den udløbende Svovlsyre. Beholderne L og N ere endvidere forbundne ved en Hævert, idet Røret n gaaer til Bunden af dem begge. En fuldkomment constant Udstrømning af Chlorluften vil nu opnaaes, naar Syrens Overflade i Beholderne K og L holdes i samme Niveau, thi da forandres det Tryk, som den indstrømmende Luft har at overvinde, med den dobbelte Størrelse af Niveauforandringen i K eller netop lige saa meget, som Trykhøiden i Hæverten i forandrer sig; dette opnaaes nu derved, at Røret 14, der fører til Beholderen N, er sat i Forbindelse med Aspiratoren; ved en passende Aabning af Hanen 14 føres nu Syren fra L til N i samme Forhold, som den løber fra K til I, saaat Syren kommer til at staae lige høit i K og L; saalænge dette er Tilfældet, vil Chlorluften strømme med fuldkomment constant

Hastighed fra Beholderen *I* til Calorimetret. Men for at *man kan forandre selve denne Hastighed* er Røret *m* forskydeligt; jo dybere det gaaer ned i Syren i *M*, desto større er Luftens Modtryk og desto mindre bliver Chlorets Udstrømningshastighed; men saa længe Røret *m* beholder samme Stilling, er Udstrømningshastigheden fuldstændigt constant.

b. Brintudviklingsapparatet er i Tavlen betegnet med *A*, *B*, *C*, *D*, *E* og *F*. Jeg har allerede tidligere beskrevet dette Apparat (5te Række, Bd. 9 p. 239); det giver en Strøm af reen Brint med en *constant Hastighed, der kan reguleres*; denne afhænger nemlig af det Tryk, hvormed Brinten forlader Apparatet, og bestemmes ved Vandstanden i Beholderen *E*. Tilløbet af Syre fra *A* reguleres nemlig saaledes, at der altid strømmer en ringe Mængde Brint ud af Mundingen af det Rør, som er anbragt i *E*. For at Hastigheden kan maales, dreier man Tregangshanen 7 saaledes, at den udviklede Brint kan opfanges og maales over Vand, og man dreier dernæst Hanen 6 saaledes, at den ønskede Brintmængde i Minutet udvikler sig, naar der samtidigt undviger et lille Overskud gjennem det Rør, der er anbragt i Beholderen *E*. Ved et System af Rør med Kalihydrat og Chlorcalcium, *F*, tørres Brinten, inden den ledes ind i Calorimetret.

c. Calorimetret. Calorimetrets Forbrændingsrum er en Platinkugle af omtrent ½ Litres Indhold. Forneden i denne udmunde 3 Rør, af hvilke det ene staaer i Forbindelse med Chlorbeholderen, det andet med Brintapparatet og det tredie med Absorptionsapparatet for den dannede Chlorbrintesyre. Det første Rør udmunder omtrent i Kuglens Centrum i et Rør, der er dannet af meget tyndt Platinblik og indsmeltet i Glasrøret og tjener som Brænder for Chlorluften. De to Rør, som føre Chlor og Brint til Calorimetret, ere omgivne af et opad aabent, af 1/20 Millimeter tykt Platinblik dannet, Rør af omtrent 2 Centimetres Tvermaal. Det til Chlorbrinten bestemte Afledningsrør er dannet af Platinblik af samme Tykkelse, og har en Lysning af omtrent 6 Millimetre.

Chlorets Antændelse i Brinten skeer ved en Inductionsgnist; Ledningen tilveiebringes ved tynde Platintraade, der føre gjennem to af de tre nævnte Rør til det Indre af Forbrændingsrummet og lade en Inductionsgnist springe over ved Chlorledningsrørets Platinmunding.

Absorptionsapparatet for den dannede Chlorbrinte er betegnet ved *H*; de to første Beholdere indeholde kun destilleret Vand, den tredie er fyldt med smaaklippet udvasket svensk Filtrerepapir, der er vædet med Vand og tjener til at optage den sidste Rest af Chlorbrinten.

Den øvrige Indretning er den af mig sædvanligt anvendte. Platinkuglen befinder sig i en Beholder, som rummer 3000 Gram Vand og er stillet midt i Calorimetrets dobbelte Hylster. En Røreindretning, som holdes i regelmæssig Bevægelse ved en elektromagnetisk Maskine, tilveiebringer en eensformig Temperatur i Vandet. Temperaturstigningen aflæses

som sædvanligt med Kikkert; for ikke at complicere Tegningen for meget har jeg ikke angivet Thermometrene i Vandbeholderen og Calorimetrets Hylster.

Forsøget anstilles nu paa følgende Maade. Beholderen I er paa den angivne Maade fyldt med Chlor; Hanerne 9, 10, 12 og 14 ere lukkede, Hanen 13 aaben; Røret m har den Stilling, som passer til den ønskede Hastighed af Chlorstrømmen. Calorimetrets Platinkugle og Absorptionsapparaterne fyldes med Brint, og tilsidst stilles Hanen 8 saaledes, at den Luft, der befinder sig i Røret g, ligeledes erstattes af Brint og ledes ud gjennem Vinduet. Derefter dreies Hanen 8 saaledes, at Røret h har Forbindelse med det lange Afledningsrør, og Hanen 9 aabnes; Luften i Røret h uddrives da af Chloret. Naar Alt er forberedt og Thermometrene aflæste, lukker man Hanen 7; man lader Inductionsgnisten slaae over gjennem Calorimetret, aabner lidt efter lidt Hanen 8 for Forbindelsen mellem g og h, hvorved Chlorstrømmen kommer ind i Calorimetret og antændes der; slutteligt aabner man paany Hanen 7 for Brinten og lader nu Chlorets Forbrænding finde Sted saalænge, indtil Temperaturstigningen har naaet den ønskede Høide. Da afbryder man Chlorstrømmen, men Brinten lader man strømme igjennem saalænge, indtil al Chlorbrinte er uddrevet af Platinkuglen.

Den dannede Chlorbrintesyre bringes ved Absorptionsapparatets Tømning og gjentagne Udskylling med Vand op til en vilkaarlig Vægt. Af denne vandige, godt blandede Opløsning afveies en vilkaarligt valgt Mængde, og dens Chlorbrintemængde bestemmes; jeg bestemmer nemlig, hvor stor en *Vægt* af min Normal-Barytopløsning der udfordres til at neutralisere den *Vægt* Chlorbrintesyre, som er taget ud til Analyse. Som Control blev Chlorbrintesyren ogsaa fældet med Sølvsalt og Chlorsølvet veiet. Men Neutralisationsmethoden maa i ethvert Tilfælde foretrækkes, om end Differensen mellem de to Methoder kun er henved 2 Promille; thi ved Neutralisationen er man ganske uafhængig af Chlorets Atomvægt. Min normale Barytopløsnings Æqvivalent støtter sig nemlig kun paa Molecultallene for Sølvnitratet og for Kogsalt. Vælge vi nu til Iltens Atom Tallet 16, bliver efter Stas's Atomtal Sølvnitratets Molecultal 169,974, medens de almindelige runde Tal give 170,0, hvilket kun giver en Forskjel af $^1/_{7000}$; Chlornatriums Molecul er efter Stas 58,500, altsaa nøiagtigt samme Størrelse, som de afrundede Atomtal give. Til Bestemmelsen af mine Normalopløsninger benyttede jeg nu følgende Fremgangsmaade: 30,488 Gram smeltet reent Sølvnitrat opløstes i 1793,4 Gram destilleret Vand; denne Opløsnings Æqvivalent er efter de afrundede Tal 10170 Gram, efter Stas's Tal 10168. Til Control blev denne Opløsning anvendt til Fældning af Chlornatrium; men da et lidet Overskud af Sølvopløsningen er nødvendigt, naar man vil benytte chromsuurt Kali som Indicator, bestemte jeg Sølvopløsningens Æqvivalent for Anvendelsen af denne Indicator; i to Forsøg fordrede 0,1995 og 0,3961 Gram smeltet Chlornatrium til Fældning henholdsviis 34,74 og 68,94 Gram af Sølvopløsningen, for at der kunde indtræde en meget svag Farvning. Til en nøiagtig Udfældning

behoves nogen Tid, idet den forst opstaaende Farvning efter nogle Minuters Forløb igjen forsvinder og Fældningen først er fuldstændig, naar Farven holder sig constant. Sølvopløsningens praktiske Æqvivalent beregnes heraf til 10187 og 10182, i Gjennemsnit til 10184,5, efter Stas's Tal til 10183,5 eller næsten det samme Tal. En Chlorbrintesyre af vilkaarlig Styrke blev nu titreret med Sølvoplosning, efterat den først var nøiagtigt neutraliseret med en titreret Natronoplosning. Chlorbrintesyrens Æqvivalent var constant = 3127 Gram. Ved Neutralisation af denne Chlorbrintesyre med en Barytopløsning blev denne sidstes Æqvivalent bestemt; det beløb sig constant til 3906,5 Gram. Som Control blev en afveiet Mængde af Barytopløsningen neutraliseret med reen Svovlsyre, afdampet og glødet. Af den dannede Sulphatmængde beregnedes Opløsningens Æqvivalent til 3907 Gram, og denne Størrelse har jeg antaget som Barytopløsningens Æqvivalent.

Naar den i Calorimetret dannede Chlorbrintesyre titreres paa Vægten med denne Barytoplosning, finder man Chlorbrintesyrens Mængde efter Æqvivalenter, uafhængigt af Chlorets Atomtal, og ved Multiplication med 36,5 eller 36,459 faaer man Chlorbrintens Vægt henholdsviis efter Chlorets to Atomtal.

3.

I de nedenfor anførte Tabeller ere Forsøgenes Enkeltheder opførte. Jeg betegner ved

Nr. Forsøgets fortløbende Numer;
T Luftens Varmegrad;
t_α Calorimetrets Varmegrad ved Forsøgets Begyndelse;
t_β den iagttagne Varmegrad ved Forsøgets Slutning;
t_b den af Afkjølingen beregnede Slutningsvarmegrad;
δ Varmestigningen $(t_b - t_a)$ under Forsøget;
S Vægten af den dannede Chlorbrintesyre;
s Vægten af den til Analysen anvendte Syremængde;
b Vægten af den Mængde Barytopløsning, der udfordres til Neutralisation af s;
x Vægten af den dannede Chlorbrinteluft for $HCl = 36{,}459$;
x^1 Vægten af Chlorbrinteluften for $HCl = 36{,}5$;
R Resultatet for 1 Molecul Chlorbrinte.

Calorimetrets Vandværdi var 59,7 Gram, Vandmængden 2400 Gram; Calorimetrets samlede calorimetriske Æqvivalent bliver altsaa 2460 Gram. Man har da

$$x = \frac{S}{s} \cdot \frac{b}{3907} \cdot 36{,}459$$

$$x^1 = \frac{S}{s} \cdot \frac{b}{3907} \cdot 36{,}5$$

$$R = \delta \cdot 2460 \cdot \frac{s}{S} \cdot \frac{3907}{b}.$$

Da Varmegradens Stigning i Calorimetret nøiagtigt er proportional med Tiden, og Luftens Varmegrad ligger midt imellem Grændsetemperaturerne, behøves ingen Correction for Luftens Indflydelse. Slutningsvarmegraden t_b er paa sædvanlig Maade beregnet af Afkjølingen; Correctionerne vare her kun 0°,005 til 0°,009:

(H, Cl).

Nr.	483	484	485	486
T	19°,0	19°,0	19°,4	19°,0
t_a	17,735	17,390	17,850	17,025
t_β	20,935	20,690	20,766	20,650
t_b	20,940	20,699	20,773	20,655
δ	3°,205	3°,309	2°,923	3°,630
S	600,6 Gr.	600,4 Gr.	600,05 Gr.	600,67 Gr.
s	29,92	30,50	29,72	30,27
b	69,83	73,375	63,24	79,89
x	13,080	13,479	11,914	14,792
x^1	13,095	13,494	11,928	14,810
R	21975^c	22018^c	22003^c	22008^c

Den dannede Chlorbrinte udgjør i disse Forsøg 12—15 Gram eller omtrent $^1/_3$ Æqvivalent. Middeltallet af de 4 Forsøg bliver

$$(H, Cl) = 22001^c$$

eller i Ord: *Affiniteten imellem Chlor og Brint i luftformig Chlorbrinte svarer til* 22001^c.

Hvorledes dette Tal afviger betydeligt fra den hidtil antagne Størrelse, skal jeg nedenfor nærmere paavise.

4.

Varmeudviklingen ved Chlorbrintens Absorption i Vand bestemte jeg ved at lede tør Chlorbrinteluft i Vand. Absorptionsapparatet var en Glaskugle med en Vandmængde af 430 Gram; Calorimetrets Vandværdi var 13,9 Gram, saaat det fyldte Calorimeters hele Vandværdi var 443,9 Gram. Mængden af absorberet Chlorbrinte bestemtes ved Titrering af en afveiet Mængde af Syren med en Natronopløsning, hvis Æqvivalent var 990,7 Gram.

I de nedenfor opførte detaillerede Angivelser forstaaes ved T, t_a, t_b, δ, x og R de samme Størrelser som tidligere; endvidere er

s Vægten af den til Titrering anvendte Syre;
n — - den til Mætning fornødne Natronmængde;

N Natronopløsningens Æqvivalent (990,6 Gram);

a Vandets Vægt (430 Gram);

p Calorimetrets Vandværdi (13,9 Gram).

Mængden x af absorberet Chlorbrinteluft findes paa følgende Maade. Da Vædskens Vægt efter Absorptionen er $a + x$, faaer man

$$\frac{n\,(a + x)}{N\,.\,s}\,HCl = x,$$

altsaa

$$x = \frac{n\,.\,a\,.\,HCl}{N\,.\,s - HCl\,.\,n}$$

og Varmeudviklingen ved Absorption af 1 Æqvivalent Chlorbrinte bliver da

$$R = \delta\,\frac{a + p}{a}\left(\frac{N\,.\,s}{n} - HCl\right).$$

Om man i denne Formel sætter HCl liig 36,5 eller 36,459, er uden Indflydelse paa Resultatet, da Værdien af $\frac{Ns}{n}$ er omtrent 20000 Gange saa stor som Differensen mellem de to Tal. Forsøgenes Enkeltheder ere følgende:

(HCl, Aq).

Nr.	487	488	489
T	19°,0	20°,0	19°,7
t_a	17,910	18,350	18,523
t_b	20,270	21,722	21,060
δ	2,360	3,372	2,537
s	72,82 Gr.	51,82 Gr.	69,30 Gr.
n	10,12 Gr.	10,22 Gr.	10,33 Gr.
x	2,210 Gr.	3,145 Gr.	2,372 Gr.
R	17279^c	17351^c	17311^c

Middeltallet af disse tre Forsøg er

$$(HCl,\ Aq) = 17314^c.$$

Lægges denne Størrelse til den ovenfor fundne, seer man, at den vandige Chlorbrintesyre dannes af Chlor, Brint og Vand under en Varmeudvikling af

$$(H,\ Cl,\ Aq) = 39315^c,$$

en Størrelse, der gjælder for en Syre, som indeholder omtrent 400 Moleculer Vand for hvert Molecul Chlorbrinte.

Sammenligner man nu de ovenfor bestemte Størrelser med de forlængst bekjendte Bestemmelser af *Favre & Silbermann* og *Abria*, viser der sig følgende Differenser:

	Thomsen.	Favre & Silbermann.		Abria.
		a	*b*	
(H, Cl)	22001^c	23783	23783^c	24010^c
(HCl, Aq)	17314	16411	17479	14310
$(H, Cl, Aq$	39315	40194	41262	38560

Den med *a* betegnede Spalte indeholder Tallene, saaledes som de meddeltes af Favre & Silbermann i 1853; Spalten *b* indeholder derimod de Talstørrelser, som Favre i 1868 anseer som de rette, efterat han har bestemt Absorptionsvarmen til 17479^c, en Størrelse, som stemmer ret godt med det af mig fundne Tal 17314^c; *derimod falder min Bestemmelse af Chlorets Affinitet til Brint i tør, luftformig Tilstand betydeligt lavere end de ældre Bestemmelser*, nemlig 1782^c lavere end det af Favre & Silbermann bestemte Tal, som hidtil næsten udelukkende er benyttet. Det er utvivlsomt, at her foreligger en Vildfarelse, og sandsynligviis er Aarsagen den, at Favre & Silbermann have arbeidet med ureent, d. e. iltholdigt, Chlor, idet disse Experimentatorer opbevarede Chloret over en Kogsaltopløsning. At Chloret selv i Mørke efterhaanden decomponerer Vandet, kan næppe betvivles, og paa denne Maade blandes det med Ilt eller sandsynligere med Chlorundersyrling. Hvorledes *Abrias* Forsøg ere anstillede, er ikke bekjendt; sandsynligviis har han ligesom Favre & Silbermann opsamlet Chloret over Vand. I ethvert Tilfælde ere hans Forsøg unøiagtige; thi han har bestemt alle 3 Størrelser directe, og Summen af de to første Størrelser er liig med den sidste Størrelse, saaledes som det maa være, men ikke destomindre er der i den anden Størrelse en Feil af 3000^c.

5.

Brombrinte. For at bestemme Affiniteten i Brombrinte decomponerede jeg Bromkalium i vandig Opløsning med Chlor. Opløsningens Concentration var $KBr + 200\ H_2O$, saa at den hele Mængde af det ved Chloret uddrevne Brom holdt sig opløst i Vandet. Mængden af decomponeret Bromkalium bestemtes paa følgende Maade: en bestemt Vægt af den deelviis decomponerede Opløsning, som altsaa indeholdt Chlorkalium, Bromkalium og frit Brom, blev inddampet, hvorved det sidste forflygtigedes. Derefter fældedes Opløsningen med Sølvnitrat, og Sølvbundfaldets Vægt bestemtes.

Sættes $KBr + 200\ H_2O = A = 3719$ Gr., da er Vægten af den decomponerede Vædske $A + x\ Cl$, idet der er tilkommet x Æqvivalenter Chlor. Naar nu b Gram af

Vædsken giver β Gram Sølvbundfald, da svarer til hele Vædskemængden $(A + xCl)\,\frac{\beta}{b}$ Gram Sølvbundfald. Men da det frie Brom før Bundfældningen er fjernet af Vædsken, bestaaer Bundfaldet af

$$x\ AgCl + (1 - x)\ AgBr = AgBr - x\ (Br - Cl);$$

altsaa er

$$AgBr - x\ (Br - Cl) = (A + xCl)\,\frac{\beta}{b}$$

og

$$x = \frac{AgBr - A\,\frac{\beta}{b}}{Cl\,\frac{\beta}{b} - (Br - Cl)}$$

Forsøgenes Enkeltheder ere følgende:

$(KBr\ Aq,\ Cl)$.

Nr.	490	491	492
T	18°,6	16°,9	18°,7
t_a	16°,940	15°,585	17,840
t_b	20,022	18°,662	19,820
δ	3,082	3,077	1,975
b	105Gr.,96	127Gr.,80	199Gr.,28
β	4,087	4,915	8,538
x	0,9688	0,9782	0,6203

Ifølge mine Undersøgelser over Varmefylden (Videnskabernes Selskabs Skrifter 9de Bind pag. 232) er den caloriske Værdi af Opløsningen A, hvis Vægt er 3719, kun 3565 Gram; den caloriske Værdi af det udskilte Brom udgjør i Forsøgene 490—491 omtrent 8 Gram, i det sidste Forsøg 6 Gram. Vandværdien af Calorimetret er 48 Gram, og i alt bliver saaledes den Masse, som skal opvarmes, liig henholdsviis

$$A'' = 3621 \text{ Gr. og } 3619 \text{ Gr.},$$

og den til den fuldstændige Reaction svarende Varmeudvikling bliver

$$R = \frac{A''\,\delta}{x}$$

eller for de 3 Forsøg

$$(KBr\ Aq,\ Cl) = \left.\begin{array}{r} 11519^c \\ 11391 \\ 11523 \end{array}\right\}\ \text{Middeltal } 11478^c.$$

Da Bromet ved Decompositionen af disse Bromkaliumoplosninger bliver i Vædsken og ikke udskiller sig, er Reactionen sammensat af følgende Led (idet jeg ved $\overline{K}$ betegner KOH).

$$(KBr\,Aq,\ Cl) = \begin{cases} (Cl,\ H,\ Aq) - (Br\,Aq,\ H) \\ + (\overline{K}Aq,\ HCl\,Aq) - (\overline{K}Aq,\ HBr\,Aq). \end{cases}$$

Heraf følger nu Værdien af $(Br\,Aq,\ H)$, idet de øvrige Led af Ligningen ere bekjendte fra mine tidligere Undersøgelser

$$(Br\,Aq,\ H) = 39315^c + 13740^c - 13750^c - 11478^c$$

$$(Br\,Aq,\ H) = 27837^c,$$

d. e. *naar Bromvand forener sig med Brint og danner en vandig Opløsning af Brombrinte, er Varmeudviklingen pr. Molecul* 27837^c.

Forat Brombrintesyrens Dannelse kan føres tilbage til de frie Grundstoffer, er det nødvendigt at kjende Varmetoningen ved Oplosningen af Brom i Vand eller rigtigere i en vandig Oplosning af Chlorkalium.

Skjøndt Bromet opløser sig noget langsomt i Vand, kan man dog ved hensigtsmæssig Omrøring i Løbet af nogle Minuter skaffe sig en stærk Opløsning. Det hertil anvendte Calorimeter var en Platinkolbe af $1^1/_2$ Litres Indhold med den fornødne Indretning til at blande Bromet med Vandet, hvis Mængde udgjorde 1400 Gram. Mængden af opløst Brom bestemtes ved Titrering af en Deel af det dannede Bromvand, hvortil var sat Jodkalium. Da den hele Temperaturstigning kun udgjør omtrent $0^\circ,1$, kan man ikke opnaae stor procentisk Nøiagtighed; men da Tallet selv er meget lille, har den procentiske Usikkerhed her mindre at sige.

$(Br,\ Aq)$.

Nr.	493	494	495
T	$20^\circ,4$	19,3	19,0
t_a	20,375	19,230	18,823
t_b	20,435	19,325	18,938
δ	0,060	0,095	$0^\circ,115$
b	18,93	19,62	19,43 Gr.
β	72,25	90,10	127,91 Gr.
Aq	7860	6531	4569 Gr.
R	468^c	620^c	528^c

Ved b betegnes Vægten af det til Undersøgelsen anvendte Bromvand; β er Vægten af Opløsningen af svovlundersyrligt Natron, hvoraf 30000 Gram svarer til et Æqvivalent

Jod (Brom); $\AE q$ betegner Vægten af det Bromvand, som indeholder 1 Æqvivalent Brom, og R betegner Resultatet.

Idet $$R = \delta \, . \, \AE q,$$

bliver i Gjennemsnit $$(Br,\ Aq) = 539^c.$$

Man har saaledes

$$(Br,\ H,\ Aq) = (Br,\ Aq) + (Br\,Aq,\ H)$$
$$(Br,\ H,\ Aq) = 28376^c.$$

6.

Jodbrinte. Bestemmelsen af Affiniteten i Jodbrinten har jeg gjennemført paa samme Maade som for Brombrintens Vedkommende. Men da det ved Jodkaliums Decomposition med Chlor uddrevne Jod kun for en Deel bliver i Opløsning, udfordres her en særlig Bestemmelse.

Lad A betegne Vægten af den Opløsning af Jodkalium, indeholdende et Æqvivalent, som skal decomponeres af Chlor, altsaa $A = KJ + 400\,H_2O$. Lad endvidere x Moleculer Jodkalium være decomponeret af Chlor og af de tilsvarende x Atomer Jod y Atomer være forblevne i Opløsningen, medens Resten er udskilt. Opløsningens Vægt efter Decompositionen bliver da

$$A' = A + x\,(Cl - J) + yJ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Størrelsen y bestemmes ved Opløsningens Titrering med svovlundersyrligt Natron, idet a Gram af Opløsningen affarver α Gram svovlundersyrligt Natron. Min Opløsnings Styrke var saadan, at 30000 Gram svarede til 127 Gram Jod. Saaledes bliver

$$y = \frac{\alpha\, A'}{a\, 30000} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

En Vægt b af Opløsningen A' affarves med Svovlsyrling og fældes dernæst med Sølvnitrat; lad Vægten af det fældede Chlor- og Jodsølv være β. For hele Opløsningen vilde Bundfaldets Vægt være $\frac{\beta}{b} A'$, og dette Bundfalds Sammensætning bliver saaledes

$$\frac{\beta}{b} A' = AgJ - x\,(J - Cl) + y\,AgJ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Indsættes i denne Ligning Udtrykket for A' efter (1), bliver x eller Decompositionens Omfang

$$x = \frac{(1 + y)\,AgJ - \frac{\beta}{b}\,(A + yJ)}{\left(1 - \frac{\beta}{b}\right)(J - Cl)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Da nu x er en lille Størrelse i Sammenligning med A, og da A og A^1 kun af-

vige lidt fra hinanden, er det hensigtsmæssigt for ikke at complicere Beregningen altfor meget, at benytte den approximative Værdi for

$$y = \frac{\alpha\, A}{30000\, a - \alpha J},$$

hvilket bliver uden kjendelig Indflydelse paa Resultatet.

Forsøgenes Enkeltheder ere følgende. Opløsningens Sammensætning var $KJ + 400\, H_2O$. Til hvert Forsøg anvendtes $^1/_6$ af den Vægt, som svarer til denne Formel. A er altsaa liig 7366 Gram.

$(JKAq,\ Cl)$.

Nr.	496	497	498
T	19°,4	18°,8	18°,2
t_a	17°,817	17°,212	17°,295
t_b	21°,175	20°,190	20°,900
δ	3°,358	2°,978	3°,605
a	68,08 Gr.	75,56	73,82
α	18,33 Gr.	51,77	21,60
b	100,61 Gr.	98,95	96,74
β	2,283 Gr.	2,688	2, 1
y	0,066	0,169	0,72
x	0,9291	0,8292	1,0072

Decompositionens Omfang x er i de to første Forsøg henholdsviis 0,9291 og 0,8292 Æqvivalent; i det sidste Forsøg er derimod Decompositionen fuldstændig og et lille Overskud af Chlor tilstede. Resultatet pr. Molecul Jodkalium beregnes nu paa følgende Maade.

Den calorimetriske Værdi for Saltopløsningen $KCl + 400\, H_2O$ er efter de af mig bekjendtgjorte Varmefyldebestemmelser liig 7170 Gr. Vand; for det udskilte Jod er Vandværdien 7 Gr., og Calorimetrets Værdi for 1 Mol. Jodkalium er 96 Gr. Summen bliver da

$$A'' = 7170 + 7 + 96 = 7273 \text{ Gram},$$

og Resultatet bliver altsaa

$$R = \frac{\delta \,.\, 7273}{x},$$

idet man ved Beregningen af Forsøget Nr. 498, hvor Decompositionen er fuldstændig, istedetfor den for x fundne Værdi benytter Tallet 1. Man faaer da

$$(JKAq,\ Cl) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Nr. } 496 - 26287^c \\ \text{Nr. } 497 - 26120 \\ \text{Nr. } 498 - 26220 \end{array} \right\} \text{Middeltal } 26209^c.$$

Som det vil erindres, bliver ved Jodkaliumopløsningens Decomposition med Chlor en Deel af Jodet i Opløsningen; ved det 2det Forsøg udgjorde denne Deel $^1/_6$ Æqvivalent. Men denne Omstændighed har ingen kjendelig Indflydelse paa Varmeudviklingen, thi i flere Forsøg, hvor jeg opløste Jod i en Jodkaliumopløsning af Sammensætningen $KJ + 400\,H_2O$, kunde jeg ingen Varmetoning iagttage. Resultatet vilde altsaa være blevet ganske det samme, om hele Jodmængden havde udskilt sig af Opløsningen. Nu er

$$(KJAq,\ Cl) = \begin{cases} (\overline{K}Aq,\ HClAq) - (\overline{K}Aq,\ HJAq) \\ + (Cl, H, Aq) - (J, H, Aq) \end{cases}$$

og ifølge de paa det nævnte Sted meddelte Talstørrelser er

$$(J, H, Aq) = 13740^c - 13675^c + 39315^c - 26209^c$$
$$(J, H, Aq) = 13171^c,$$

d. e. *naar Jod, Brint og en større Vandmængde forene sig til vandig Jodbrintesyre, da er Varmeudviklingen for hvert Molecul af den dannede Syre 13171^c.*

7.

Chlor-, Brom- og Jodbrintesyres Absorptionsvarme. Forsøgene over Chlorbrintesyrens Absorptionsvarme har jeg allerede tilendebragt for omtrent 3 Aar siden, medens jeg først for omtrent $^1/_2$ Aar siden har anstillet Forsøgene med de to andre Syrer; Apparaterne have derfor ved de sidstnævnte Undersøgelser faaet en noget forskjellig Construction.

Af de ovenfor meddelte Forsøg Nr. 487—489 over Chlorbrintesyrens Absorptionsvarme findes

$$(HCl,\ Aq) = 17314^c.$$

I denne Beregning er den calorimetriske Værdi for den dannede vandige Opløsning af Syren sat liig med det i Syreopløsningen indeholdte Vand. Men dette er efter mine senere Undersøgelser over vandige Opløsningers Varmefylde ikke ganske correct; Opløsningens caloriske Æqvivalent er noget mindre end det deri indeholdte Vand (Vidensk. Selsk. Skrifter 9de Bind p. 233). Men da Vædsken for hvert Molecul Syre, HCl, indeholder omtrent 300—380 Moleculer Vand, H_2O, vilde Correctionen kun beløbe sig til $^1/_2$ Procent, og jeg er derfor tilbøielig til her at lade denne Correction falde bort, tilmed da dette Tal allerede tidligere er anvendt til Beregningen af andre chemiske Processer, førend jeg havde anstillet mine Forsøg om Varmefylden. En Berigtigelse af dette Tal vilde nemlig let give smaa Differenser, uden at det derfor var afgjort, at Resultatet nærmede sig mere til det rette; thi, som jeg allerede oftere har omtalt, en Afvigelse af $^1/_2$ Procent er saa ringe, at den kun kan undgaaes, naar man anvender ganske særegne Forsigtighedsregler.

Ved Forsøgene med *Brombrintesyre* og *Jodbrintesyre* skete Absorptionen i en Platinkolbe, der rummede omtrent $1^1/_2$ Litre. Vandets Vægt var $a = 1200$ Gram, og Kolbens

Vandværdi, Thermometret og Platinrøreapparatet medregnede, var $p = 16$ Gram. Calorimetrets samlede Vandværdi var altsaa $a + p = 1216$ Gram. Ligesom tidligere betegner x Vægten af den absorberede Brintesyre. Forsøgenes Enkeltheder ere følgende:

(HBr, Aq).

Nr.	499	500	501
T	18°,5	18°,5	19°,5
t_a	17,065	17,000	18,113
t_b	19,190	19,675	21,010
δ	2°,125	2°,675	2°,897
x	10,407	13,206	14,451 Gr.
R	20113^c	19950^c	19745^c

Beregningen er her ligesom ovenfor gjennemført efter Formlen

$$R = (a + p)\,\delta\,\frac{81}{x},$$

idet $a + p = 1216$ Gram og 81 er Brombrintesyrens Molecul. Middeltallet af de tre Forsøg er

$$(HBr,\ Aq) = 19936^c.$$

Den til Syrens Opløsning anvendte Vandmængde udgjør i Gjennemsnit 440 Molecules pr. Molecul af Syren. —

(HJ, Aq).

Nr.	502	503	504
T	18°,3	18°,8	18°,2
t_a	17°,452	17,212	17,140
t_b	19,345	19,202	19,210
δ	1°,893	1°,990	2°,070
x	15,330	16,102	16,753 Gr.
R	19197^c	19213^c	19210^c

Beregningen skeer ogsaa her efter Formlen

$$R = 1216\,.\,\delta\,.\,\frac{127{,}85}{x},$$

og Middeltallet af de tre Forsøg er

$$(HJ,\ Aq) = 19207^c.$$

Den til Syrens Oplosning anvendte Vandmængde udgjør her omtrent 500 Moleculer pr. Molecul af Syren.

I disse Forsøg er Syreopløsningens calorimetriske Værdi sat liig med det deri indeholdte Vand. Efter mine ovennævnte Undersogelser over Oplosningers Varmefylde er dette sandsynligviis ikke ganske correct. En Oplosning, som svarer til Formlen $HCl + 400\, H_2O$, fordrer noget mindre Varme for at opvarmes 1 Grad end 7200 Gr. Vand, nemlig omtrent $^1/_2$ Procent mindre. For Brom- og Jodbrintesyre har jeg ikke gjennemført denne Undersøgelse, men disse Syrer forholde sig sandsynligviis som Chlorbrintesyren; da imidlertid den hele Correction vilde udgjøre $^1/_2$ Procent, vil jeg foretrække ikke at benytte den.

8.

Brintens Tiltrækning til Brom og Jod i de vandfrie Syrer lader sig som bekjendt beregne af de ovenfor angivne Størrelser; man har nemlig

$$(Br, H) + (Br\,H, Aq) = (Br, H, Aq).$$
$$(J, H) + (JH, Aq) = (J, H, Aq).$$

Af de fundne Talstørrelser faaer man da

$$(Br, H) = +8440^c.$$
$$(J, H) = \div 6036.$$

Affinitetens Størrelse i de tre Brintesyrer kan altsaa sammenstilles paa følgende Maade.

Thomsen.	$R = Cl.$	$R = Br.$	$R = J.$
(R, H)	22001^c	8440^c	-6036^c
(RH, Aq)	17314	19936	$+19207$
(R, H, Aq)	39315	28376	13171

Som det allerede er bekjendt af Favre & Silbermanns Undersogelser, har Brinten størst Tiltrækning til Chlor, mindre til Brom og mindst til Jod, hvor Affiniteten bliver negativ. Som jeg nedenfor skal vise, ere mine Tal for de 3 Reactioner (R, H) mindre end de nævnte Experimentatorers; Aarsagen hertil ligger hovedsageligt i Bestemmelsen af Reactionen (Cl, H), hvorpaa Bestemmelsen af de øvrige Tal støtter sig; den sandsynlige Aarsag til denne Differens har jeg allerede omtalt.

Bromets Affinitet ligger omtrent midt imellem Chlorets og Jodets; man har nemlig

$$(Cl, H) + (J, H) = 22001^c - 6036^c = 15965^c = 2 . 7982^c;$$

Bromets Affinitet er altsaa noget større end Middeltallet af de to andre Tal.

Paafaldende er det, at de tre Syrers Absorptionsvarme eller (RH, Aq) ikke er lige stor, skjøndt disse tre luftformige Syrer have stor indbyrdes Liighed; men Favre & Silbermanns ældre Undersøgelser ligesom ogsaa Berthelots vise samme Resultat og endvidere, at Virkningen er størst for Brombrintesyre, endskjøndt Differensen mellem dennes og Jodbrintesyrens Absorptionsvarme ikke er stor.

Reactionen (RH, Aq) viser noget Lignende som (R, H), idet den nemlig for (Br, H, Aq) er noget større end Gjennemsnittet af de to andre Tal; men har nemlig

$$(Cl, H, Aq) + (J, H, Aq) = 39315^c + 13171^c = 2 . 26243^c,$$

medens Reactionen for Brom udgjør 28376^c. Det er paafaldende, at Reactionen (J, H, Aq) netop udgjør en Trediedeel af (Cl, H, Aq); $\frac{1}{3}\ 39315 = 13105$, medens $(J, H, Aq) = 13171^c$.

Differenserne mellem de tre Syrer findes at være:

$$\begin{aligned}
(Cl, H) &- (Br, H) &= 13561^c \\
(Br, H) &- (J, H) &= 14476 \\
(Cl, H, Aq) &- (Br, H, Aq) &= 10939 \\
(Br, H, Aq) &- (J, H, Aq) &= 15205.
\end{aligned}$$

En tabellarisk Sammenstilling af mine Undersøgelser med de ovennævnte Experimentatorers Resultater viser Følgende:

	Thomsen.	Favre & Silbermann[1].	Favre[2].	Berthelot[3].	Abria.
(Cl, H)	22001^c	23783^c	23783^c		24010^c
(ClH, Aq)	17314	16411	17479	17430	14310
(Cl, H, Aq)	39315	40194	41262		38560
(Br, H)	8440	9320	10593		
(BrH, Aq)	19936	19084	19084	21150	
(Br, H, Aq)	28376	28404	29677		
(J, H)	−6036	−3879	−4590		
(JH, Aq)	+19207	+18906	+18906	19570	
(J, H, Aq)	13171	15004	14312		

Som bekjendt ere alle Favre & Silbermanns Forsøg, med Undtagelse af Bestemmelsen af Reactionen (Cl, H), udførte med Qviksølvcalorimetret.

---

[1]) Annales de chimie et de phys. (3) XXXIV, 357 og XXXVII, 406.
[2]) Comptes rendus LXXIII, 974.
[3]) Comptes rendus LXIX, 626.

B. Dannelsen af Vand og Svovlbrinte.

1.

Bestemmelsen af Brintens Affinitet til Ilt har jeg udført med ganske det samme Apparat, som anvendtes til Bestemmelsen af Brintens Affinitet til Chlor (see ovenfor.) Calorimetrets Platinkugle fyldes med Brint ved Hjælp af det samme Apparat, som jeg ovenfor har beskrevet; den tørre Ilt træder fra en Beholder, som jeg har beskrevet i Videnskabernes Selskabs Skrifter 9de Bind p. 233, gjennem en Brænder ind i Calorimetret, antændes der ved en Inductionsgnist og vedbliver at brænde i Brintatmosphæren. Tilstrømningen af Brint og Ilt er før Forsøgets Begyndelse reguleret saa nøiagtigt som muligt og forbliver derefter constant, saalænge Forsøget varer.

Mængden af det dannede Vand bestemtes ved Veining af Platinbeholderen med Ledningsrør og udgjorde for hvert Forsøg omtrent 8 Gram. En ringe Mængde Vanddamp førtes med Brintstrømmen ud af Calorimetret og absorberedes i et Chlorcalciumrør som var anbragt ved dettes Udstrømningsaabning.

Forsøgets Gang var følgende. Calorimetrets Platinbeholder veiedes; Vægten gav ved 2 Kilograms Belastning endnu tydeligt Udslag for 1 Milligram. Platinbeholderen blev paa Vægten i omtrent ½ Time førend dens Vægt noteredes, forat Temperaturforskjellen fuldkomment kunde udjævnes. Derpaa anbragtes Beholderen i Calorimetret, dettes Vandmængde, som udgjorde 2400 Gram, afveiedes, og dernæst samledes hele Apparatet.

Medens Maskinen ved Hjælp af Røreapparatet frembragte en eensformig Temperatur i Calorimetret, blev den atmosphæriske Luft i Platinbeholderen uddrevet med tør Brint fra det ovenfor beskrevne Apparat. Den fra Calorimetret udstrømmende Luft passerede det veiede Chlorcalciumrør. Efterat den atmosphæriske Luft var uddrevet af Apparatet, afbrødes Brintstrømmen, og Brinten i Chlorcalciumrøret blev nu fortrængt af tør atmosphærisk Luft, hvorefter Røret paany blev veiet; Tilvæxten i Vægt betegner jeg i de nedenstaaende Tabeller med a.

Efterat Chlorcalciumrøret paany var anbragt paa sit Sted, blev Calorimetrets Varmegrad aflæst og noteret som t_a; dernæst aabnedes for Iltstrømmen, denne antændtes ved Inductionsgnisten, og endeligt aabnedes paany for Brintstrømmen.

Forbrændingsforsøget fortsattes kun saalænge, indtil Calorimetrets Varmegrad var steget ligesaa høit over Luftens Varmegrad, som den før Forsøgets Begyndelse havde været lavere end denne; derefter blev først Iltstrømmen og senere Brintstrømmen afbrudt, og Calorimetrets Varmegrad iagttaget i 8 Minuter. Chlorcalciumrøret blev nu veiet, efterat den deri indeholdte Brint var fortrængt af tør atmosphærisk Luft, og Tilvæxten i Vægt, der noteredes som b, angav saaledes Mængden af den i Løbet af Forsøget medrevne Vanddamp.

Efterat Thermometeraflæsningen var tilendebragt og Chlorcalciumrøret atter indskudt, fjernedes Brinten af Calorimetret ved tør atmosphærisk Luft, og Chlorcalciumrøret veiedes igjen; Tilvæxten noteredes som c. Platinkuglen toges nu ud af Calorimetret og veiedes, og Vægttilvæxten noteredes som d.

Enkelthederne i et saadant Forsøg ere følgende:

(H^2, O).

Nr.	505
T	17°,8
t_a	16°,075
t_2	19°,350
t_5	340
t_8	330
t_b	19°,357
$t_b - t_a = \delta$	3°,282
a	0,020 Gr.
b	0,020 -
c	0,062 -
d	2,027

t_2, t_5, t_8 betegner Calorimetrets Varmegrad 2, 5 og 8 Minuter efter Forsøgets Slutning, og t_b den deraf beregnede Varmegrad ved Forsøgets Slutning. Da hele Calorimetrets caloriske Værdi $A = 2460$ Gram og Varmestigningen $\delta = 3°,282$, er den udviklede Varme $2460 \,.\, 3{,}282 = 8074^c$. Hertil kommer nu den Varme, som er medgaaet til at opvarme det fortættede Vand halvt saa meget, som Varmestigningen udgjorde, eller $\frac{\delta}{2} \,.\, 2 \,.\, 0 = 3^c$, og endvidere den i den bortrevne Vanddamp indeholdte Varme, som ved Forsøgets Temperatur udgjør 592^c for hvert Gram Damp, eller $b \,.\, 592 = 12^c$. Den hele udviklede Varmemængde er altsaa

$$8074^c + 3^c + 12^c = 8089^c.$$

Da nu Vægten af det dannede Vand er $a + b + c + d$ eller 2,129 Gram, bliver Varmen pr. Molecul Vand

$$(H^2, O) = \frac{8089 \,.\, 18}{2{,}129} = 68388^c.$$

De følgende Forsøg ere kun deri forskjellige fra det ovenfor omtalte, at Calorimetret ikke blev veiet efter hvert enkelt Forsøg, men efter 3 Forsøg ad Gangen, hvorved den veiede Vandmængde udgjorde omtrent 8 Gram, og der kunde paa denne Maade opnaaes en høiere Grad af Nøiagtighed. Ligeledes veiedes Chlorcalciumrøret for hver 3 Forsøg kun 4 Gange, nemlig ved Forsøgets Begyndelse, efter Calorimetrets Fyldning med Brint, efter Forsøgets Slutning, og efterat Brinten var fortrængt af atmosphærisk Luft; Vægttilvæxten er noteret ligesom ovenfor som a, b og c.

Det tredobbelte Forsøg udføres altsaa paa følgende Maade. Det første Forsøg fortsættes saa længe, indtil Calorimetrets Varmegrad er naaet saa høit over Luftens, at $\frac{1}{2}(t_a + t_b)$ omtrent er liig T. Derefter afbrydes Iltens Forbrænding, og Brintstrømmen standses. Thermometret iagttages nu i 8 Minuter for at give en Correction for Slutningstemperaturen. Nu tømmes Vandet ud af Calorimetret og nyt Vand bringes ind. Efterat den nye Begyndelsestemperatur er aflæst, iværksættes Forbrændingen paany, og Forsøget fortsættes ligesom før, indtil Varmegraden er steget tilstrækkeligt; det tredie Forsøg udføres paa samme Maade. Dernæst veies Chlorcalciumrøret efterat Brinten er uddrevet deraf, forbindes paany med Calorimetret, hvorpaa Brinten uddrives af dette, og tilsidst veies Chlorcalciumrøret og Calorimetrets Platinkugle.

Jeg skal her anføre Enkelthederne ved de paa denne Maade anstillede Forsøg.

Nr. 506	(H^2, O)		
T	17°,9	18°,0	18°,0
t_a	15°,480	16°,000	16°,600
t_2	20,640	20°,200	19°,540
t_5	625	190	535
t_8	610	180	528
t_b	20°,650	20°,207	19°,544
δ	5°,170	4°,207	2°,944

$$\Sigma\delta = 12^\circ{,}321$$
$$a = 0{,}059 \text{ Gr.}$$
$$b = 0{,}066 \text{ -}$$
$$c = 0{,}047 \text{ -}$$
$$d = 7{,}817 \text{ -}$$
$$a + b + c + d = 7{,}989 \text{ -}$$

Da den calorimetriske Værdi af det med 2400 Gr. Vand fyldte Calorimeter ved Begyndelsen af det første Forsøg udgjør 2460 Gr. og da Summen af Temperaturstigningerne udgjør 12°,321, er Varmeudviklingen 2460 . 12,321 = 30309^c. Hertil kommer endnu den af Vanddampen bortførte Varme b . 593^c = 39^c; endvidere den til Opvarmningen af det dannede Vand medgaaede Varme; da Luftarterne indbringes i Calorimetret med den omgivende Lufts Varmegrad, er for det første Forsøg Varmeforbruget $\frac{1}{2}\,\delta\,.\,x$, naar x betegner Vægten af det dannede Vand. I det andet Forsøg bliver at addere $\delta\,.\,x$ og endvidere $\frac{1}{2}\,\delta\,.\,y$, naar y betegner Vægten af det i andet Forsøg dannede Vand, o. s. v.

Af Varmestigningen i de enkelte Forsøg kan den i disse dannede Vandmængde tilnærmelsesviis bestemmes; den bliver for de tre Forbrændinger 3,36, 2,73 og 1,90 Gram.

Hele Correctionen bliver altsaa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,.\,3{,}36\,.\,5{,}167 &= 8^c{,}7\\
(3{,}36 + \tfrac{1}{2}\,.\,2{,}73)\,.\,4{,}207 &= 17\ {,}8\\
(6{,}09 + \tfrac{1}{2}\,.\,1{,}90)\,.\,2{,}944 &= \underline{20\ {,}7}\\
\text{Sum} &= 47^c{,}2.
\end{aligned}$$

Hele den udviklede Varmemængde bliver altsaa

$$\begin{aligned}
\Sigma\,\delta\,.\,2460 &= 30309^c\\
b\,.\;593 &= \quad 39\\
\text{Correction} &\quad\ \ \underline{47}\\
\text{Sum} &= 30395^c.
\end{aligned}$$

Da endvidere Vægten af det dannede Vand udgjør 7,989 Gram, bliver Varmeudviklingen pr. Molecul

$$\frac{30395^c\,.\,18\ \text{Gr.}}{7{,}989} = 68467^c = (H^2, O).$$

Paa lignende Maade er nu det andet Forsøg anstillet, og Beregningen er udført som ovenfor.

Nr. 507	(H^2, O)		
T	18°,7	18°,5	18°,4
t_a	16°,130	16°,490	16°,280
t_2	21,030	20,730	20,620
t_5	21,012	715	605
t_8	20,995	700	595
t_b	21°,041	20°,740	20°,627
δ	4°,911	4°,250	4°,347

$$\Sigma\delta = 13°{,}508$$
$$a = 0{,}018 \text{ Gr.}$$
$$b = 0{,}089$$
$$c = 0{,}059$$
$$d = 8{,}644$$
$$a + b + c + d = 8{,}810$$

Den i de 3 Forsøg dannede Vandmængde x, y og z er tilnærmelsesviis

$$x = 3{,}17 \text{ Gr.}$$
$$y = 2{,}75 \text{ -}$$
$$z = 2{,}81 \text{ -}$$

Den tilsvarende Correction bliver altsaa

$$\tfrac{1}{2} \,.\, 3{,}17 \,.\, 4{,}911 = 7{,}7^c$$
$$(3{,}17 + \tfrac{1}{2} \,.\, 2{,}75) \,.\, 4{,}250 = 19{,}3$$
$$(5{,}92 + \tfrac{1}{2} \,.\, 2{,}81) \,.\, 4{,}347 = 31{,}8$$
$$\text{Sum } 58{,}8^c.$$

Calorimetrets Vandmængde udgjorde 2400, i Platinkuglen var fra Begyndelsen 4 Gr. Vand, og Calorimetrets caloriske Værdi var som før 60 Gr. I alt svarer altsaa Calorimetret til 2464 Gr. Vand. Den udviklede Varme er altsaa

$$\Sigma\delta \,.\, 2464 = 33284^c$$
$$b \,.\, 593 = 53$$
$$\text{Correction } 59$$
$$\text{Sum } 33396^c.$$

Mængden af det dannede Vand udgjør (see ovenfor) 8,810 Gr., og Varmen pr. Molecul Vand bliver altsaa

$$\frac{33396^c \,.\, 18}{8{,}810} = 68231^c = (H^2, O).$$

Der er saaledes gjort 3 Bestemmelser af samme Størrelse med følgende Resultater

68388^c
68467
68231 ,

og den største Afvigelse er kun 236^c eller omtrent $\frac{1}{3}$ Procent. Størrelsernes ligefremme Middeltal er 68362^c; men det er rigtigere ved Beregningen af Middelstørrelsen at tage Hensyn til de dannede Vandmængder. Naar man saaledes sammenlægger den i de 3 Forsøg dannede Vandmængde og ligeledes den udviklede Varmemængde, finder man

Nr. 505 . . .	2,129 Gr. Vand	svarende	til	8089^c
- 506 . . .	7,989 —	—	-	30395
- 507 . . .	8,810 —	—	-	33396
ialt	18,928 Gr. Vand	svarende	til	71880^c.

Ved at dividere den første Sum ind i den anden og multiplicere med 18 eller Vandets Molecul finder man

$$(H^2 O) = 68357^c.$$

Dette Middeltal falder nu tilfældigviis sammen med det første. Resultatet kan nu i Ord udtrykkes paa følgende Maade:

Naar Brint og Ilt, begge i tor luftformig Tilstand ved en Varmegrad af omtrent 18°, forene sig til Vand af samme Varmegrad, svarer der til hver 18 Gram eller 1 Molecul Vand en Varmeudvikling af 68357^c.

Sætter man Iltens Atomtal liig 16, men Brintens efter Stass til 1,0025, bliver Størrelsen pr. Molecul eller 18,005 Gr. liig 68376^c eller næsten identisk med den ovenfor angivne. Men for Brint liig 1 og Ilt efter Stass liig 15,96 bliver Tallet 68207 for 17,96 Gr. Vand. Jeg anseer det for hensigtsmæssigst stedse at benytte Tallene for $O = 16$, idet derved Resultaterne beregnede efter Stass's Tal og efter de afrundede Atomtal omtrent blive identiske (see ogsaa ovenfor).

Brintens Affinitet til Ilt har allerede været Gjenstand for mange Undersøgelser. Selv har jeg for et Par Aar siden, da jeg udførte mine Forsøg over vandige Opløsningers Varmefylde, anvendt det hertil construerede Apparat til Bestemmelsen af Brintens Forbrændingsvarme. Resultatet var 68068^c eller omtrent 4 Tusindedele lavere end det ovenanførte; men paa Grund af Apparatets Indretning kunde der i hvert Forsøg kun dannes 0,7 Gram, og der kunde saaledes ikke opnaaes nogen høi Grad af Nøiagtighed; i mine nye Forsøg var Vandmængden omtrent 8 Gram.

En Sammenstilling af de ældre Forsøgs Resultater med den af mig fundne Størrelse viser Følgende, idet $H^2 O = 18$ Gram.

$$(H^2, O) = \begin{cases} 69486^c & \text{Dulong.} \\ 69584 & \text{Hess.} \\ 69332 & \text{Grassi.} \\ 67616 & \text{Andrews.} \\ 68924 & \text{Favre \& Silbermann.} \\ 68357 & \text{Thomsen.} \end{cases}$$

Alle de 3 første Tal ligge ikke lidet høiere end mit Tal, der omtrent falder midt imellem Andrews's og Favre & Silbermanns Bestemmelse.

2.

Til Bestemmelsen af *Affiniteten mellem Svovl og Brint* har jeg undersøgt Indvirkningen af Svovlbrinte paa en Opløsning af Jod i stærkt fortyndet Jodbrintesyre. Svovlbrinten sønderdeles let i Svovl og vandig Jodbrintesyre, uden at der dannes Biproducter. Svovlet udskilles i den gule elastiske Tilstand, saa at Bestemmelsen af Varmetoningen gjælder for denne Modification af Svovlet.

Man maatte i disse Forsøg undgaae et Overskud af Svovlbrinte, fordi der ellers ved Absorptionen af dette Overskud i Vand vilde udvikles en vis Varmemængde, som da maatte tages med i Betragtning. Dette lader sig ogsaa let undgaae, naar man i et Par foreløbige Forsøg tilnærmelsesviis bestemmer Varmestigningen i Calorimetret, der svarer til den hele opløste Jodmængdes Omdannelse til Jodbrinte. Man behøver da kun at afbryde Svovlbrintestrømmen, naar Varmestigningen næsten har naaet denne Størrelse, og der bliver da en ringe Mængde Jod tilbage, der bestemmes paa samme Maade som Jodmængden i den oprindelige Oplosning.

Undersøgelsens Gang var nu følgende. Jod opløstes i vandig Jodbrinte; Mængden af opløst Jod bestemtes med en Opløsning af svovlundersyrligt Natron, hvoraf 30000 Gram svarer til et Æqvivalent Jod; i Tabellerne er ved a betegnet den Vægt af Jodopløsningen, som er anvendt til Analysen, ved b den Vægt af den svovlundersyrlige Natronopløsning, som udfordredes til Affarvningen. De til den calorimetriske Undersøgelse bestemte 1200 Gram Jodopløsning afveiedes i den oftomtalte som Calorimeter anvendte Platinkolbe, derefter tillededes Svovlbrinteluft, mættet med Vanddamp ved den omgivende Lufts Varmegrad, Varmestigningen bestemtes, den dannede Vædske filtreredes fra det udskilte Svovl, og Jodmængden bestemtes ved svovlundersyrligt Natron. Vægten af de til Analysen anvendte Mængder af de to Opløsninger er i Tabellerne betegnet med a' og b'. Det Antal Æqvivalenter opløst Jod, som fandtes i de 1200 Gram, bestemtes nu ved følgende Beregning.

Ved Forsøgets Begyndelse fandtes

$$x_1 = \frac{1200}{30000} \cdot \frac{b}{a},$$

efter Forsøget

$$x_2 = \frac{1200}{30000} \cdot \frac{b_1}{a_1},$$

og i Forsøget var altsaa $x = x_1 - x_2$ Æqvivalenter Jod ved Svovlbrinte omdannet til Jodbrinte.

Æqvivalentet af den ved Processen dannede Opløsning af Jodbrinte betegnes i Tabellerne ved Q. Den til Calorimetrets 1200 Gram svarende Vandmængde er altsaa

$$A' = \frac{Q-128}{Q} \cdot 1200,$$

idet kun Vandet i Opløsningen betragtes som calorimetrisk virksomt. Da endvidere Apparatets calorimetriske Værdi er 16 Gr., gjælder Varmestigningen for en Masse af $A' + 16$ Gram Vand.

Decompositionen af et Molecul Svovlbrinte svarer til Dannelsen af 2 Moleculer Jodbrinte; Resultatet bliver altsaa, beregnet for et Molecul Svovlbrinte

$$2\,(J, H, Aq) - (S, H^2) = \frac{2\,\delta\,(A' + 16)}{x} = R,$$

idet δ betegner Varmestigningen.

Forsøgenes Enkeltheder ere nu følgende:

$(n\,J\,H\,Aq\,J^m, H^2S)$

Nr.	508	509	510	511	512	513
T	20°,3	20°,3	19°,4	19°,4	22°,0	22°,0
t_a	19°,795	19°,613	18°,817	18°,850	21,550	21,575
t_b	20°,853	20,583	20,250	20,242	22,350	22,347
δ	1°,058	0,970	1,433	1,392	0,800	0,772
a	20,02	20,02	20,85	20,85	19,61	19,61 Gr.
b	56,30	56,30	82,00	82,00	42,99	42,99
a'	[1]	52,55	50,11	49,95	50,00	50,00
b'	[1]	12,65	4,85	11,88	1,50	3,75
x_1	0,1125	0,1125	0,1573	0,1573	0,0877	0,0877
x_2	0,0000	0,0096	0,0039	0,0095	0,0012	0,0030
x	0,1125	0,1029	0,1534	0,1478	0,0865	0,0847
Q	3243	3243	2264	2264	6644	6644 Gr.
A'	1153	1153	1133	1133	1177	1177 -
R	21988^c	22039^c	21492^c	21644^c	22067^c	21748^c

Middeltallet af de anførte 6 Forsøg, eller den ved Decompositionen af et Molecul Svovlbrinte ved Jod opløst i Jodbrinte udviklede Varme er 21830^c.

Ved et særligt Forsøg har jeg overbeviist mig om, at der saavel ved Jodets Opløsning i Jodbrintesyre som i Jodkalium næppe kan iagttages nogen Varmetoning, saa at Reactionen mellem fri Jod, Vand og luftformig Svovlbrinte vilde give den samme Varmemængde, eller

$$(J^2, Aq, SH^2) = 21830^c.$$

---

[1] I Forsøget Nr. 508 var Opløsningen fuldstændigt decomponeret, saa at der intet Jod fandtes i Opløsningen; derfor er ogsaa $x_1 = x$.

Men nu er

$$(J^2, Aq, SH^2) = 2(J, H, Ag) - (S, H^2) = 21830^c$$

og da ifølge mine nys omtalte Forsøg

$$2(J, H, Aq) = 26342^c,$$

finder man for Svovlbrinten

$$^*(S, H^2) = 4512^c,$$

d. e. *naar Svovl og Brint forene sig til luftformig Svovlbrinte, indtræder en Varmeudvikling af 4512ᶜ. Dette Tal gjælder egenlig for den Modification af Svovlet, hvori det udskilles af Opløsningen, nemlig den gule, bløde Modification*; jeg har betegnet dette med en Stjerne foran Parenthesen.

Efter de Forbrændingsforsøg, som Favre & Silbermann have anstillet med krystalliseret og med blødt Svovl, skulde der til Overgangen fra den bløde til den krystallinske Modification svare en Varmeudvikling af omtrent 1250^c pr. 32 Gram eller 1 Atom Svovl. Saafremt dette Tal er rigtigt, bliver Foreningsvarmen for det krystallinske Svovl og Brint ligesaa meget lavere, altsaa liig 3262^c.

Efter Favre & Silbermanns Forsøg skulde Affiniteten mellem Svovl og Brint svare til 5488^c; men da dette Tal er afledet af Svovlsyrlingens Decomposition med Svovlbrinte, hvorved der altid dannes Pentathionsyre, kan det ikke være nøiagtigt.

En nyere Bestemmelse af Hautefeuille (Comptes rendus LXVIII p. 1554) beroer paa en Reaction modsat den, jeg har undersøgt. H. decomponerer nemlig luftformig Jodbrinte med Svovl, hvorved der dannes Jod og Svovlbrinte, og udleder af sine Forsøg Tallet 4820° for et Molecul Svovlbrinte. Men det er ganske tilfældigt, at dette Tal stemmer nogenlunde med den af mig fundne Størrelse 4512^c; thi for det Første gjælder hint Tal for oktaedrisk Svovl, og for det Andet er til Beregningen anvendt det ældre af Favre & Silbermann bestemte Tal for Affiniteten mellem Jod og Brint. Hautefeuille finder

$$(H^2, S) - 2(H.J) = 13680^c \quad . \; . \; . \; \text{(Hautefeuille)}.$$

Efter mine Forsøg skulde denne Reaction svare til følgende Varmeudvikling:

$$4512^c + 12072^c = 16584^c,$$

men da H.s Forsøg er udført med Qviksølvcalorimetret, kan denne Differens ikke overraske. Beregnet efter mit Tal for Jodbrinte giver H.s Bestemmelse for Svovlbrinte kun 1608^c istedetfor det angivne Tal 4820^c.

Varmeudviklingen ved Svovlbrintens Absorption i Vand har jeg allerede tidligere undersøgt (Vidensk. Selskabs Skrifter 9de Bind p. 49). Forsøgene herover have Nr. 238, og Resultatet er

$$(SH^2, Aq) = 4754^c.$$

De tre Affinitetstal for Svovlbrinte ere altsaa følgende:

$$\left.\begin{array}{r} {}^*(S, H^2) = 4512^c \\ (SH^2, Aq) = 4754 \\ {}^*(S, H^2, Aq) = 9276 \end{array}\right\} \text{Thomsen.}$$

an vil erindre, at Stjernen foran første og sidste Formel betegner, at Svovlet befinder sig i abnorm Tilstand, nemlig i den bløde, gule Modification. Jeg haaber senere at kunne udstrække Undersøgelsen til den krystallinske Form.

C. Dannelsen af Ammoniak.

Bestemmelsen af *Qvælstoffets Affinitet til Brint i Ammoniak* har jeg udført ved at undersøge Indvirkningen af Chlor paa Ammoniakvand. Decompositionen udførtes i den oftomtalte Platinbeholder. Til hvert Forsøg anvendtes 1200 Gram Ammoniak, hvis Æqvivalent var 3626 Gram; til den anvendte Vægt svarer saaledes 1194 Gram Vand og 6 Gram Ammoniak. Den calorimetriske Værdi af den ved Decompositionen dannede Opløsning af Chlorammonium i Ammoniakvand kan sættes liig Vandet i Opløsningen (see min Afhandling om vandige Opløsningers Varmefylde), og da Calorimetret = 16 Gram Vand, bliver den Størrelse, som skal opvarmes, 1210 Gr. = A. I Tabellerne betegnes ved x Vægten af absorberet Chlor, der i hvert Forsøg udgjorde omtrent 4 Gram. Varmeudviklingen pr. Æqvivalent Chlor beregnes af følgende Formel:

$$R = \frac{\delta \,.\, 1210 \,.\, 35{,}457}{x},$$

idet jeg for Chlor anvender det af Stas bestemte Tal 35,457. Forsøgene gave følgende Enkeltheder:

$(n\,NH^3 Aq,\ Cl)$.

Nr.	514	515
T	18°,5	18°,7
t_a	16°,615	17,110
t_b	20,325	20,360
δ	3°,710	3,250
x	3,999	3,491 Gr
R	39803^c	39940^c

Middelværdien af disse Forsøg er

$$(n\,NH^3 Aq,\ Cl) = 39871^c.$$

Da nu Indvirkningen foregaaer paa følgende Maade:

$$4\,NH^3Aq + 3\,Cl = 3\,NH^3\,.\,HCl + N,$$

maa Resultatet beregnes for 3 Æqvivalenter Chlor, og man har da

$$(4\,NH^3Aq,\ 3\,Cl) = 3\left[(H, Cl, Aq) + (NH^3Aq, HClAq)\right] - (N, H^3, Aq)$$

$$3\,.\,39871^c = 3\,(39315^c + 12270^c) \qquad - (N, H^3, Aq)$$

(sammenlign mine Forsøg Nr. 483—486 og Nr. 374), hvoraf man finder

$$(N, H^3, Aq) = 35142^c,$$

d. e. naar Qvælstof og Brint under Medvirkning af en stor Mængde Vand forenes til en stærkt fortyndet Ammoniakopløsning, er Varmeudviklingen pr. Molecul Ammoniak 35142^c.

For heraf at bestemme Affiniteten mellem Qvælstof og Brint i luftformig Tilstand maatte jeg undersøge den Varmeudvikling, som ledsager Ammoniakens Absorption i Vand. Undersøgelsen heraf har jeg udført paa samme Maade som for Chlorbrintens Vedkommende. Calorimetret indeholdt 900 Gram Vand og svarede selv til 9,7 Gram. Mængden af absorberet Ammoniak i de enkelte Forsøg udgjorde fra 3,7 til 6,6 Gram; dens Vægt bestemtes ved Titrering med Salpetersyre, hvis Æqvivalent N var = 1871,8 Gram. Naar a Gram af det dannede Ammoniakvand mætte b Gram af Syren, da er i Calorimetrets 900 Gram opløst en Vægt Ammoniak liig

$$\nu = \frac{b\,.\,900\,.\,NH^3}{N\,.\,a - b\,.\,NH^3},$$

og den Varmeudvikling, som svarer til et Molecul Ammoniak, bliver da, naar δ betegner Varmestigningen,

$$R = \delta\,.\,\frac{900 + 9{,}7}{900}\left(\frac{N\,.\,a}{b} - NH^3\right)$$

ganske analogt med den for Chlorbrinte anførte Formel. Forsøgenes Enkeltheder ere følgende:

(NH^3, Aq).

Nr.	516	517	518
T	18°,9	19°,3	19°,4
t_a	17°,912	18°,025	17°,690
t_b	19,950	20,660	21,300
δ	2,038	2,635	3,610
a	67,03 Gr.	51,62 Gr.	25,11 Gr.
b	30,48 -	30,34	20,21 -
x	3,733	4,831	6,627
R	8444^c	8436^c	8425^c

Middelværdien for disse tre Forsøg er saaledes

$$(NH^3, Aq) = 8435^c,$$

d. e. *naar Ammoniakluft opløses af en stor Vandmængde, er Varmeudviklingen pr. Molecul Ammoniak 8435^c.*

Da nu

$$(N, H^3, Aq) = (N, H^3) + (NH^3, Aq),$$

faaes for Ammoniak følgende Affinitetstal:

$$\left.\begin{array}{rl} (N, H^3) = & 26707^c \\ (NH^3, Aq) = & 8435^c \\ (N, H^3, Aq) = & 35142^c \end{array}\right\} \text{Thomsen.}$$

De her omtalte Reactioner ere allerede tidligere undersøgte af Favre & Silbermann med Qviksølvcalorimetret; men deres Bestemmelser afvige stærkt fra mine her meddelte. For Chlorets Indvirkning paa Ammoniak have de istedetfor 39871^c fundet Tallet 43240^c, der er omtrent 10 Procent for høit; da man nu, som ovenfor udviklet, til Beregningen af Ammoniakens Affinitet skal anvende det Tredobbelte af denne Størrelse, vilde der alene fra dette Tal komme en Differens af 10107^c, hvilket vilde give en betydelig Afvigelse i Størrelsen af (N, H^3), saafremt der ikke tilfældigviis var begaaet nogle andre Feil, der tildeels compenserede den første.

Jeg skal nu give en tabellarisk Oversigt over Beregningen af Affiniteten i Ammoniak, deels efter mine Tal, deels efter Favre & Silbermanns Tal, og deels efter disse Sidstes Tal med Benyttelse af den af Favre corrigerede Bestemmelse af Chlorbrintens Absorptionsvarme.

	Thomsen.	Favre & Silbermann.	Favre.
(H, Cl)	22001^c	23783^c	23783^c
(HCl, Aq)	17314	16411	17479
$(NH^3 Aq, HClAq)$	12270	13536	13536
$(H, Cl, NH^3 Aq)$	51585	53730	54798
$3\,(H, Cl, NH^3 Aq)$	154755	161190	164394
$(4\, NH^3 Aq, 3\, Cl)$	119613	129720	129720
(N, H^3, Aq)	35142	31470	34674
(NH^3, Aq)	8435	8743	8743
(N, H^3)	26707	22727	25931

Medens Tallene i 5te og 6te Linie afvige omtrent 10000^c fra hinanden, udjævne Feilene hinanden dog saa meget, at Tallene for (N, H^3) kun afvige henholdsviis 3980 og 776^c.

De to sidste Spalter vise tydeligt, hvorledes Forandringen af et enkelt Tal, som den af Favre corrigerede Størrelse af Chlorbrintens Absorptionsvarme, kan udøve Indflydelse paa andre Talstørrelser. Antager man det af Favre bestemte Tal 17479 for det rette, kan man t. Ex. ikke sætte $(N, H^3, Aq) = 31470$, men maa antage Tallet 34674^c, der er 3204^c større, fordi netop Størrelsen (ClH, Aq) indgaaer i Beregningen af (N, H^3, Aq). Paa Feil af denne Art have de Experimentatorer, som beskjæftige sig med thermochemiske Undersøgelser, ikke tilstrækkeligt henvendt deres Opmærksomhed.

I *H. Sainte-Claire Deville* og *Hautefeuilles* Afhandling (Compt. rend. LXIX, 150) «Mesures des propriétés explosives du chlorure d'azote» findes foruden de af mig i «Berichte der chemischen Gesellschaft zu Berlin» IV, 922 paaviste Feil ogsaa den, at de paa samme Tid skrive $(HCl, Aq) = 17479^c$ og $(N, H^3, Aq) = 31470^c$, medens der ifølge Ovenstaaende her maatte anvendes Tallet 34674.

En lignende Feil begaaer *Berthelot*, idet han i Comptes rendus for 1869 S. 626 for (CH, Aq) benytter Tallet 17430^c, medens han i Ann. de chim. et de phys. (IV) XXII, 89 for (N, H^3, Aq) benytter Tallet 31500^c.

Ved saadanne Unøiagtigheder fremkomme overmaade mange urigtige Resultater, som gjøre mere Skade end Gavn, idet de saaledes beregnede feilagtige Talstørrelser let senere kunne antages for at være Resultater af virkelige Forsøg.

D. Dannelsen af Kulbrintearter.

1.

Kulstoffets Affinitet til Brint har allerede oftere været undersøgt, og Resultaterne stemme ret godt overeens. For Forbrændingsvarmen pr. Gram have de forskjellige Experimentatorer fundet følgende Tal.

For *Sumpgas* (CH^4) . .	13185^c	Dulong
	11092	Grassi
	13108	Andrews
	13063	Favre & Silbermann.

Med Undtagelse af Grassis Bestemmelse stemme Tallene ret godt overeens, og man vil vistnok ikke begaae nogen stor Feil ved at tage Middeltallet af de tre andre Bestemmelser. Forbrændingsvarmen pr. Molecul CH^4 bliver saaledes

$$(CH^4, O^4) = 16 . 13119^c = 209900^c.$$

En lignende Overeensstemmelse finder man i de samme Experimentatorers Forsøg med Æthylen, nemlig pr. Gram

Æthylen (C^2H^4) . .	12030^c	Dulong
	8585	Grassi
	11942	Andrews
	11858	Favre & Silbermann.

Ved at udelade Grassis Bestemmelse og tage Middeltallet af de øvrige finder man

$$(C^2H^4, O^6) = 28 . 11943^c = 344400^c.$$

Over Kulbrinternes første Led, Acetylen, er der ingen Forsøg bekjendtgjorte, og jeg har derfor selv udført de hertil hørende Bestemmelser; endvidere har jeg for at controllere mine Apparater og Forsøg samtidigt gjort Bestemmelsen for Æthylen, der med Hensyn til sit Forhold ved Forbrændingen staaer Acetylenet nærmest.

Æthylen. Forsøgene anstilledes med det samme Apparat, som jeg har anvendt til Undersøgelsen af Chlorbrinten og Vandet, og som ovenfor er beskrevet. Den Luftart, som skal undersøges, antændes i Platinapparatet med en Inductionsgnist og brænder derefter regelmæssigt videre. Forbrændingsproducterne veies, saavel Kulsyren som Vandet, der deels fortættes i Calorimetret, deels i Dampform rives med af Luftstrømmen og absorberes i Chlorcalciumrøret.

Æthylenet blev fremstillet af Alkohol og Svovlsyre og renset paa sædvanlig Maade. Analysen viste, at Luften indeholdt et Overskud af Brint, der sandsynligviis skyldtes en Indblanding af CH^4. I de 3 nedenfor beskrevne Forsøg var Vægten af den dannede Kulsyre 5,299 Gram, af Vand 2,298 Gram, hvoraf Luftens empiriske Sammensætning beregnes til $C^2H^{4,240}$. Antager man, at Overskudet af Brint skyldes Tilstedeværelsen af CH^4, finder man Forholdet mellem de to Luftarter paa følgende Maade:

$$C^2H^4 + x\,CH^4 = \left(1 + \frac{x}{2}\right) C^2H^{4,240}.$$

Af Ligningen

$$4 + 4x = 4{,}240 + 2{,}120\,x$$

finder man da

$$x = 0{,}1277.$$

Betegnes med v det som Damp medrevne Vand, med k Vægten af den dannede Kulsyre, endvidere som sædvanligt Calorimetrets samlede Værdi 2460 Gr. ved A og Varmestigningen ved δ, bliver den i Forsøget udviklede Varme $\delta \,.\, A$ og den i Dampen bortførte Varme $v \,.\, 593^c$. For hvert Molecul Æthylen med indblandet Sumpgas dannes efter ovenstaaende Formel $88\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ Gram Kulsyre, og den tilsvarende Varme beregnes til

$$\frac{88\left(1 + \frac{x}{2}\right)(A\,.\,\delta + 593\,v)}{k}$$

Subtraheres herfra den Varmemængde, som svarer til de x Moleculer Sumpgas, finder man for et Molecul Æthylen Forbrændingsvarmen

$$R = (C^2H^4, O^6) = \frac{88\left(1 + \frac{x}{2}\right)(A\,.\,\delta + 593\,v)}{k} - x(CH^4, O^4)$$

Forsøgenes Enkeltheder ere nu følgende:

(C^2H^4, O^6).

Nr.	519	520	521
T	$17^\circ{,}8$	$19^\circ{,}2$	$19^\circ{,}2$
t_a	$16^\circ{,}845$	$17^\circ{,}615$	$18^\circ{,}017$
t_b	$19^\circ{,}100$	$20^\circ{,}410$	$21^\circ{,}240$
δ	$2^\circ{,}255$	$2^\circ{,}825$	$3^\circ{,}223$
k	1,449	1,789	2,061 Gr.
v	0,029	0,025	0,030 -
$A.\delta$	5547^c	6950^c	7929^c
$593.v$	17	15	17
s	5564^c	6965^c	7946^c
$\dfrac{88\left(1-\frac{x}{2}\right)s}{k}$	359470^c	364460^c	360920^c
$x(CH^4, O^4)$	26800	26800	26800
(C^2H^4, O^6)	332670^c	337660^c	334120^c

Middeltallet af disse 3 Forsøg er

$$(C^2H^4, O^6) = 334800^c$$

eller for 1 Gram Æthylen 11958^c, hvilket falder sammen med den ovenfor nævnte, efter de ældre Bestemmelser beregnede, Talstørrelse 11943^c, hvoraf man vel kan drage den Slutning, at ogsaa den følgende Bestemmelse af *Acetylenets* Forbrændingsvarme vil kunne sammenlignes med Bestemmelserne for de to førstnævnte Kulbrinter.

2.

Acetylen. Forsøgene med Acetylen frembød særlige Vanskeligheder, som det dog er lykkedes mig at overvinde. Acetylenet brænder i Luften med meget stærkt sodende Flamme, i Ilten derimod med en meget stærkt lysende, ikke sodende Flamme. Men denne Flammes Varmegrad er meget høi, og Acetylenet decomponeres saa let, at det tynde og snævre Platinrør i Brænderen ved Forbrændingen i Ilt efter faa Secunders Forløb fuldstændigt tilstoppes med Graphit, og Flammen gaaer da ud. Efterat jeg paa forskjellige Maader havde søgt at ændre Brænderen, opnaaede jeg en regelmæssig Forbrænding af Acetylenet ved at lade Acetylenet blande sig med atmosphærisk Luft i et fælles Tilstrømningsrør, førend det traadte ind i Brænderen. Ved Regulering af Luftstrømmen faaer man en Flamme, der brænder i Atmosphæren med meget stærkt Lys, men uden at ose, og som

ved Forbrændingen i Ilt ikke foraarsager nogen Udskilning af Graphit. Efterat denne Ændring var skeet, gik Forbrændingen i Calorimetret fuldkomment regelmæssigt for sig.

Acetylenets Sammensætning bestemtes paa sædvanlig Maade ved Iltning med Kobberilte; der dannedes 1,994 Gram Kulsyre og 0,425 Gram Vand, hvilket giver en Sammensætning, svarende til Formlen $C^2H^{2,084}$. Overskudet af Brint skyldes Tilstedeværelsen af en ringe Mængde Æthylen, og Blandingsforholdet beregnes paa følgende Maade:

$$C^2H^2 + x\,C^2H^4 = (1 + x)\;C^2H^{2,084}$$

hvoraf

$$2 + 4x = (1 + x)\,.\,2{,}084$$

$$x = 0{,}0438$$

Luften var altsaa sammensat $C^2H^2 + 0{,}0438\;C^2H^4$.

Acetylenets Forbrændingsproducter indeholde noget Kulilte og Kulbrinte; det var saaledes nødvendigt at lede dem over glødende Kobberilte for at bestemme Vægten af de ufuldstændige Forbrændingsproducter og tage Hensyn dertil i Beregningen. Forbrændingsproducterne ledede derfor fra Calorimetret gjennem følgende Apparater: Chlorcalciumrør, Kaliapparat, Forbrændingsrør med Kobberilte og dernæst endnu et Chlorcalciumrør og Kaliapparat.

Den i det første Chlorcalciumrør under det calorimetriske Forsøg absorberede Vægt Vand svarer til den under Forsøget som Damp medrevne Vandmængde; dennes Vægt er i Tabellerne betegnet med m, og den med Dampen bortgaaede Varmemængde er altsaa $592^c . m$. Forøgelsen af det første Kaliapparats Vægt svarer til den under Forsøget dannede Kulsyre; den betegnes ved k. Forøgelsen af det andet Chlorcalciumrørs Vægt svarer til de som Brint eller Kulbrinte bortgaaede Forbrændingsproducter; Vægten af det ved disse Luftarters Iltning dannede Vand er betegnet ved m_1. Det andet Kaliapparats Vægtforøgelse svarer til det ved Forbrændingen dannede Kulilte og Kulbrinte; Vægten af den ved disse Forbindelsers Iltning dannede Kulsyre er betegnet ved k_1.

Til Beregningen af den Correction, der nødvendiggjøres ved den ufuldstændige Forbrænding, er det tilstrækkeligt at betragte de ufuldstændige Forbrændingsproducter som bestaaende af Kulilte og Brint, skjøndt endeel Brint og Kulstof kan være tilstede som Kulbrinte; thi Summen af Forbrændingsvarmen for 1 Molecul Kulilte og 2 Moleculer Brint er paa 3 Procent nær liig Forbrændingsvarmen for et Molecul af den lette Kulbrinte; da nu Correctionen selv kun udgjør 1—2 Procent, vilde Differensen mellem de to Beregninger være omtrent $\frac{1}{2}$ Promille, altsaa forsvindende lille. Da nu Dannelsen af 1 Gram Vand giver 3800^c, udgjør Correctionen for den ikke forbrændte Brint $3800^c . m_1$; da der endvidere ved Dannelsen af 1 Gram Kulsyre ved Kuliltets Forbrænding udvikles 1520^c, udgjør Correctionen for det ufuldstændigt forbrændte Kulstof $1520^c . k_1$.

Det calorimetriske Æqvivalent for det med 2400 Gram Vand fyldte Calorimeter var 2460 Gram. Betegnes Temperaturstigningen under Forbrændingen ved δ, bliver hele den Varmemængde, der vilde svare til den fuldstændige Forbrænding af det anvendte Acetylen

$$v = 2460\,.\,\delta + 593\,.\,m + 1520 k_1 + 3800 m_1.$$

Da den Kulbrinte, der anvendtes i Forsøgene, var en Blanding efter Formlen

$$C^2H^2 + xC^2H^4,$$

giver Forbrændingen af den Luftmængde, der indeholder et Molecul Acetylen, en Kulsyremængde af $88(1+x)$. Da endvidere hele den i Forsøget dannede Kulsyremængde udgjør $k + k_1$, finder man Udtrykket

$$(C^2H^2, O^5) + x(C^2H^4, O^6) = \frac{88(1+x)}{k+k_1} v$$

og deraf

$$R = (C^2H^2, O^5) = \frac{88(1+x)}{k+k_1} v - x(C^2H^4, O^6)$$

idet x, som ovenfor angivet, er 0,0438.

Forsøgenes Enkeltheder ere følgende:

(C^2H^2, O^5).

Nr.	522	523	524	525
k	1,800	2,075	3,052	2,278 Gr.
k_1	0,041	0,036	0,053	0,047 -
m	0,070	0,076	0,093	0,083 -
m_1	0,010	0,026	0,008	0,014 -
T	17°,0	17°,6	20°,0	19°,8
t_1	15,580	16,335	17,805	18,215
t_2	18,155	19,335	22,200	21,470
δ	2,575	3,000	4,395	3,255
$2460\,.\,\delta$	6335c	7380c	10812c	8007c
$593\,.\,m$	42	45	55	50
$1520\,.\,k_1$	62	55	81	71
$3800\,.\,m_1$	38	99	30	53
v	6477c	7579c	10978c	8181c
$\frac{88(1+x)}{k+k_1}\,.\,v$	323160c	329780c	324770c	323220c
$x(C^2H^4, O^6)$	14660	14660	14660	14660
R	308500c	315120c	310110c	308560c

Gjennemsnitstallet for disse fire Forsøg er

$$(C^2H^2, O^5) = 310570^c.$$

Da Vægten af et Molecul Acetylen er 26, bliver Forbrændingsvarmen for 1 Gram Acetylen 11945^c.

3.

De tre Kulbrinter Sumpgas, Æthylen og Acetylen have altsaa følgende Forbrændingsvarme

	pr. 1 Gram	pr. Molecul
Sumpgas CH^4	13119^c	209900^c
Æthylen C^2H^4	11958	334800
Acetylen C^2H^2	11945	310570

For lige mange Vægtdele har altsaa Sumpgassen den største Forbrændingsvarme; for de to andre Kulbrinter er den omtrent 10 Procent lavere og eens for begge. Men for lige store Rumfang har Sumpgas den mindste og Æthylen den største Forbrændingsvarme.

Beregningen af de tre Kulbrinters Dannelsesvarme udføres paa følgende Maade:

$$(CH^4, O^4) = 209900^c = (C, O^2) + 2(H^2, O) - (C, H^4)$$
$$(C^2H^4, O^6) = 334800 = 2(C, O^2) + 2(H^2, O) - (C^2, H^4)$$
$$(C^2H^2, O^5) = 310570 = 2(C, O^2) + (H^2, O) - (C^2, H^2)$$

For Reactionen (H^2, O) have vi efter mine ovenfor meddelte Undersøgelser Tallet 68357^c. Reactionen (C, O^2) har jeg ikke selv undersøgt; efter Favre & Silbermanns Forsøg forandres dens Størrelse med Kulstoffets Tilstandsform, idet der for Kulsyrens Dannelse af Trækul fandtes 8080^c, af Graphit 7800^c pr. Gram Kulstof. For disse to Former af Kulstoffet har man altsaa

$$(C, O^2) = 96960^c \; . \; . \; . \; \text{Trækul}$$
$$(C, O^2) = 93600 \; . \; . \; . \; \text{Graphit}$$

Eftersom man bruger den ene eller den anden af disse Størrelser, faaer man selvfølgeligt forskjellige Tal for Kulbrinternes Dannelsesvarme, som det vil sees af følgende Sammenstilling:

	Trækul.	Graphit.
(C, H^4)	+23780^c	+20420^c
(C^2, H^4)	— 4160	—10880
(C^2, H^2)	—48290	—55010

Medens altsaa Sumpgas, CH^4, sammensættes af sine Bestanddele under Udvikling af Varme, skeer der ved Æthylenets og Acetylenets Dannelse af Kulstof og Brint en Varmeabsorption, der navnligt er betydelig for Acetylenets Vedkommende.

Af de tre Ligninger

$$(C^2, H^2) + (C^2H^2, H^2) = (C^2, H^4)$$
$$(C^2, H^4) + (C^2H^4, H^4) = 2(C, H^4)$$
$$(C, H^4) + (CH^4, C) = (C^2, H^4)$$

finder man følgende Talstørrelser, svarende til disse Kulbrinters Decomposition og Dannelse:

$$(C^2, H^2) = \begin{cases} -48290^c & \text{Trækul} \\ -55010 & \text{Graphit} \end{cases}$$
$$(C^2H^2, H^2) = +44130$$
$$(C^2H^4, H^4) = +51720$$
$$(CH^4, C) = \begin{cases} -27940 & \text{Trækul} \\ -31310 & \text{Graphit} \end{cases}$$

eller udtrykt med Ord:

1. Acetylenets Dannelse af Kulstof og Brint er ledsaget af en betydelig Varmeabsorption.
2. Æthylenets Dannelse af Acetylen ved Optagelse af endnu to Atomer Brint ledsages af en Varmeudvikling af omtrent 44000^c.
3. Sumpgassens Dannelse af Æthylen ved Optagelse af endnu 4 Atomer Brint ledsages ligeledes af en Varmeudvikling, hvis Størrelse er 51720^c.
4. Æthylenets Decomposition til Sumpgas under Udskilning af Kulstof er ledsaget af en Varmeudvikling; naar Kulstoffet udskilles som Graphit, er Varmeudviklingens Størrelse 31310^c.

Det maa her bemærkes, at de Tal, der udtrykke Kulbrinternes Dannelsesvarme, ikke kunne naae en saa stor procentisk Nøiagtighed som mine øvrige Bestemmelser. Aarsagen er nemlig den, at disse Tal maae afledes af de paagjældende Luftarters Forbrændingsvarme; de ere Differenserne mellem Bestanddelenes og Forbindelsernes egen Forbrændingsvarme. Men disse Differenser ere i Sammenligning med Forbrændingsvarmen smaa Tal, og mulige Feil i de store Tals Bestemmelse faae derfor en stor Indflydelse paa de mindre Differensers procentiske Nøiagtighed. I den nedenstaaende Tabel har jeg sammenstillet disse Talstørrelser, idet jeg har antaget Kulstoffet som *Graphit.*

	Bestanddelenes Forbrændingsvarme.	Forbindelsens Forbrændingsvarme.	Dannelsesvarme.
Sumpgas	230320^c	209900^c	20420^c
Æthylen	323920	334800	—10880
Acetylen	255560	310570	—55010

En Feil af en Procent i de første Tal vilde altsaa kunne frembringe en Feil af 2—3000^c i den sidste Talrække. Men Dannelsesvarmen lader sig ikke directe bestemme, og man kan saaledes ikke undgaae en Usikkerhed i disse Bestemmelser.

E. Sammenstilling af Resultaterne og almindelige Betragtninger.

1.

En Sammenstilling af de directe Resultater af de i denne Afhandling undersøgte chemiske Processer viser Følgende. Man finder ifølge Forsøgene

Tabel I.	Nr. 483—486	(H, Cl)	= 22001[c]	Thomsen.
	- 490—492	$(KBrAq, Cl)$	= 11478	
	- 496—498	$(KJAq, Cl)$	= 26209	
	- 493—495	(Br, Aq)	= 539	
	- 481—489	(HCl, Aq)	= 17314	
	- 499—501	(HBr, Aq)	= 19936	
	- 502—504	(HJ, Aq)	= 19207	
	- 505—507	(H^2, O)	= 68357	
	- 508—513	(J^2, Aq, SH^2)	= 21830	
	- 238	(SH^2, Aq)	= 4754	
	- 514—515	$(4NH^3Aq, 3Cl)$	= 3.39871	
	- 516—518	(NH^3, Aq)	= 8435	
	- 519—521	(C^2H^4, O^6)	= 334800	
	- 522—525	(C^2H^2, O^5)	= 310570	
		(CH^4, O^4)	= 209900	Ældre Bestemmelse.

Af disse Tal finder man nu, saaledes som jeg ovenfor nærmere har viist, Affiniteten mellem Brint og de forskjellige Metalloider. De nedenfor anførte Talstørrelser gjælde for en Varmegrad af omtrent 18°, og saavel Bestanddelene som Producterne maae altsaa antages at være i den Tilstand, hvori de under normale Omstændigheder findes ved denne Varmegrad. Man har saaledes:

$$(H, Cl) = 22001^c$$
$$(H, Br) = 8440$$
$$(H, J) = -6036$$
$$(H^2, O) = 68357$$

Tabel II.

$$\left.\begin{array}{lcr}(H^2, S) & = & 4512^c \\ (H^3, N) & = & 26707\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lcr}(H^4, C) & = & 20420 \\ (H^4, C^2) & = & -10880 \\ (H^2, C^2) & = & -55010\end{array}\right\} \text{Naar } C \text{ betyder Graphit.}$$

$$\left.\begin{array}{lcr}(H^4, C_1) & = & 23780 \\ (H^4, C_1{}^2) & = & -\ 4160 \\ (H^2, C_1{}^2) & = & -48290\end{array}\right\} \text{Naar } C_1 \text{ betyder Trækul.}$$

Til Beregningen af de sidste Tal er efter Favre & Silbermanns Forsøg Graphitens Affinitet til Ilt (C, O^2) sat liig 93600^c og Trækullets $(C_1, O^2) = 96960^c$; de øvrige Tal støtte sig derimod alle paa egne Iagttagelser.

Da jeg for Varmeudviklingen ved Luftarternes Absorption i Vand har fundet følgende Resultater:

Tabel III.

$$\begin{array}{lcr}(HCl, Aq) & = & 17314^c \\ (HBr, Aq) & = & 19936 \\ (HJ, Aq) & = & 19207 \\ (H^2S, Aq) & = & 4754 \\ (H^3N, Aq) & = & 8435,\end{array}$$

finder man for Varmeudviklingen ved Dannelsen af Brintforbindelsernes vandige Opløsninger

Tabel IV.

$$\begin{array}{lcr}(H, Cl, Aq) & = & 39315^c \\ (H, Br, Aq) & = & 28376 \\ (H, J, Aq) & = & 13171 \\ (H^2, O, Aq) & = & 68357 \\ (H^2, S, Aq) & = & 9266 \\ (H^3, N, Aq) & = & 35142\end{array}$$

Da endvidere Ammoniak forbinder sig med Brintesyrerne, og da ifølge mine Forsøg

$$\begin{array}{llcr}\text{Nr. } 374 & (NH^3Aq, HClAq) & = & 12272^c \\ \text{- } 241 \text{ ff.} & (NH^3Aq, H^2SAq) & = & 6195\end{array}$$

og da Brom- og Jodbrintesyrens Neutralisationsvarme er liig Chlorbrintesyrens (see Nr. 14—16 og 39—45), faaer man for Dannelsen af Ammoniaksaltenes vandige Opløsninger af deres Grundbestanddele følgende Varmeudvikling:

Tabel V.

$$\begin{array}{lcr}(N, H^4, Cl, Aq) & = & 86730^c \\ (N, H^4, Br, Aq) & = & 75790 \\ (N, H^4, J, Aq) & = & 60580 \\ (N, H^5, S, Aq) & = & 50600,\end{array}$$

idet som bekjendt t. Ex.

$$(N, H^4, Cl, Aq) = (N, H^3, Aq) + (H, Cl, Aq) + (NH^3Aq, HClAq).$$

Da endeligt Varmebindingen ved Opløsningen af de tre Salte Chlor-, Brom- og Jodammonium ifølge Forsøg over den latente Opløsningsvarme, som senere ville blive bekjendtgjorte, har følgende Værdi:

Tabel VI.
$$(NH^4 Cl, Aq) = -3880^c$$
$$(NH^4 Br, Aq) = -4380$$
$$(NH^4 J, Aq) = -3550,$$

finder man, at Dannelsen af Chlor-, Brom- og Jodammonium i fast, krystalliseret Form af deres Grundbestanddele ledsages af følgende Varmeudvikling:

Tabel VII.
$$(N, H^4, Cl) = 90610^c$$
$$(N, H^4, Br) = 80170$$
$$(N, H^4, J) = 64130.$$

2.

De her meddelte Talstørrelser indeholde flere Resultater af almindelig Interesse. Det fremgaaer af Tabel II, at Brintens Affinitet til Chlor, Brom og Jod aftager betydeligt, medens Atomtallet stiger, idet Affiniteten for de luftformige Brintesyrer svarer til

$$22001^c \quad 8440^c \quad \div 6036^c;$$

altsaa for Chlor er stærkt positiv, ringere for Brom og negativ for Jod. Dette synes at have almindelig Gyldighed; thi ogsaa i den næste naturlige Gruppe af Metalloider: Ilt, Svovl, Selen og Tellur, have vi for de to første Led

$$68357^c \text{ og } 4512^c,$$

d. e. medens et Atom Ilt med et Molecul Brint giver en Varmeudvikling af 68357^c, svarer til Dannelsen af Svovlets Brintforbindelse kun 4512^c. Da nu endvidere Affiniteten i Selenbrinten efter *Hautefeuilles* Undersøgelser (Compt. rend. LXVIII, 1554) er negativ, have vi for de tre Stoffer, Ilt, Svovl og Selen en stor Overeensstemmelse med Gruppen Chlor, Brom, Jod.

I den tredie naturlige Familie af Grundstoffer, Qvælstof, Phosphor, Arsenik, Antimon og Vismut, er Qvælstoffets Affinitet til Brint positiv, nemlig i Ammoniak 26707^c; men at den for de andre Stoffer aftager, som Atomtallet voxer, fremgaaer af de tilsvarende Forbindelsers Egenskaber; de decomponeres nemlig alle let i Varmen, Arsenbrinten lettere end Phosphorbrinten, og endnu lettere decomponeres Antimonbrinten, idet Decompositionen allerede foregaaer ved almindelig Varmegrad; endelig kjender man ingen Forbindelse mellem Vismut og Brint, sandsynligviis fordi en saadan Forbindelse med stor Lethed decomponeres. Det kan vel derfor næppe betvivles, at ogsaa i denne Gruppe Affiniteten til Brint aftager stærkt med de voxende Atomtal.

I Kulstofgruppen er Affiniteten for det første Led i Forbindelsen CH^4 liig 20420^c

eller stærkt positiv; men at den for det næste Led, Silicium, er betydeligt lavere, fremgaaer vel af Siliciumbrintens hele Forhold, og af de høiere Led i denne Gruppe, Tin og Platin, har man ingen Forbindelser af denne Art fremstillet.

For Brintens Affinitet til Metalloiderne kan man vel saaledes opstille følgende almindelige Lov:

I de fire Grupper af Metalloider, som repræsenteres af Chlor, Ilt, Qvælstof og Kulstof, er Affiniteten til Brint for det første Led i hver Række i den mættede Forbindelse positiv; med stigende Atomtal aftager Affiniteten til Brint for de øvrige Led i Rækken, saaledes at den for de høiere Led i Rækken bliver negativ.

3.

Vi ville nu betragte Halogenernes Gruppe noget nøiere. *I de luftformige Brintesyrer* udtrykkes Affiniteten ved følgende Tal

$$(H, Cl) = 22001^c$$
$$(H, Br) = 8440$$
$$(H, J) = -6036$$

Mellem disse Tal viser der sig intet simpelt Forhold; rigtignok er Differensen mellem de to første Led 13561^c, medens den for de to sidste udgjør 14476^c, hvad der ikke afviger særdeles meget fra det førstnævnte Tal; men de tre Tal kunne næppe directe sammenlignes, da Chlor, Brom og Jod ikke have samme Tilstandsform. Vilde man beregne Affiniteten for alle tre Stoffer i luftformig Tilstand, maatte man til de to sidste Tal lægge Varmebindingen ved de paagjældende Stoffers Fordampning. Bromets *latente Varme* er efter *Andrews* (Pogg. Ann. LXXV, 501) for 1 Atom 3650^c, Jodets efter *Favre & Silbermann* (Ann. chim. phys. III 37 p. 469) for 1 Atom 3050^c. Lægges disse Tal til de ovenfor anførte, finder man Størrelserne

$$22001^c \qquad 12090^c \qquad -2986^c$$

hvis Differenser ere

$$9911^c \text{ og } 15076^c.$$

Disse Tal afvige betydeligt mere fra hinanden end de ovenanførte, saa at Brom ikke længere staaer midt imellem Chlor og Jod. Man har

$$9911 = 2.4956$$
$$15076 = 3.5025$$

hvilke sidste Factorer man vel kunde antage for identiske, da Bestemmelsen af Jodets latente Varme lider af nogen Usikkerhed; men om dette Forhold er mere end en Tilfældighed, er vel vanskeligt at afgjøre.

Tabel III indeholder *Varmeudviklingen ved disse Syrers Absorption i Vand*; denne udgjør for Chlor-, Brom- og Jodbrintesyre henholdsviis

$$17314^c, \ 19936^c \text{ og } 19207^c.$$

Ogsaa her viser der sig ingen videre Overeensstemmelse, end at de to sidste Tal ere tilnærmelsesviis lige store og begge betydeligt høiere end Chlorbrintesyrens. Man skulde have ventet, saafremt disse Tal ikke vare lige store, at de da varierede med Molecultallene; men dette er langtfra Tilfældet, idet vi finde det største Tal for Brombrinte.

Beregnes disse tre Syrers Absorptionsvarme for ligestore Vægtmængder, finde vi for 1 Gram af Syren følgende Værdier:

$$474^c,\ 246^c \text{ og } 150^c,$$

der ikke staae i noget simpelt Forhold til hinanden.

Tabel IV indeholder *Varmeudviklingen ved de vandige Brintesyrers Dannelse*; denne udgjør for de tre nævnte Syrer

$$39315^c,\ 28376^c \text{ og } 13171^c.$$

Her forholde Tallene sig nogenlunde som 3 : 2 : 1, men dette Forhold forsvinder, saasnart man corrigerer dem for Broms og Jods latente Varme. Man faaer da

$$39315^c,\ 32026^c \text{ og } 16221^c$$

og Differenserne

$$7289^c \text{ og } 15805^c.$$

Medens ovenfor det første og tredie Tal forholdt sig som 3 : 1, er her Forholdet mellem det andet og tredie Tal som 2 : 1, men anden Overeensstemmelse finder ikke Sted.

Ikke engang den i Tabel VI anførte *latente Opløsningsvarme for Chlor-, Brom- og Jodammonium* viser et Forhold, der svarer til de voxende Atomtal; Tallene ere

$$-3880^c,\ -4380^c,\ -3550^c;$$

de have nogenlunde samme Størrelse, men Afvigelsen fra Middeltallet synes heelt vilkaarlig.

Betragte vi til Slutning den i Tabel VII opførte *Varmeudvikling ved Dannelsen af de krystalliserede Forbindelser Chlor-, Brom- og Jodammonium*, ere Tallene

$$90610^c,\ 83820^c \text{ og } 67180^c$$

og deres Differenser

$$6790^c \text{ og } 16640^c,$$

men heller ikke her træffer man noget simpelt Forhold.

Differensen mellem Chlorets Affinitet paa den ene Side og Brom og Jods paa den anden Side bliver saaledes for de luftformige Syrer, for de vandige Opløsninger og for Ammoniaksaltene følgende:

	$R = Br$	$R = J$
$(H, Cl) - {}^*(R, H)$	9911^c	24987^c
$(H, Cl, Aq) - {}^*(R, H, Aq)$	7289	23094
$(N, H^4, Cl) - {}^*(N, H^4, R)$	6790	22430

naar Brom og Jod bringes i Beregningen i Dampform; derimod

	$R = Br$	$R = J$
$(H, Cl) - (R, H)$	13561^c	28037^c
$(H, Cl, Aq) - (R, H, Aq)$	10939	26144
$(N, H^4, Cl) - (N, H^4, R)$	10440	26480

naar Jod og Brom indvirke i deres normale Tilstand, Jod som fast Stof og Brom som Vædske.

Det fremgaaer af disse Tal, at *Brom med Hensyn til sin Affinitet til Brint staaer langt nærmere ved Chlor, end man skulde slutte af dets Atomtal, der omtrent ligger midt imellem Tallene for Chlor og Jod.*

Dette Resultat stemmer ogsaa med Bromforbindelsernes Charakteer; thi disse Forbindelser staae i Virkeligheden langt nærmere ved Chlorets end ved Jodets Forbindelser.

4.

De i Tabel II anførte Tal for *Affiniteten mellem Kulstof og Brint* fortjene en nærmere Undersøgelse. Betragte vi den første Gruppe, d. e. de Tal, som gjælde for Kulstoffets Graphitform, have vi

$$(C^2, H^2) = -55010^c$$
$$(C^2, H^4) = -10880$$
$$(C, H^4) = +20420.$$

Det fremgaaer nu af disse Talstørrelser, at Dannelsen af den første af disse Kulbrinter ledsages af en meget betydelig Varmeabsorption. Man kunde heraf ledes til at troe, at Affiniteten mellem Kulstof og Brint var *negativ*; men nu er Sagen den, at Brinten forener sig med de allerede dannede Kulbrinter under en betydelig Varmeudvikling; thi

$$(C^2, H^2) = -55010^c$$
$$(C^2, H^4) - (C^2, H^2) = (C^2H^2, H^2) = +44130$$
$$2(C, H^4) - (C^2, H^4) = (C^2H^4, H^4) = +51720$$

og der er saaledes vel ingen Tvivl om, at Affiniteten mellem Kulstof og Brint er *positiv*, som det ogsaa fremgaaer af Bestemmelsen

$$(C, H^4) = +20420^c.$$

Hvorledes skal man nu forklare dette eiendommelige Forhold mellem Kulstof og Brint; hvad kan Aarsagen være til, at Kulstoffet endogsaa ved høie Varmegrader er uvirksomt ligeoverfor Brinten, saa at det først ved den høieste bekjendte Varmegrad under Indvirkningen af den elektriske Lysbue forbinder sig med Brint og det under Absorption af en

betydelig Varmemængde; men at, naar Kulstoffet engang er forbundet med Brint til Acetylen, at da Affiniteten til Brint ikke er tilfredsstillet, saaat nye Qvantiteter af Brint let og under Varmeudvikling forbinde sig med Acetylenet?

Ved en nærmere Betragtning af Kulstoffets almindelige Forhold bliver det tydeligt, at det omtalte Phænomen kan betragtes som Typus for Kulstoffets Forhold ligeoverfor alle andre Stoffer.

Ved almindelig Varmegrad forbinder Kulstoffet sig ikke med noget Grundstof, der udfordres altid en høi Varmegrad for at danne saadanne Forbindelser, om de overhovedet ere mulige. Ilt og Svovl t. Ex. forene sig directe med Kulstof, men først ved en høi Varmegrad; men med ingen af de øvrige Metalloider kan Kulstoffet selv ved høiere Varmegrader directe danne nogen Forbindelse, naar undtages den ovenfor omtalte Brintforbindelse. Men naar Kulstoffet engang er traadt i Forbindelse med et andet Stof, gaaer det let over i andre Forbindelser. Kulilte t. Ex. forbinder sig let med Ilt til Oxalsyre og Kulsyre, med Chlor til Chlorkulilte o. s. v.

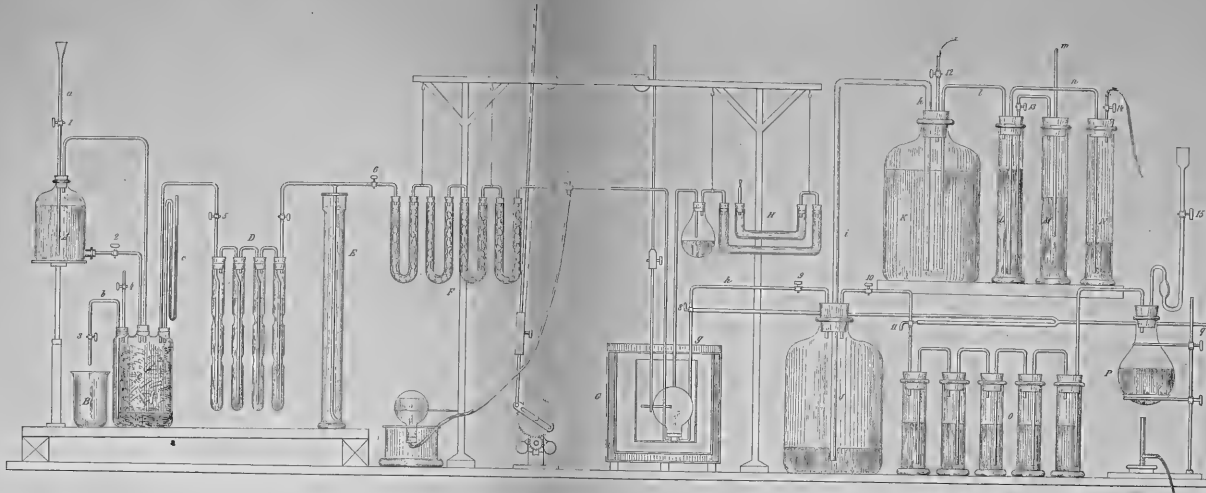
I fuldkommen Overeensstemmelse med dette Kulstoffets Forhold viser det sig gjennemgaaende, paa en enkelt Undtagelse nær, at Kulstofforbindelsernes Dannelse er ledsaget af en Varmeabsorption, eller vilde være det, saafremt de lode sig fremstille directe. Der foreligge Undersøgelser over Dannelsen af Svovlkulstof, Cyan eller Kulqvælstof, Acetylen eller Kulbrinte. Alle disse Forbindelser dannes under en betydelig Varmeabsorption. Kun een Undtagelse er bekjendt; kun med Ilt forbinder Kulstoffet sig under Varmeudvikling, selv naar det kun er det laveste Ilt, Kulilte, der dannes. Men sammenligner man disse Varmephænomener noget nærmere, viser det sig, at Forholdet til Ilt kun tilsyneladende er en Undtagelse. Man har nemlig

$$(C, O) = 26800^c$$
$$(CO, O) = 66800.$$

Medens altsaa det første Atom Ilt, som forener sig med Kulstoffet, kun udvikler 26800^c, er Varmeudviklingen ved det andet Atom Ilt, der omdanner Kulilte til Kulsyre, 66800 eller $2\frac{1}{2}$ Gange saa stor. Efter Alt, hvad man veed fra Undersøgelsen af andre Stoffer, maa man antage, at det første Iltatom giver den største Varmeudvikling og de følgende kun en lavere Varme, medens her det Omvendte finder Sted; og man kan vel heraf slutte, at dersom Iltens Affinitet til Kulstof i det Hele ikke var saa stor, vilde ogsaa her det første Iltningsproduct optræde med en tilsyneladende negativ Affinitet.

Kulstoffets hele Forhold lader sig simpelt forklare derved, at Kulstoffet i den Tilstand, hvori vi kjende det som Kul, Graphit og Diamant, befinder sig i en inactiv eller passiv Tilstand, hvoraf det først maa bringes ud, forend det kan danne chemiske Forbindelser med andre Stoffer, og at der udfordres en Kraftanvendelse for at overføre Kulstoffet fra den passive Modification til en Tilstand, der er analog med de andre Grundstoffers.

Størrelsen af dette Kraftforbrug kan endnu ikke af det hidtil Bekjendte nøiagtigt beregnes, men den synes at udgjøre 70000^c for hvert Atom Kulstof. En saadan Varmemængde maa altsaa hvert Atom Kulstof ved den høiere Varmegrad, hvor den forbinder sig med andre Stoffer, optage fra Omgivelserne, førend Forbindelsen kan dannes; derved træder det modificerede Kulstof med sin særlige Affinitet i Virksomhed. At Kulstoffets Varmefylde voxer stærkt med Varmegraden (Weber, Berichte der deutschen chem. Gesellschaft, V, 303) taler ogsaa til Fordeel for den Antagelse, at Kulstoffet, førend det kan danne chemiske Forbindelser, maa forandre sin moleculære Tilstand betydeligt. Jeg skal i en særskilt Afhandling nærmere behandle dette og andre beslægtede Phænomener.



Em Bærentzen & Co lith Inst

Bidrag

til

Kundskab om Arterne af Slægten Cyamus Latr.

eller

Hvallusene.

Af

Chr. Fr. Lütken.

Dr. phil.

Med 4 Tavler og et fransk Resumé.

Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10 B. III.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

1873.

Ved de skandinaviske Naturforskeres ottende Møde i Kjøbenhavn i Juli 1860 havde jeg den Ære at forevise den zoologiske Sektion de i Universitetets daværende zoologiske Museum opbevarede nordiske *Cyamus*-Arter, og dertil at knytte følgende Bemærkninger, som jeg her tillader mig at aftrykke paa ny, efter det til den trykte Beretning om Mødet meddelte Referat:

«Siden Professor Kröyers Afhandling «om *Cyamus ceti*» i 4de Bind af «Naturhistorisk Tidsskrift» har det vel været almindelig antaget, at der i de nordiske Have kun levede een *Cyamus*-Art, og at denne havde sit Ophold paa den langhaandede Finhval (*Balænoptera longimana* eller *boops*), Keporkaken. Men allerede Martens siger udtrykkelig, at der lever en Hvallus paa «Hvalfisken» d. v. s. paa Sletbagen (*Balæna mysticetus*), ja han kjender ikke engang nogen paa Finhvalerne, der hos ham slet ikke benævnes «Hvalfiske», men «Finfiske»; og i «Zoologia Danica» tab. 119 er der afbildet en meget distinkt *Cyamus*-Art, som meget rigtigen angives at leve paa Narhvalen.

«Af nordiske Arter forevistes:

«1. Den paa Sletbagen (*Balæna mysticetus*) levende Art. Justitsraad Olrik har nedsendt adskillige Exemplarer med udtrykkelig Angivelse af, at de ere tagne paa denne Hval; den kan maaskee bedst beholde Navnet *C. ceti* Lin.

«2. Den paa Keporkaken levende Art; at den netop er tagen af denne Hval-Art, vides ligeledes af direkte Meddelelse fra Indsenderen, Justitsraad Olrik.

«3. Den paa Narhvalen levende, i «Zoologia Danica» afbildede Art, *C. nodosus* Ltk. Et i Universitetets zoologiske Museum opstillet Stykke af Huden omkring Narhvalens store Stødtand viser, at den netop har sit Ophold paa dette Sted; men om den tillige forekommer andetsteds paa Dyret, eller om den muligvis skulde være indskrænket til Hannen alene, vides endnu ikke. At den har været meddelt Museet af en anden Zoolog under Navnet *C. Belugæ* — hvilket skulde synes at tyde paa, at den var tagen af Belugaen — kunde maaskee forklares ved en ikke sjelden Misforstaaelse af Navnet «Hvidfisk», som i Grønland bruges baade om Narhvalen og om Belugaen. Den er af 3 forskjellige Samlere (Olrik, Rink og Fleischer) bleven meddelt Museet med udtrykkelig Opgivelse af at hidrøre fra Narhvalen, hvorimod der ikke var Meddeleren bekjendt noget sikkert Datum for, at den ogsaa fandtes paa den ægte «Hvidfisk».

«4. En rimeligvis ogsaa paa Narhvalen levende Art, der staaer nær ved Sletbagens, men er mindre og ogsaa ved andre Karakterer adskilt fra denne. At den lever paa Narhvalen, fremgaaer

med temmelig Vished deraf, at den var blandet i temmeligt Antal med Exemplarer af *C. nodosus*, nedsendte af Hr. Fleischer og udtrykkeligt angivne at være tagne af Narhvalen, samt deraf, at den gjentagne Gange er funden mellem Individer af denne Art, hvis Oprindelse dog ikke var constateret ved nogen udtrykkelig Angivelse. Om den muligvis opholder sig paa et andet Sted af Legemet end *C. nodosus*, eller om den forekommer i Selskab med denne, vides imidlertid endnu ikke.

«5. En paa Grindehvalen levende Art, der ligeledes — som det af et i Universitetets zoologiske Museum opstillet Stykke fremgaaer — har sit Ophold i umiddelbar Nærhed af Tænderne.

«6. En paa Døglingen levende Art, udmærket ved sin Fladhed og ved at første Fodpar er ligesaa udviklet som andet, hvorfor man maaskee kunde forsvare at opstille en egen Slægt paa denne Art*).

«Meddeleren maatte efter de foreligggende Erfaringer ganske tiltræde den Anskuelse, at hver *Cyamus*-Art sandsynligvis kun lever paa en bestemt Hvalart, og at de derfor i visse Tilfælde kunde afgive et brugbart Hjælpemiddel til Cetaceernes Artsadskillelse».

Det er det større Arbejde, hvortil der ved de sidst anførte Ord sigtes, som her forelægges. At det har trukket saa længe ud med dets Offenliggjørelse, har sine Grunde, deels mere videnskabelige, og da navnlig, at jeg ønskede ved Tilsendelse af nyt Materiale fra vore nordiske Bilande at komme til Klarhed om nogle af de ovenfor berørte Spørgsmaal, samt at oppebie de Oplysninger i Sagen, som kunde ventes at ville fremkomme andensteds i Literaturen; deels den mere personlige, men for mig meget væsenlige, at de Arbejder og Forretninger, som Oprettelsen og Indretningen af det nye Museum medførte ogsaa for mig, i lang Tid gjorde mig det umuligt at vende tilbage til dette Æmne og lægge den sidste Haand derpaa. Den voksende Interesse for Cetologien, som udmærker de sidste Aartier, har imidlertid mere end een Gang mindet mig om Videnskabens ikke uberettigede Krav til mig, at meddele nærmere Oplysning om Resultaterne af mine Studier i denne Retning, saafremt disse maatte have naaet en vis Afslutning, og saa snart jeg var i Stand til at anvende den fornødne Tid paa deres Offenliggjørelse. Til nogle af de Vanskeligheder, hvormed denne Undersøgelse har været forbunden, skal jeg senere vende tilbage; her vil jeg endnu kun berøre, at med Hensyn til Arternes Illustration har jeg maattet tage til Takke med de af mig selv udførte Konturtegninger, der vistnok have deres store Mangler, men dog, haaber jeg, besidde Nøjagtighed nok til at understøtte Opfattelsen af Arternes Fysionomi og Karakterer. Men i øvrigt maa jeg bemærke, at det ikke har været min Hensigt at levere en fuldstændig Monografi af *Cyamus*-Slægten, men kun et Bidrag til Kundskab om Arternes Skjelnemærker og Forekomst; og nogle af mit Arbejdes mulige Mangler turde maaskee finde deres Undskyldning i de ugunstige Omstændigheder, hvorunder det er bleven til, og de hyppige Afbrydelser, som

*) «Meddeleren har ikke her villet anføre de Navne, hvormed han i Universitetets zoologiske Museum har betegnet dem, for ikke at foraarsage Forvirring, hvis de skulde blive beskrevne af Andre, forinden hans Arbeide om denne Slægt udkommer».

det har maattet underkaste sig. At det dog har vundet noget ved at gjemmes længere end »*nonum in annum*«, vil fremgaae af en Sammenligning med det ovenfor aftrykte foreløbige Udtog, hvoraf det vil sees, at jeg nu kan udtale mig med større Bestemthed om adskilligt, som jeg den Gang kun kunde henstille som en mere eller mindre sikker Formodning. Er det saaledes lykkedes mig at bringe Sagen et Skridt videre og maaskee at give et Stød til, at der andensteds fra fremkommer nye Bidrag, der hidtil maatte være holdte tilbage, kan paa den anden Side Intet være mig kjærere end, om dette lille Afsnit af Zoologien snart ved Andres Bestræbelser kunde naae en Udvikling, i Forhold til hvilken mit Arbejde kun vil blive erindret som et overvundet Stadium. Men inden jeg gaaer over til min Hovedopgave, turde nogle orienterende Bemærkninger om den historiske Udvikling af vore Kundskaber om den Krebsdyrgruppe, vi benævne »Hvallusene«, være paa rette Sted, saa meget mere som en udtømmende Fremstilling deraf endnu ingensteds er given, og det uden den ikke vil være let at fatte Sammenhængen med visse Forvekslinger, der synes at gaae igjen paa sine Steder lige til de seneste Tider. Denne Art historiske Undersøgelser er det lige kjedeligt at anstille, fremstille og gjennemlæse, men de ere stundom uundgaaelige.

Den første, som omtaler og beskriver et af disse Dyr, er Fr. Martens (1675)[1]. Da det benævnes »Walfisches Lausz« og tillige afhandles under Rubriken »Walfisch«, hvorunder Martens kun forstaaer Sletbagene (Rethvalerne) og fortrinsvis Nordhvalen, *Balæna mysticetus* (om «Finfiskene» handler et eget Afsnit, hvori der ikke berettes noget om lignende Snyltere), kan der ikke være Tvivl om, at det jo er Nordhvalens *Cyamus*, som M. havde for sig. Afbildningen er rigtignok overmaade slet, Beskrivelsen derimod i de fleste Stykker rigtig og i al Fald saadan, at man ikke havde behøvet senere at forveksle den med Pycnogonider og lignende Dyr. Der meddeles ogsaa nogle biologiske Data, hvoriblandt, at de sidde paa visse Steder af Hvalen (mellem Lufferne og paa Kjønsdelene) og «bide hele Stykker ud af Huden, saa at det seer ud, som om Fugle havde hakket i den». At Nordhvalens Snylter lettere end nogen anden maatte falde i de ældre Naturforskeres Hænder, efter at Hvalfangsten havde taget sit store Opsving, er indlysende, og i Reglen tør man derfor maaskee antage, at denne Art har ligget til Grund for alle Beskrivelser indtil langt ned i nærværende Aarhundrede, for saa vidt der ikke foreligge bestemte Grunde til at antage det modsatte. — Vor næste Forfatter er Albert Seba (1734); hans Afbildninger af «*Pediculi Ceti*»[2]) ere meget maadeligere end de fleste andre i hans berømte Værk, men kunne dog med temmelig Sikkerhed henføres til samme Art (Nordhvalens); af Teksten lærer man intet

---

[1]) Spitzbergische oder Grönlandische Reisebeschreibung, S 85—87, t. Q f. D (kopieret i Udgaven 1741 af H. Egedes «Det gamle Grønlands nye Perlustration eller naturel Historie», Tavlen til S. 34, samt i Adelungs «Geschichte d. Schiffarthen»).

[2]) Locupletissimi rerum naturalium thesauri t. I p. 142, t. 90 f. 5 (*E*, *F*, en Han seet ovenfra og nedenfra, *G* en Hun, *H* en yngre Han).

uden en Fabel[3]. — Linné var ikke her som ved saa mange Lejligheder nødt til at øse sin Kundskab af Bøger alene; i «Museum Adolphi Friderici regis» (1754, fol.)[4]) forelaa der ham Exemplarer til Undersøgelse. Under «*Oniscus ceti*» meddeles der en Diagnose og en kort Beskrivelse; Sebas Afbildning citeres. Undtages et enkelt Punkt i Beskrivelsen, som ikke er mig klart[5]), er der intet i denne, som peger paa en bestemt Art, men heller intet, som udelukker den Mulighed, at det kunde være den, som lever paa *Balæna mysticetus*. Da Vished derfor neppe er at erholde, vil det dog vistnok være rigtigst at lade Artsnavnet »*ceti*«, der af senere Forfattere er brugt om mindst fire forskjellige Arter, ganske falde. «*Oniscus ceti*» træffes fremdeles i «Systema Naturæ» (1758) (t. I p. 636) med samme Diagnose; foruden «Mus. Ad. Frid.» og Seba citerer nu meget rigtigt Martens, som er den eneste Forfatter, der anføres i »Fauna Suecica« (1761, 2den Udg.)[6]). Diagnosen er her forandret og forbedret; derimod indkom der i XIIte Udgave af «Systemet» (1767) (t. I p. 2, p. 1060) en beklagelig Forvirring, der har efterladt sig Spor lige til de seneste Tider. Diagnosen er vel den samme som 1761 (med en lille Ændring, som formodenlig kun er en Tryk- eller Skrivfejl)[7]), men Citatet af Martens er udskudt, og der tilføjes en Advarsel mod at forvexle den med «*Phalangium Balænarum*» (ɔ: Brünnichs *Pycnogonum*), til hvilken man nu finder Martens's «Hvalfiskelus» henført som Synonym. Hertil forledtes Linné af Baster, som i sine i Mellemtiden (1765) udkomne «Opuscula subcesiva»[8]) havde beskrevet og afbildet en Hav-Edderkop (*Pycnogonum littorale*) i den Tanke, at det var den af Martens beskrevne «Hvalfiskelus», uagtet det ikke undgik ham, at den ham foreliggende Form i meget væsenlige Træk var forskjellig saavel fra Martens's Fremstilling af «Hvalfiskelusen» som fra Linnés Slægtskarakter for *Oniscus*. — Vel hævdede Pallas (1772)[9]) igjen det rette og berigtigede Linnés Henførelse af den Martens'ske Form til «*Acarus polygonopus*» (*Pycnogonum*); men Forvirringen var nu en Gang sluppen ind og gjennem lange Tider ikke

---

[3]) Nemlig, at de efter Matrosernes Sigende krybe ind i Hvalernes Øren, «hasque morsu perforant».

[4]) P. 89. «Oniscus ovalis, segmentis excepto secundo in medio interruptis («med afbrutna leder»). Caput parvum». «Antennæ 2, singulæ articulis 4; corpus ovale, magnitudine Ricini, sectum segmentis 7, interruptis in medio, excepto solo secundo. Pedes paribus 7, quorum 1 minutum sub capite, 2 crassius ovatum, 3 & 4 mutica, 5, 6, 7 ovata, uncinata»..

[5]) De her lige ovenfor udhævede Ord

[6]) P. 499, Nr. 2056. «*Oniscus ceti* ovalis, segmentis distinctis, pedibus tertii quartique paris linearibus, muticis». «Corpus ovale, 7 articulis distinctis. Caput quod primus articulus minimus. Pedes 1, 2, 5, 6, 7 chelis crassis ungue mobili acuto terminati. Pedes vero 3, 4 paris filiformes, mutici; primum par sub corpore situm est. Corporis articuli magis remoti & distincti quam in reliquis speciebus». Cfr. p. 288 (*Phalangium balænarum*).

[7]) «*Ovaticis*» for «*muticis*»; rettet af de Geer og Gmelin, men ikke desto mindre gjentaget af senere Forfattere, f. Ex. i Blumenbachs «Handbuch d. Naturgeschichte».

[8]) Tom. II. lib. 3, p. 139, t. XII f. III, *A—D*.

[9]) Spicilegia Zoologica, quibus novæ imprimis et obscuræ animalium species iconibus descriptionibus atque commentariis illustrantur, fasc. 9nus, p. 76—78, tab. 4 f. 14, *A—C*.

til at udrydde. Pallas's Beskrivelse er i det hele rigtig, hans Afbildninger derimod meget ufuldkomne; sandsynligt er det dog, at ogsaa han har havt Nordhvalens Snylter for sig. Han er den første, som gjør opmærksom paa Kjønsforskjellen (Æggepladerne), paa Forskjellen mellem de gamle og Ungerne i Rugeposen, paa den store Lighed (som han dog noget overdriver) mellem disse og Caprellerne (»*Oniscus scolopendroides*»), og overhovedet paa det nære Slægtskab mellem disse og Hvallusene, hvorfor han ogsaa hævder Caprellerne en Plads i *Oniscus*-Slægten. — Ogsaa de Geer (1778)[10], som benævner Hvallusen »*Squilla Balæni*», har sikkert havt Nordhvalens oftnævnte Snylter for sig; Beskrivelsen er udførlig og i det hele rigtig, Afbildningen bedre end hans Forgængeres. Heller ikke Gmelin (1788)[11] eller Otto Fabricius (1780)[12] gjorde sig skyldige i at forveksle Hvallusene eller Efterretningerne om dem med *Pycnogonum* (*littorale*); den sidst nævnte Forfatter beskriver dem dog ikke, men henviser til Pallas's Beskrivelse; hans Tilføjelse »mine Exemplarer fik jeg af *Balæna boops*» have ikke (som der dog var ret god Anledning til) vakt nogen Formodning om, at den af ham iagttagne Art var en anden end Sebas, Pallas's, de Geers osv., men har derimod rimeligvis senere affødt en anden Fejltagelse: den nemlig, at »den nordiske Hvallus» kun forekom paa *Balænoptera* (*Megaptera*) *boops*. — Abildgaards Fremstilling af »*Oniscus ceti*« i tredje Bind af »Zoologia Danica (1789) har især Interesse derved, at de til Grund for samme liggende Exemplarer hidrørte fra en tredje Hvalart, nemlig Narhvalen[13]). Af Beskrivelsen vilde Arten ikke kunne bestemmes, men skjøndt Afbildningerne ikke ere gode, kan der dog ingen Tvivl være om, at det er *C. nodosus* m., som er afbildet.

I sine tidligere Skrifter[14]) gav J. C. Fabricius endnu ligesom de fleste af sine Forgængere Hvallusene Plads i Slægten *Oniscus*, men dog ikke uden at udtale en Tvivl om

---

10) Mémoires pour servir à l'histoire des Insectes, t. VII. p. 540—44, t. 42 f. 6—10 (En Han, 16Mm lang). »Squilla (Balæni) corpore ovali depresso, segmentis distinctis, pedibus cheliferis, tertii quartique paris linearibus muticis». — Ved »*Squilla*» forstod de Geer »uvingede Insekter med 14 Been, de to forreste »à ténailles simples», 4 børstedannede eller traaddannede Følere og i Almindelighed tynde Blade under Halen». Hans andre »*Squilla*»-Arter ere *Asellus aquaticus*, *Idothea entomon* og *emarginata*, *Gammarus pulex* og *Squilla mantis*.

11) C. à Linné Systema Naturæ (ed. XIII) t. I p. V, p. 3011; cfr. p. 2912.

12) Fauna Grønlandica p. 253. Diagnosen er Linnés, lidt ændret: »*Oniscus Ceti*, ecaudatus, segmentis distinctis, pedibus tertii quartiqve paris linearibus mollibus». Grønl. Arberub-Koma.

13) P. 69, t. 119 f. 13—17 (Han og Hun). »*Oniscus* ecaudatus, segmentis sex distinctis, pedum tertii quartique paris ultimo articulo ventricoso mutico» (Linnés Diagnose altsaa ændret noget efter den foreliggende Form). »Specimina hic descripta ad gingivas circa radices dentium Monodontis capta sunt».

14) »Systema Entomologiæ» (1775) p. 299; i at henføre Martens's »Hvallus» til »*Pediculus? Balænarum*» (ↄ: *Pycnogonum littorale*) følger han endnu Linné; derimod er dette rettet (formodenlig efter Pallas, hvis Værk er blandt de citerede Forfattere) i »Species Insectorum» (1781) Tom. I p. 378, saavel som i F.s senere Arbejder. — »Mantissa Insectorum» (1787) I p. 242.

Rigtigheden deraf; senere — med en lignende Tvivl — i Slægten *Cymothoa*[15]; senest[16] i Slægten *Pycnogonum* Brünn. ved Siden af «*P. balænarum*» (ɔ: *P. littorale*), formodenlig uden selv nogensinde at have havt Lejlighed til at undersøge nogen virkelig Hvallus, hvilket da ogsaa til en vis Grad kan forklare, at en saa udmærket Zoolog kunde foretage en saa uheldig Sammenstilling. I nogen Forveksling af Hvallusen og Hav-Edderkoppen som Arter eller af, hvad der i biologisk Henseende vidstes om hver af dem, gjorde J. C. Fabricius sig i al Fald ikke skyldig; han lader den første rigtig leve «*in Balænis*», den sidste «under Stene». Allerede 1797 opstillede Latreille[17] imidlertid Slægten *Cyamus* for de virkelige Hvallus og karakteriserede den nogenlunde rigtigt; i Lamarcks «Systême» (1801)[18] træffe vi derfor Hvallusene og Hav-Edderkopperne adskilte igjen — «*Pycnogonum balænarum*» (som de sidste uheldigvis bleve ved at hedde længe endnu) blandt «Arachnides palpistes», *Cyamus* Latr. (hvis Karakteristik indeholder væsentlige Urigtigheder) i første Afdeling af «les Crustacés sessilocles» mellem *Gammarus*, *Asellus* og *Caprella* paa den ene Side, *Ligia* og *Oniscus* paa den anden. Bosc (1802)[19] blev alligevel staaende paa J. C. Fabricius's sidste Standpunkt, uden dog at overse, at Hvallusen, hvoraf han leverede den bedste Afbildning, der endnu havdes, besad ganske andre Karakterer end de, han tillægger sin anden Art af »*Cyame* (*Pycnogonum* Fabr.»)[20]. Den første udførlige og i det hele nøjagtige

---

15) Entomologia systematica (1793) t. II p. 509.

16) «Supplementum entomologiæ systematicæ» (1795) p. 570. Slægtskarakteren lyder her: «haustellum tubulosum conicum absque setis, palpi ad basin haustellati».

17) «Précis des caractères génériques des Insectes, disposés dans un ordre naturel» p. 199. *Cyamus*-Slægten har her sin Plads blandt «Myriapoderne» sammen med *Asellus*, *Oniscus*, *Julus* og *Scolopendra*. Den karakteriseres saaledes: «Quatre antennes très courtes, antérieures coniques, de quatre articles, dont le dernier fort court; postérieures inserées inférieurement, plus courtes que la tête, de trois articles. Antennules [ɔ: Kjæbefødderne?] obsolètes. Corps ovale deprimé, crustacé. Tête distincte. Six anneaux. Quatorze pattes; les deux premières plus pétites, inserées sous la téte, les 1, 2, 5, 6 et 7 paires terminées par un crochet». *Pycnogonum* har derimod sin Plads blandt «*Acephala*» ɔ: Arachniderne.

18) Systême des animaux sans vertèbres p. 166.

19) «Histoire naturelle des Crustacés» II p. 202, t. 16 f. 2. — Blumenbach, der («Handb. d. Naturgeschichte») ganske holdt sig til 12te Udgave af Linnés System, skilte vel Hvallusen fra Søspindelen, og opførte den ene som «*Oniscus ceti*», den anden som «*Phalangium balænarum*», men begge som «Hvalfiskelus».

20) Bosc's Slægtsdiagnose, som ordret er laant af Lamarck, er følgende: «quatre antennes inégales; les deux antèrieures plus longues, setaceés. Un sucoir (!) simple retractile, sortant d'une fente courte située sous la téte. Deux antennules [hvorved her vel ikke kan forstaaes Kjæbefødderne, men første Fodpar] inserées à la base de la bouche. Deux yeux. Corps ovale, deprimé, à six segmens pedifères. Six paires de pattes, chaque patte (!) terminée par un crochet». Beskrivelsen af selve Hvallusen er i øvrigt temmelig rigtig, naar undtages den overdrevne (fordoblede) Størrelse (30^{mm} Længde og 15^{mm} Brede), som han tillægger den, og Beskrivelsen af Munden som «dannet af en kegledannet Snabel, ledsaget af fine Smaa-Antenner» m. m., som det vilde være for vidtløftigt at udhæve her. Han benægter (forledt af sin Opfattelse af Munden som en Sugemund), at de kunne gnave Hvalernes Hud: «le Cyame ne peut que faire un trou avec sa trompe et sucer le sang ou la graisse de la baleine». — Om Slægtens anden Art, den egenlige *Pycnogonum* (i Brün-

Karakteristik af en *Cyamus* gav Latreille (1803)[21]); men mærkeligt nok siger han, at den er beskreven efter et Individ, som han har fundet paa en Fisk (!) i Pariser-Museet, og af et andet Sted i samme og senere Artikler kan man see, at den skulde være funden «paa Gjællerne af en Fisk af Makrel-Familien». Hvor stor Paalidelighed og Nøjagtighed man end ellers vil tillægge denne udmærkede Zoolog, kan der dog ingen Tvivl være om, at kun en Fejltagelse af en eller anden Art kan ligge til Grund for denne vildledende Angivelse. Ligesom i sammes «Genera» (1806), hvor alle Isopoder ligeledes endnu henføres til «*Insecta tetracera*», har *Cyamus*-Slægten sin fuldkommen rigtige Plads sidst i Familien «*Gammarinæ*» (i 2den Orden: «*Branchiogastra*» af «*Crustacea Malacostraca*»), umiddelbart efter Slægten *Caprella*, i Modsætning til hvilken Slægtskarakteren i det sidst nævnte Værk[22]) er affattet. Leach havde først[23]) opstillet Slægten *Panope* for Latreilles *Cyami*, hvilken Benævnelse han senere[24]) ombyttede med *Larunda*, som heller ikke har formaaet at gjøre sig gjældende; ogsaa Leach stillede Hvallusen sammen med Caprellinerne. Det var egenlig ikke noget Fremskridt, at Latreille senere (1817)[25]) gav disse to Slægter, Caprellerne og Cyamerne, Plads blandt Isopoderne som «Isopodes cystibranches», uden for saa vidt disse Dyr fra nu af dannede en egen skarpt begrændset Gruppe blandt Leddyrene, som i øvrigt endnu i samme Aar (?) («Nouv. Dictionn. d'hist. natur. t. X p. 277»)*) ophøjedes til en af Krebsdyrenes seks Ordener, under Navnet «*Læmodipodes*»; det hedder endnu i «Règne Animal», at *Cyamus ceti* lever «plus particulièrement» paa Hvaldyr, men dette berettes ligeledes uden Indskrænkning om Pyknogonerne. Hos Lamarck (1818)[26]) er dette dog

---

nichs og Nutidens Forstand) hedder det, at «nogle Forfattere sige, at den lever paa Hvaler, andre under Stene, men at dens Snabel og krumme Kløer vidne om, at den lever af Blod (!) og hæfter sig fast til andre Dyr for at udsuge dem, saa at det kun er tilfældigt, at den er bleven funden under Stene». — Samme Forfatters Artikel «*Cyame*» i «Nouveau Dictionnaire d'histoire naturelle» (1803), t. VII (Déterville) slutter sig ganske til Artiklen i «Histoire des Crustacés».

21) Histoire naturelle générale et particulière des Crustacés et des Insectes (Suites à Buffon, Sonnini) Vol. VI (An XI) p. 328. Afbildningen er en Kopi af Boscs. Latreille siger, at hans Beskrivelse er udkastet efter «un individu que j'ai trouvé sur un poisson», men nogle Træk af den ere dog laante fra Havdyr, andre fra Hundyr. Cyamerne have her Plads i «la famille des Crevettines» sammen med *Phronima*, *Talitrus*, *Gammarus* og *Caprella*.

22) Genera Crustaceorum et Insectorum I p. 60. Jfr. sammes «Considérations générales sur l'ordre naturel des animaux composant les classes des Crustacés, des Arachnides et des Insectes; avec un tableau méthodique de leurs genres disposés en familles» (1810) p. 104.

23) Edinburgh Encyclopædia, VII (1813—14), Art. Crustaceology p. 404. Jeg har ikke kunnet benytte en senere Artikel af samme Forfatter i «Supplem. Encycl. Brittan.» I p. 420, t. 21.

24) A general arrangement of the classes Crustacea, Myriopoda and Arachnides, with descriptions of some new genera and species (Transactions of the Linnean Society Vol. XI) p. 363 (1815).

25) Cuvier, Le Règne Animal, t. III p. 111.

26) Histoire naturelle des animaux sans vertèbres t. V. p. 171—75.

*) Citeret efter Leach (Dictionn. d. sciences natur. t. XII p. 72); 2den Udgave af «Dict. d'hist. nat.» har ikke været mig tilgængelig.

atter modificeret derhen, at Pyknogonerne findes «under Stene i Nærheden af Kysterne samt paa Hvaler», en Mening der, som det ovenfor er oplyst, kun støtter sig paa den uheldige Forveksling af Baster og det ikke mindre uheldige Artsnavn «*balænarum*», som Linné som Følge deraf havde tildelt hin almindelige nordevropæiske «*Phalangium* (L.)»-eller *Pycnogonum*-Art. Lamarck henfører i øvrigt *Cyamus*-Slægten til Caprellinernes Familie, der svarer til Latreilles «Cystibranches» eller Læmodipoder; Slægts-Karakteristiken er endnu temmelig mangelfuld; men man faaer her første Gang en Antydning af, at der maaskee levede mere end een *Cyamus*-Art, i det der tilføjes i en Anmærkning: «Latreille kjender en anden meget lille, ostindisk, endnu ubeskreven Art». — Noget nyt kom ikke til ved Desmarests[27]) Bearbejdelse af Crustaceernes Systematik (1823). Efter hvad Latreille udtaler i 2den Udgave af «Règne Animal»[28]) danne Caprellerne og Cyamerne egenlig kun een Slægt, som ifølge Aldersret maatte faae Navn af *Cyamus*; af Underslægten «*ovalia*» eller *Cyamus* pr. (*Larunda* Leach) opføres tre Arter, af hvilke dog kun den ene med Navn, «le Cyame de la Baleine, den meest bekjendte Art, som ogsaa lever paa Makrelen» (!); en anden meget lignende, hjembragt af Delalande fra hans Rejse til Kap; og endelig en meget mindre Art, «som lever paa Hvaler i de ostindiske Have». Den falske Forestilling, at Cyamerne ogsaa kunne forekomme paa (Gjællerne af) visse Fiske[29]) af Makrel-Familien, gaaer blandt andet igjen hos Risso[30]), der særligt nævner Thunfiskene som deres Værter og veed at tilføje, at de synes at lide meget af dem, og at de, naar de ere stærkt besatte af dem, blive ligesom rasende og i denne Tilstand ofte springe op af Vandet — en Oplysning, der røber, at her foreligger en Forveksling med den i Akselhulen hos Albekorer og andre *Thynnus*-Arter snyltende *Brachiella Thynni*[31]).

For ikke at afbryde den historiske Rækkefølge af de systematiske Forfattere, hvis Behandling af Hvallusenes Naturhistorie jeg her har refereret i størst mulig Korthed, har

---

[27]) Considérations générales sur la classe des Crustacés (1825) (Aftryk af «Dictionnaire des sciences naturelles (ed. Levrault) t. 28, p. 364. — Endnu i 44de Bind af dette Værk (1826) faaer man den Beskeed, at *Pycnogonum* er de Havdyr, som man i Almindelighed kalder «poux de la Baleine».)

[28]) Cuvier, le Règne Animal (2den Udg.), t. IV. p. 127—29 (1829).

[29]) F. Ex. Encyclopédie méthodique, Entomologie par Mr. de Latreille (1825) t. X p. 217.

[30]) Histoire naturelle des Crustacés des environs de Nice (1816) p. 131. Imidlertid synes Rissos Beskrivelse at være original, da han angiver Maal (12mm Længde, 8mm Brede); om R. har havt for sig Exemplarer tagne af en eller anden i Middelhavet forekommende Hval (Finhval: «Baleinoptère» ??) eller han, forudsættende som afgjort, at der maatte forekomme Hvallus («*Cyamus ceti*») paa Middelhavets Hvaler, har benyttet Exemplarer af nordiske Hvallus — det maa jeg lade henstaae uafgjort. I sit senere Arbejde, «Histoire naturelle des principales productions de l'Europe méridionale et particulièrement de celle des environs de Nice et des Alpes maritimes» t. V (1826) p. 101—3 forenede Risso Læmodipoder og Pyknogonider til een Gruppe, hvori *Caprella* og *Nymphon* stilles Side om Side og Hvallusene henføres til Slægten «*Pygnogonum, Ciame*».

[31]) Steenstrup & Lütken: Bidrag til Kundskab om det aabne Havs Snyltekrebs og Lernæer osv. (K. D. Vidensk. Selsk. Skr. V Række, naturv. og mathem. Afdeling. V Bind, 1861) S. 420 (80).

jeg været nødt til at forbigaae paa sit rette Sted i Tidsfølgen de to Forfattere, som i hele det omhandlede Tidsrum havde gjort meest for at udrede Hvallusenes ydre og indre Bygning, nemlig J. C. Savigny — hvis berømte «Memoirer»s første Deel allerede udkom 1816 og saaledes kunde benyttes ved Redaktionen af første Udgave af «Règne Animal», af «Hist. d. animaux sans vertèbres» og «Considérations» (Desmarest) — og Treviranus. Savigny[32]) var den første, som analyserede Munddelene hos *Cyamus*, og hans Fremstilling af dem er vistnok i det hele rigtig; men han begik den besønderlige Fejltagelse at tillægge den foruden de to smaa enkelte Øjne paa Hovedets Rygside endnu et Par (sammensmeltede?) store, sammensatte Ojne, som skulde indfatte Hovedets Forrand under Antennerne — en Karakter, som derfor paa Savignys Autoritet i de ovennævnte systematiske Værker bliver tilskrevet Hvallusene[33]). G. R. Treviranus's[34]) Afbildning og Beskrivelse af Hvallusens Ydre var god, hans Opfattelse af Munddelene derimod meget ufuldkommen og hans Meddelelser om den indre Bygning maaskee i det hele rigtige, men ikke meget righoldige. — I denne Periode af *Cyamus*-Slægtens Historie falder endnu Says Beskrivelse[33]) af en (neppe gjenkjendelig) 1/10 Tomme lang *Cyamus*-Art (*C. abbreviatus*), tagen af en ubekjendt *Balæna*-Art.

Saaledes stod altsaa Sagen endnu ved 1830'erne; Cyamernes ydre Bygning saavel som Beskaffenheden af deres Munddele var i det hele vel kjendt og rigtigt opfattet, ligeledes deres systematiske Plads som nærmest beslægtede med Caprellerne og gjennem dem med Amphipoderne. Men skjøndt man havde iagtaget Hvallus paa tre forskjellige nordiske Hvalarter (Nordhvalen, Narhvalen og Pukkelhvalen), var denne Omstændighed dog forbleven ganske upaaagtet, og det var ikke faldet Nogen ind af den Grund at formode Tilværelsen af mere end een nordisk *Cyamus*-Art. Derimod var det antydet, at der i de sydlige Have fandtes endnu to andre. Dette blev nu i 1834 bekræftet af Roussel de Vauzème, hvis Undersøgelser[35]) over Sydhvalens Hvallus gjorde Epoke i dette Tillægskapitel til Cetologien. Lejligheden til at anstille dem fik han som Læge ombord i en fransk Hvalfanger i den sydlige Deel af Atlanterhavet i Nærheden af Tristan d'Acunha og Maluinerne. Han lærte først Zoologerne at skjelne mellem de tre Arter, som beboe Sydhvalen (*Balæna australis*) (*C. ovalis, erraticus* og *gracilis*); han meddeler en udførlig Beskrivelse og anatomisk Undersøgelse af den

[32]) Mémoires sur les animaux sans vertèbres, première partie, tab. VI. I, p. 54 og 110. Om Pyknogonerne hedder det: «les P. ne sont point parasites à la manière des Cyames. Il paraît qu'ils s'attaquent principalement aux coquillages bivalves».

[33]) Ogsaa Say gjentager denne Fejl i Slægtsdiagnosen («eyes two, stemmata two»), skjøndt han leverede en Originalbeskrivelse. (An Account of the Crustacea of the United States: Journal of the Academy of natural Sciences of Philadelphia, Vol. I pt. 2. p. 392).

[34]) Abhandlungen über den innern Bau der ungeflügelten Insekten. Siebente Abh. Die Wallfischlaus (Vermischte Schriften anatomischen und physiologischen Inhalts von G. R. und L. C. Treviranus, 2ter Band (1817) S. 3, t. I).

[35]) Mémoire sur le *Cyamus ceti* (Latr.) de la classe des Crustacés (Annales des sciences naturelles, seconde série, t. I. (Zool.) (1834) p. 239 & 257, tab. 8—9).

første af disse, korte Karakteristiker af de andre, gode Afbildninger af dem alle og endelig interessante biologiske Oplysninger. Uagtet Forfatteren imødegaaer den Indvending, som Milne-Edwards og Audouin havde gjort ham, at *C. gracilis* vel kunde være Ungen (af *C. ovalis*) og ikke en selvstændig Art, seer man dog, at endnu 1838[36]) betvivlede M. E. disse tre Arters Selvstændighed, idet han henviste til de store Aldersforskjelligheder, som han selv tidligere havde paavist[37]) hos *C. ovalis* ved at sammenligne den voxne Hun med de i dens Bughule liggende spæde Unger. Senere kom han dog til et andet Resultat, og i sin «Histoire naturelle des Crustacés (1840)[38]) antager han de tre Rousselske Arter, men begaaer den alvorlige Fejl, med *C. erraticus* R. V. at identificere alle af ældre Forfattere (Seba, Linné, Pallas, de Geer, Abildgaard, J. C. Fabricius, Lamarck, Latreille, Leach og Desmarest) beskrevne og afbildede Hvallus (iblandt hvilke der, foruden Nordhvalens, i Virkeligheden var skjult to andre Arter, alle tre forskjellige fra *C. erraticus*), eller med andre Ord alle paa nordiske Hvaler (særligt Nordhvalen) levende og den Gang mere eller mindre bekjendte Hvallus-Former. Foruden de tre Rousselske Arter nævnes *C. Delphini* Guérin[39]), en endnu den Dag idag ikke nærmere kjendt Art. Den af Milne-Edwards begaaede Fejl blev tildels rettet af Krøyer (1843)[40]), der viste, at den nordiske Hvallus-Art, som han beskrev under Navn af *C. ceti*, var forskjellig fra *C. erraticus*, men selv begik han den Fejl kun at antage een nordisk Hvallus-Art; allerede hvad der forelaa om denne Sag i den nordiske Litteratur kunde have lært ham, at hvis hans Antagelse, at «*Cyamus*-Arterne i Reglen have bestemte Hval-Arter anviste til Bolig», er rigtig (hvad den vistnok i det hele er), maatte de af Martens og Abildgaard beskrevne Former være andre Arter, end dem Otto Fabricius havde for sig. Man begriber ikke, hvorfor en Artikel i «Zoologia Danica» indirekte (d. v. s. uden udtrykkelig at nævnes) af Krøyer udskydes af «de sikkre og brugbare Efterretninger om disse Dyrs Forekommen, som Videnskaben hidtil besidder», eller hvorledes denne kundskabsrige Zoolog kan have overseet, at Martens's «Hvalfiskelus» ikke hidrørte fra en Finhval, men fra en Sletbag, — en Uagtsomhed, som atter foranledigede Krøyer til den vildledende Antagelse, at den af ham beskrevne Form (Nordhvalens Snylter) var den, der lever paa den langhaandede Finhval (Krepokaken).

---

[36]) I den nye Udgave af Lamarcks Histoire naturelle des animaux sans vertèbres, t. V. p. 269.

[37]) Observations sur les changemens de forme que divers Crustacés éprouvent dans le jeune âge. (Annales des sciences naturelles, seconde série, t. 3 (Zool.) 1835, t. 14 f. 13—14).

[38]) t. III p. 110. M. E. har her ladet Fortællingen om, at der ogsaa gives Cyamer paa Fiske, falde, men oplyser os ikke om, hvad der kan have ligget til Grund for Latreilles bestemte Angivelse i denne Retning. (Mon den ikke ualmindelige Forveksling af Delfiner og Dolfiner?). Derimod lader han endnu Pyknogonerne ogsaa leve paa Fiske, hvilket neppe er det mindste rigtigere.

[39]) Iconographie du Règne Animal, Crustacés, t. 28 f. 5—5a. Ifølge Spence Bate var den tagen af Kjønsdelene paa en Delfin ved Antillerne; selv har jeg ikke kunnet benytte Texten til det Guérin'ske Værk, som citeres af Sp. B.

[40]) Om *Cyamus Ceti* (Naturhistorisk Tidsskrift, 4 Bd. S. 474 og flgd.).

Siden den Tid er der ikke kommet mange nye Bidrag til *Cyamus*-Slægtens Historie, bortseet fra min korte Meddelelse til Naturforskermødet i 1860. P. H. Gosse gav (1855)[41]) en Beskrivelse af en ny Art (*C. Thompsoni*), som var tagen paa en Døgling, og Spence Bate har i to Arbejder[42]) gjort Rede dels for *Cyamus*-Slægten i Almindelighed, dels for dens formentlige brittiske Arter; da jeg i det følgende oftere vil faae Lejlighed til at dvæle ved disse Arbejder, er det ikke fornødent her at skænke dem en udførligere Omtale, der under alle Omstændigheder ikke kunde blive meget anerkjendende; det maa være nok at udtale, at de ikke have gjort mit Arbejde overflødigt, og at det synes at mangle al Grund, naar Sp. B. og andre engelske Forfattere[43]) opføre samtlige Roussels Sydhavs-Arter som engelske. Til allersidst skal jeg endnu nævne Dr. Alex. Brandts Arbejde over Barkdyrets (*Rhytina*'s) Hvallus, til hvilket jeg senere vil faae Lejlighed til at vende tilbage. Diagnoserne af de nordiske Arter, som ere mig bekjendte, har jeg efter Anmodning meddelt Hr. Axel Boeck, i hvis Værk over de nordiske Amphipoder[44]) de ville findes optagne.

Jeg haaber, at det er lykkedes mig, i denne sammentrængte historiske Fremstilling at gjøre nogenlunde Rede for, hvorledes Kundskaben om disse Dyr har udviklet sig, hvilke Fejltagelser der have ledsaget og tildels hæmmet dens Udvikling, og hvordan Sagens Stilling var, da jeg begyndte at beskæftige mig med dette Æmne. Maaskee har jeg medtaget et og andet, som er saa ubetydeligt, at det gjerne kunde være overgivet til Forglemmelse, men hvorved jeg dog maaskee kan spare Andre unyttigt Arbejde; derimod vil jeg haabe, at intet væsenligt Moment i *Cyamus*-Slægtens Historie er undgaaet mig eller, mod min Villie, bleven sat i et mindre rigtigt Lys.

Der staaer kun tilbage for mig at berøre et Par almindelige Spørgsmaal, inden jeg gaaer over til min egenlige Opgave: Arternes Udredning. Jeg har i det følgende beskrevet **ni** Arter, hvis Forekomst og Værter ere bekjendte; af disse ere de fire nye, for saa vidt der

---

[41]) Notes on some new or little known marine animals, fascic. II (Annals and Magazine of natural History, Vol. XVI, 2d series, p. 30—31).

[42]) C. Spence Bate and J. O. Westwood: a History of british sessile-eyed Crustacea, Vol. II p. 97—98 (1866) (*C. ceti, ovalis, gracilis* og *Thompsoni*). — Spence Bate, Catalogue of the specimens of Amphipodous Crustacea in the collection of the British Museum (1862) p. 366—68, t. 58.

[43]) C. Spence Bate: A Synopsis of the British Edriophthalmous Crustacea pt. I. Amphipoda (Ann. a. Mag., 2d Series, vol. XIX (1857) p. 152 og vol. XX p. 525). A. White: A popular history of British Crustacea (1857) p. 219. — Kun under den Forudsætning, at Sydhvalernes Hvallus-Arter muligvis ogsaa levede paa Sarden (Nordkaperen) (jfr. S. 243 og 244, Anm. 49), kunde disse Arter muligvis faae Borgerret i den europæiske (brittiske) Fauna. — Jeg har hverken kunnet benytte Whites «Catalogue of British Crustacea» eller Gosses «British marine Zoology», men antager heller ikke, at nogen Oplysning i Sagen derved er gaaet tabt for mig.

[44]) Crustacea amphipoda borealia et arctica. (Christiania Vidensk. Selsk. Forhandl. for 1870) S. 279—80. Mit Arbejdes endelige Gjennemsyn har foranlediget enkelte Ændringer i Diagnoserne saaledes som de her meddeles.

ikke tidligere har været tillagt dem egne Artsnavne og heller ikke offenliggjort Beskrivelser af dem (*C. monodontis, boopis, nodosus* og *globicipitis*); een af dem (*C. monodontis*) er aldeles ikke tidligere omtalt i Litteraturen. Disse ni Arter ere fundne dels paa Bardehvaler, dels paa Tandhvaler, saaledes som det vil sees af følgende Oversigt:

Af **Bardehvaler** kjendes der Hvallus paa:

Nordhvalen (*Balæna mysticeti*): *Cyamus mysticeti* m.

Sydhvalerne (*Balæna australis* og *B. japonica*?): *C. ovalis, erraticus* og *gracilis* R. V.

Pukkelhvalen (*Megaptera boops*): *C. boopis* m.

Af **Tandhvaler** paa:

Grindehvalen (*Globiocephalus melas*): *C. globicipitis* m.

Narhvalen (*Monodon monoceros*): *C. nodosus* og *C. monodontis m.*

Døglingerne (*Hyperoodon rostratus* og *H. latifrons*): *Platycyamus Thompsoni* (G.) Hertil kommer fremdeles 1) den i det følgende beskrevne (men endnu noget tvivlsomme) *C. pacificus* m., hvis Vært er ubekjendt; 2) en Art fra det nordlige stille Hav (*C. Kessleri* Brandt), rimeligvis af en *Balæna* af Sydhvalernes og «Nordkaperens» Gruppe; og endelig 3) en rimeligvis uddød eller udryddet Art, om hvilken vi besidde den bestemteste historiske Kundskab, men kun en meget ufuldstændig zoologisk, nemlig Barkdyrets Hvallus (*C. Rhytinæ* Br.), hvis denne ellers er forskjellig fra *C. ovalis*, hvad jeg dog bestemt antager den for at have været, og hvis den overhovedet var en *Cyamus*, hvad vel kunde være mere tvivlsomt, og hvorom mere siden. Men hermed er Listen ikke udtømt. Man kan dertil føje flere Arter, hvis Tilværelse er bevislig, men hvis Karakterer endnu kun kjendes meget ufuldstændigt eller aldeles ikke. 1) Den Hvallus, der, som Krøyer (l. c.) har gjort opmærksom paa, omtales af Bennett som levende paa Kaskelotten[45]), paa hvilket Hvaldyr det dog ikke var lykkedes Roussell at finde nogen *Cyamus*. (Den Mulighed maa dog ved denne Optælling ikke lades ude af Betragtning, at *C. pacificus*, hvis Vært er mig ubekjendt, kunde være Kaskelot-Lusen). 2) De af flere Forfattere paa mere eller mindre ubekjendte Arter af Delfiner fundne Hvallus, af hvilke den bedst kjendte er den af Guérin-Méneville paa en vestindisk Delfin fundne *C. Delphini*, som ikke senere vides at være gjenfunden. Af en derfra under alle Omstændigheder forskjellig Art opbevares der Exemplarer i Museet, som ligeledes angives at være tagne af «en Delfin»

---

[45]) Krøyer citerer (l. c. S. 485) en Meddelelse af F. D. Bennett i «Proc. Zool. Soc.» 1837 p. 39, hvor disse Snyltedyr benævnes *Onisci*. I samme Forfatters noget senere «Narrative of a Whaling voyage round the globe», Vol. II p. 169 (1840), benævnes de ligefrem «Whale-lice (*Larunda ceti*)». Derimod hedder det sstds p. 237 om en «Delfin, der var større end den almindelige Delfin (*Delphinus delphis*), og som i Mellemrummene imellem Tænderne i begge Kjæber havde Huller til at optage Tænderne fra den modsatte Kjæbe»: «some *Onisci* adhered to the body; and a cluster of the elegant soft barnacle, *Otion Cuvieri*, was pendant from the lower jaw». Ligeledes hedder det p. 234 om «the Blackfish of South Sea Whalers»: «a few Whale-lice (*Larunda ceti*) adhere to the skin of this Cetacean».

(uvist hvor); da de tilmed ikke ere fuldvoksne, har jeg ikke tildelt dem noget Artsnavn og ikke optaget dem i ovenstaaende Oversigt[46]). 3) En Art, der maa antages at leve paa den nu saa sjeldne eller muligvis udryddede «Nordkaper» eller «Sarde» (*Balæna glacialis* eller *biscayensis*). Paa en i Prof. Reinhardts Besiddelse værende steentrykt Afbildning af den Hval, som den 17de Januar 1854 strandede ved San Sebastian, og hvilken Afbildning har til Underskrift: Copia al natural del Ballenato muerto en la playa de S. Sebastian el 17de Enero de 1854; hecha por las indicaciones y direccion del Dr. Monedero», findes der tillige afbildet en Skabning, hvorom Underskriften giver følgende Oplysning: «A. Representa de tamaño natural uno de los *piojos de Ballena*, de los que tenia muchos en la cabeza y parte superior del cuerpo». Men mærkeligt nok gjengiver Billedet af denne «piojo de Ballena» ikke en *Cyamus*, men en *Pycnogonum*! Den tidligere saa almindelige Forveksling mellem disse to Dyreformer har vistnok givet Anledning til dette nye «qui pro quo», hvorved Billedet af en «Søspindel» er kommet i Stedet for Billedet af en virkelig (og desto værre ellers aldeles ubekjendt) Hvallus[47]). — Lades den under alle Omstændigheder nu uddøde Form, som levede paa den Stellerske Søko, ude af Betragtning, har man altsaa Vished for Tilværelsen (i Nutiden) af mindst 15 eller 14 Arter, af hvilke omtrent Halvdelen beboer **Bardehvaler** (Rethvaler og Pukkelhvaler), Halvdelen **Tandhvaler** (Delfiner(?), Grindehval, Døgling, Kaskelot og Narhval), hvorimod der, mærkeligt nok, endnu ikke er funden en eneste Art paa en ægte Finhval (*Balænoptera*), uagtet enkelte Finhvaler, f. Ex. *B. Sibbaldii*, have været Gjenstand for Fangst og ved denne Lejlighed tillige for Undersøgelse efter Snyltere[48]). Skjøndt jeg alligevel er tilbøjelig til at troe, at hint Antal af mere eller mindre bekjendte Cyamider staaer langt tilbage for Virkeligheden, turde det dog være tvivlsomt, om mere end et Mindretal af Hval-Arterne er belemret med disse Snyltere*). I Reglen findes, saa vidt hidtil bekjendt, den samme *Cyamus*-Art kun paa en og samme bestemte Hval-Art, og *Cyamus*-Arterne ville derfor i visse Tilfælde kunne yde et Bidrag til Hval-Arternes Bestemmelse og Udredning. Den mig bedst bekjendte og uomtvisteligste Undtagelse fra denne Regel er den, at den almindelige og den bredpandede Døgling huse samme Art af Hvallus (*Platycyamus Thompsoni*); men den store geografiske Udbredning, som maa tillægges visse paa «Sydhvaler» levende Arter (*C. ovalis* og *gracilis*)

[46]) Jfr. Bennetts ovenfor anførte Iagttagelser af Hvallus paa en ikke nærmere bekjendt Delfin-Art saavel som hos «the Blackfish», hvorved der, efter velvillig Meddelelse fra Prof. Reinhardt, skal forstaaes *Globiocephalus macrorhynchus*, hvoraf «College of Surgeons» besidder et Cranium fra Bennett selv.

[47]) Det er unægteligt meget forsynligt af v. Beneden ikke desmindre at udstyre Arten med et Navn (*C. biscayensis*). (Les Cetacés, leurs commensaux et leurs parasites, Bull. d. l'Acad. royale de Belgique, 2me série, t. 29, 1870, p. 349.)

[48]) Jfr. S. Hallas: Optegnelser om nogle paa et Hvalfangst-Tog i Havet omkring Island iagttagne Hvaler. (Videnskab. Medd. fra den naturhist. Forening for 1867) S. 162.

*) Dewhurst gaaer sikkert meget for vidt, naar han udtaler den Mening, at alle Hval-Arter ere plagede af Hvallus (The natural history of the order Cetacea etc., 1834, p. 259).

synes at bevise, at disse Arter forekomme ikke alene paa den ægte *Balæna australis*, men ogsaa paa dennes Repræsentant i andre Have og navnlig paa *B. japonica*, forudsat at denne, hvad jeg dog ikke tør bestride, er forskjellig fra *B. australis*. Reglen maa derfor vistnok ændres derhen, at samme *Cyamus*-Art, ligesom samme Cirriped-Art, kan forekomme paa meget nær beslægtede Hval-Arter og navnlig paa Arter af samme Underslægt. Paa den anden Side viser Erfaringen, at samme Hval-Art (f. Ex. Narhvalen, Sydhvalen) kan huse flere Hvallus-Arter. Om nogen anden Sammenhæng mellem disses og deres «Værters» systematiske Slægtskabsforhold vil man forgjæves søge: *C. monodontis* (paa Narhvalen) staaer *C. mysticeti* (paa Nordhvalen) saa nær, at man godt kunde antage den for at være en «udvandret Afart» eller Dvergform af denne sidste; og Sydhvalens *C. erraticus* staaer meget nær ved den nordiske Pukkelhvals *C. boopis*)[49]).

[49]) Det vil maaskee have sin Interesse at have samlet paa eet Sted en Fortegnelse over samtlige bekjendte, paa Hvaldyr snyltende eller halvsnyltende Krebsdyr af Amphipodernes, Cirripedernes og Copepodernes Grupper. De til den sidste hørende ere:

1. *Pennella crassicornis* Stp. & Ltk. (Snyltekrebs og Lernæer S. 416, T. XIV f. 34) (Af Doglingen).
2. *P. sp.* paa nordiske Finhvaler. (Jfr. Forhandl. v. d. Skandin. Naturf. 4de Møde i Christiania 1849, S. 280: Hallas l. c. S. 169) (af v. Beneden l. c. p. 356 opført som *P. Balænopteræ*).

Derimod er det en temmelig grov Misforstaaelse af Professor v. Beneden at opføre *Lernæonema nodicornis* Stp. Ltk. og *Pennella pustulosa* Baird som Snyltere paa Delfiner. De ere begge tagne af Dolfiner ɔ: *Coryphæna*-Arter: Fiske af Makrel-Familien!

Om Cirripederne har Prof. Steenstrup, der særligt har beskæftiget sig med Studiet af denne Dyregruppe, havt den Godhed, paa min Anmodning at meddele mig følgende:

«De mig bekjendte Arter af Cirripeder, der ere bundne (dog ikke som Parasiter eller Snyltere, men som Indsiddere eller faste Rejsefæller) til Hvaldyrerne ere kun 6, alle hørende til een og samme naturlige Gruppe: *Coronulinæ*, en Gruppe, der paa den anden Side ogsaa er næsten indskrænket alene til Hvaldyrene, idet kun Arterne af dens ene Slægt *Platylepas* forekomme udenfor disse Dyr (paa Havslanger, Havskildpadder og Manater).

1. *Coronula balænaris* (Gmel.)
   paa det nordlige og sydlige Sydhavs Sletbage («Rethvaler») og paa «Nordkaperen» i Atlanterhavet (Chemnitz's Exemplar, Chemn. Conch. VIII. t. 99, fig. 845, 846).
2. *Coronula diadema* (Linné) (Syst. nat.)
   paa Atlanterhavets langhaandede Finhval (*Megaptera boops*); men Individer sendte fra andre Have have hidtil ikke kunnet skjælnes fra denne (f. Ex. et sydhavsk (nyseelandsk?) Individ efter Darwins Undersøgelse og et kapsk (?) Individ efter min).
3. *Coronula reginæ* Darwin
   paa Hvaldyr (hvilke?) i Sydhavet (udmærket Art!).
4. *Tubicinella trachealis* (Shaw)
   paa det nordlige og sydlige Sydhavs Sletbage (som Nr. 1), og paa en ved Suderø (Færoerne) 1650 strandet Hval (Nordkaperen?) (cfr. Ole Worms Figurer og Beskrivelse: Mus. Worm p. 281).
5. *Xenobalanus globicipitis* Stp.
   paa Grindehvaler (af Stimer fangede ved Færø).
6. *Xenobalanus strictus* Stp. (*Siphonicella* Darw.)
   paa Finnerne af virkelige Delfiner, af flere Arter, i den varmere Deel af Atlanterhavet.

«Naar Van Beneden i sin Meddelelse om Hvaldyrenes Parasiter og «Commensales», l. c. p. 349—55, opfører ikke færre end tre nye (navngivne men ikke diagnosticerede) Hval-Coronuler, nemlig:

Jeg vil ikke lægge Skjul paa, at af de Krebsdyr-Grupper, som jeg har havt Lejlighed til at underkaste et speciellere Studium, har ingen gjort mig større Vanskeligheder end Hvallusene. Arternes Adskillelse ved gode, let opfattelige og paalidelige Kjendemærker besværes især af Alders- og Kjønsforskjellen; kun ved at have et større Materiale for sig, kan man have nogenlunde Sikkerhed for, at denne eller hin Form virkelig foreligger i sin fuldt udviklede Skikkelse. Det er kun fuldvoksne Exemplarer, som besidde Artsmærkerne fuldt udviklede, og jeg har mere end en Gang maattet gjøre uventede Erfaringer om, hvor stor en Forskjel i denne Henseende en ringe Forskjel i Størrelse kan medføre; jo yngre de ere, desto mere udslettes Karaktererne, Formen bliver i det hele smækkrere, Gjællerne kortere, karakteristiske Formforhold udvidskes, ja selv Organer, hvoraf man hos de udvoksne kan tage Artsmærker (f. Ex. Bigjællerne), forsvinde. At skjelne mellem Arterne paa saa spæde Individer som de, der f. Ex. findes i Hunnens Rugesæk, er aldeles umuligt — en Undtagelse danner maaskee *Platycyamus*, hvis spæde Unger jeg ikke kjender, — og jo nærmere Individerne ere ved dette første Udviklingstrin, desto vanskeligere er selfølgelig Bestemmelsen; naar denne ikke understøttes af Kundskab om, hvilken Hval-Art der fostrede dem, ville selv halvvoksne Exemplarer ikke altid med Sikkerhed kunne bestemmes. Kjønsforskjellen indskrænker sig, hos nogenlunde eller fuldt udviklede Individer, ikke til de ydre Kjønsdeles Plads og Form, men gjennemtrænger mange andre Formforhold, om end hos en Art flere end hos en anden, som det vil fremgaae af Artsbeskrivelserne i det følgende. Den fremtræder allerede i Størrelsen — Hunnen er hos de ægte *Cyami* i

---

a) *Diad. japonica* van Ben.
paa en *Balæna japonica* — efter en japansk Tegning;
b) *Diad. californica* van Ben.
paa *Megaptera antarctica*, efter en Skal, som han antager kunde have siddet paa denne Art; og
c) *Diad. biscayensis* van Ben.
paa Norkaperen, efter Islændernes sikkre Beretning,
saa ere disse Navne aabenbart endnu utidige, da
c. vistnok (ɔ: indtil Grunde for det modsatte anføres) maa ansees for den Art, som blev Chemnitz tilsendt fra Nordkaperen, og
b. snarest — (hvis en virkelig Art) — maaskee være den af Darwin saa vel beskrevne, af Van Beneden ikke paaagtede Art, *Cor. reginæ*, samt, endelig
a. være den *Cor. balænaris*, der i Forening med *Tubicinella* forekommer paa det nordlige Sydhavs *Balæna*».

«Arterne af Hvalkopperne ere rimeligvis i det højeste bundne til visse Artsgrupper af Hvaldyr og have altsaa Paralleler i deres Frænders, Chelonobiernes og Platylepadernes Udbredningsforhold. At stille Cyamer og Balaner i samme Hovedkategori af «Commensalismen» blot som frie og fastsiddende Gæster («Commensaux»), er aabenbart ikke heldigt».

«Naar Conchodermerne (*Otion*, *Cineras*) forekomme paa Hvalerne, da høre de til en ganske anden tilfældig Kategori; de hæfte sig kun til Hvalerne af samme Grund som ellers til Skibe og Skildpadder, til hurtigt gaaende Førere af al Art, og synes derhos kun at benytte Hvalerne, for saa vidt disse tilfældigvis maatte frembyde et haardt Grundlag til Fæste for dem, saasom *Coronula*'er, blottede Tandflader eller Knokkelpartier».

Reglen betydelig mindre — dernæst i Formen (Hunnen bredere, Hannen smallere), Følernes og Gjællernes større Længde, Bigjællernes fyldigere Uddannelse osv. hos Hannerne. Det Mærke, som passer paa Hunnen af een Art, passer ofte ikke paa den tilsvarende Han, men vel paa Hannen af en anden Art osv. Ved enhver Beskrivelse af en *Cyamus* er det derfor aldeles nødvendigt at vide, om den er udkastet efter en Han eller en Hun — noget der næsten aldrig findes udtrykkelig omtalt i de ældre Beskrivelser (Krøyers end ikke undtagne) men vel i mange Tilfælde kan indirekte udledes af dem, naar man er fortrolig med begge Kjøns Udseende og Bygning i forskjellige Aldere.

En af de bekjendte Hvallus-Arter afviger saa meget fra de andre, at jeg har maattet udsondre den som egen Slægt (*Platycyamus*). De andre forekomme mig at falde i tre Grupper, de to hver med tre Undergrupper, saaledes:

A. a. *C. mysticeti* og *C. monodontis*;
A. b. *C. Kessleri*;
A. c. *C. erraticus* og *C. boopis* (med *C. pacificus*);
B. *C. ovalis*;
C. a) *C. nodosus*, b) *globicipitis* og c) *gracilis*.

De vigtigste Mærker for Slægterne, Grupperne og Arterne har jeg — med Forbigaaelse af den mig endnu noget tvivlsomme *C. pacificus* — sammenstillet i følgende:

Oversigt over Hvallus-Arterne (Synopsis Cyamidarum).

I. ***Cyamus*** Latr.[1]) Kroppen mere eller mindre tyk. Første Beenpar meget mindre end andet og skjult under dette; første Kropring ufuldstændigt sondret fra Hovedet eller aldeles sammensmeltet med dette. Kjæbefødderne femleddene. (Hannerne opnaa i Almindelighed en betydeligere Størrelse end Hunnerne.)

I. ***Cyamus*** Latr. *Corpus crassum, haud laminare. Pedes primi paris minuti, sub pedibus secundi paris fere vel omnino absconditi; annulus corporis primus a capite indistincte sejunctus vel cum hoc plane confluens. Pedes maxillares quinque-articulati. (Mares fœminis vulgo majores.)*

A. Kroppen mere eller mindre bred og oval; de gjællebærende Kropringe (tredje og fjerde) hos Hannerne

A. *Corpus latius, ovale; annuli branchiferi in maribus sequentibus minores, breviores et ab illis forma diversa facile di-*

[1]) Saa vidt jeg har kunnet bringe i Erfaring, er Anvendelsen af Ordet *Cyamus* i Botaniken (ved Salisbury eller Smith, Synonym til *Nelumbium*) adskillige Aar yngre end 1797, nemlig fra 1804 eller 1805, og der skjønnes derfor ikke at være nogen som helst Grund til at foretrække enten det ene eller det andet af de Leach'ske Navne, selv om *Cyamus* hørte til Botanikens »nomina recepta«.

kjendelig mindre (kortere og i det Hele svagere udviklede) end de følgende og af en anden Form. Gjællerne i det hele temmelig lange hos udvoksne Individer; andet Beenpars Haand altid tvetandet, og første Kropring som oftest temmelig ukjendelig som saadan. (Større Former i det hele.)

stinguendi; branchiæ in adultis longiusculæ; manus pedum secundi paris bidentati; annulus corporis primus cum capite sæpissime haud plane confluens. (Statura vulgo major.)

a. Gjællerne enkelte; Bagbenenes Hofter underneden udstyrede med en stærk Torn eller stump Knude i det ydre Forhjørne. Bigjællerne tvehornede hos Hannerne, enkelte hos Hunnerne.

a. *Branchiæ simplices; angulo externo antico coxarum pedum posteriorum (5ti—7mi paris) spina valida vel tuberculo obtuso subtus prædito; appendices branchiales marium bicornes, fœminarum simplices.*

α. Plumpere Former med tykkere, mere butte Gjæller; disse ere altid kortere end Kroppen og Hovedet tilsammen.

α. Robustiores branchiis crassioribus, obtusioribus, corpore (cum capite) semper brevioribus.

a. Bredere (Breden det halve eller meer end det halve af Totallængden); Tænderne paa andet Beenpars Haand adskilte ved et større Mellemrum.

a. *Latiores, latitudo dimidiam longitudinem totalem æquat vel superat; dentes manus pedum secundi paris spatio majore sejuncti.*

1. ***C. mysticeti*** m. (Tab. I f. 1).

(af Nordhvalen: *Balæna mysticetus*).

Større; Gjællerne rage hos de voksne Hanner langt ud over Hovedet; Bigjællerne hos Hannen dobbelte (tvehornede), det forreste Horn dog meget kortere; første Beenpars Haand har ogsaa hos Hunnen en tydelig Tand; og femte Kropring paa Bugsiden to eller fire smaa Torne hos Hannen, fire hos Hunnen.

Major; branchiæ in maribus adultis caput longe superantes; appendices branchiales in maribus duplices (bicornes), cornu anteriori multo breviore; manus pedum primi paris in utroque sexu dente distincto; annulus corporis quintus in maribus binis aut quaternis, in fæminis quaternis spinis subtus munitus.

2. ***C. monodontis*** m. (Tab. I f. 2).

(Narhvalen: *Monodon monoceros*).

Mindre; Gjællerne rage hos den voksne Han ikke ud over Hovedet; de forreste Bi-

Minor; branchiæ in maribus adultis caput haud superantes; cornu anterius appendi-

gjællers forreste Horn (hos Hannen) uudviklet; Tanden paa første Beenpars Haand mindre tydelig hos Hunnen; femte Kropring hos Hannen uden Torne, hos Hunnen udstyret med to Knuder.

cum branchialium primi paris (marium) obsoletum; dens manus pedum primi paris in fæminis minus distinctum; annulus corporis quintus in maribus spinis destitutum, in fæminis bituberculatum.

b. Smallere (Breden hos Hannen ikke det halve af Totallængden); Tænderne paa andet Beenpars Haand sidde tæt sammen.

b. *Angustiores, latitudo marium dimidia longitudine totali minor; dentes manus pedum secundi paris approximati.*

3. ***C. Kessleri*** Brandt (Tab. II f. 3).

(*Balæna* sp., i det nordlige stille Hav).

Gjællerne rage hos begge Kjøn langt ud over Hovedet og ere næsten dobbelt saa lange som Legemet er bredt; Bigjællerne ere dobbelte (tvehornede), forlængede, næsten traadformige hos Hannerne, den forreste Green noget kortere end den bageste, hos Hunnerne enkelte og kortere, de forreste tykke, de bageste tynde; en vandret Torn ved Bigjællernes Grund hos Hannerne; ingen Torne paa Bugsiden af de bagre Kropringe hos Hannerne; 4 Knuder paa Bugsiden af sjette Ring hos Hunnerne; af Tænderne paa andet Beenpars Haand er den forreste den korteste.

Branchiæ in maribus fæminisque caput longe superantes, corporis latitudinem duplum fere æquantes; appendices brachiales marium duplices (bicornes), elongatæ, filiformes fere, cornibus anterioribus nonnihil brevioribus, fæminarum simplices, breviores, anteriores crassæ, posteriores tenues; spina horizontalis ad basin appendicum branchialium in maribus; in hisce spinæ ventrales nullæ in annulis corporis posterioribus, in fæminis tubercula quatuor subtus in annulo penultimo; dens anterior manus pedum secundi paris brevior.

β. Smækkre, lettere byggede Former, med bredere Indsnit mellem Kropringene. Gjællerne temmelig lange eller endog meget lange, tynde og spidse. Begge Par Bigjæller tvehornede hos Hannerne, enkelte hos Hunnerne.

β. Graciliores, incisuris interannularibus latioribus; branchiæ longiusculæ vel longissimæ, graciles, acutæ; appendices branchiales bicornes in maribus, in fæminis simplices.

4. ***C. erraticus*** R. V. (Tab. III f. 5).

(Sydhvalen: *Balæna australis*).

Gjællerne naae hos begge Kjøn ud over Hovedet og ere hos den udvoksne Han længere end eller i al Fald lige saa lange som Krop og Hoved tilsammen; femte og syvende Kropring har to Torne paa Bugsiden, sjette fire.

Branchiæ in utroque sexu caput superantes, in maribus adultis totum corpus cum capite longitudine æquantes vel superantes; annulus quintus et septimus subtus bispinosi, sextus quadrispinosus.

5. ***C. boopis*** m. (Tab. III f. 6).

(Krepokaken: *Megaptera boops*; maaske ogsaa paa andre *Megaptera*-Arter.

Gjællerne ere baade hos Hun og Han kortere end Kroppen. Hannen har to Torne paa Bugsiden af de to sidste Kropringe, Hunnen paa dem alle tre.

Branchiæ in utroque sexu corpus longitudine haud æquantes; annulus sextus et septimus in maribus, quintus, sextus septimusque in fæminis infra bispinosi.

b. Gjællerne dobbelte. Tornene paa Bagbenenes Hofter, i det ydre Forhjørne, uudviklede.

b. *Branchiæ duplices. Spinæ coxarum pedum posteriorum (5ti-7mi) in angulo antico externo obsoletæ vel nullæ.*

7. ***C. ovalis*** RV. (Tab. II f. 4).

(Sydhvalen: *Balæna australis* og det nordlige Stillehavs Sletbag: *B. japonica?*).

Bigjællerne hos Hannerne forlængede, traadformede, første Par enkelte, andet Par dobbelte; hos Hunnerne mangle de. Tænderne paa andet Beenpars Haand stillede tæt sammen.

Appendices branchiales in maribus elongatæ, filiformes, anteriores simplices, posteriores duplices; in fæminis nullæ; dentes manus pedum secundi paris approximati.

B. Kroppen smallere, mere langstrakt; de gjællebærende Ringe hos Hannen oftest kun ubetydeligt eller slet ikke svagere end de fölgende. Gjællerne i det hele kortere. Bagbenenes Hofter uden Torne underneden i det ydre Forhjørne. Første Kropring fuldstændigt sammensmeltet med Hovedet. (Mindre Former.)

B. *Angustiores, magis elongati, annuli branchiferi marium sequentibus sæpissime haud minores aut paulo minores; branchiæ breviusculæ; coxæ pedum posteriorum subtus in angulo antico externo spinis destitutæ. Annulus corporis primus cum capite plane coalitus. (Statura minores.)*

α. Andet Beenpars Haand tvetandet hos begge Kjøn.

α. Manus pedum secundi paris in utroque sexu bidentati.

8. ***C. nodosus*** m. (Tab. IV f. 8).

(Narhvalen: *Monodon monoceros*).

Ryggen faaer et knudret Udseende derved, at Kropringene (fra tredje Ring af) ere delte i to til fire Pukler; Bigjællerne enkelte, korte, kegledannede hos begge Kjøn; ingen tydelige Torne paa Kroppens Bugside eller paa Bagbenenes Underside for Resten.

Dorsum nodosum, annulis corporis a tertio usque ad septimum sulcis longitudinalibus in duas, tres vel quatuor partes gibbosas divisis; appendices branchiales simplices breves conicæ in utroqve sexu; annuli corporis pedesque posteriores ceterum spinis distinctis orbati.

β. Andet Beenpars Haand eentandet hos begge Kjøn.

β. Manus pedum secundi paris in utroque sexu unidentati.

9. ***C. globicipitis*** m. (Tab. IV f. 9).
(Grindehvalen: *Globiocephalus melas*).

De øvre Følere ualmindelig stærke og tykke, de nedre særdeles smaa, uleddede; Bigjællernes bageste Green kort og kegle(torn-) dannet hos begge Kjøn, den forreste hos Hannerne gjælleformig og næsten lige saa lang som de virkelige Gjæller, mangler hos Hunnen. De tre sidste Kropringe hos Hannen, de to sidste hos Hunnen underneden udstyrede hver med to stærke Torne eller spidse Knuder. Alle seks Baghofter løbe fortil ligeledes ud i en stærk Torn.

Antennæ superiores validissimæ, inferiores minutissimæ, haud articulatæ; rami posteriores appendicum branchialium breves, conici, spiniformes, anteriores in fæminis deficientes, in maribus elongatæ, branchias simulantes, branchiasque veras longitudine fere æquantes; annuli corporis posteriores tres in maribus, duo in fæminis spinis vel tuberculis acutis binis validis præditi; coxæ pedum posteriorum sex antice in spinam fortem productæ.

γ. Andet Beenpars Haand eentandet hos den voksne Han, utandet hos Hunnen.

γ. *Manus pedum secundi paris dente singulo in maribus adultis, nullo in fæminis.*

10. ***C. gracilis*** R. V. (Tab. IV f. 10).
(Sydhvalen: *Balæna australis* og det nordlige Stille-Havs Sletbag: *B. japonica?*).

De bagre Kropringe takkede paa Siderne. Smaae tvehornede Bigjæller hos Hannerne; ingen hos Hunnerne. Ingen Torne paa Bugsiden af Kroppen eller Bagbenene.

Annuli corporis posteriores lateribus dentatis, appendices branchiales bicornes minutæ in maribus, in fæminis nullæ; spinæ ventrales corporis vel pedum posteriorum nullæ.

B. ***Platycyamus*** m. Kroppen er meget flad, næsten papirtynd. Første Beenpar næsten lige saa udviklet som andet og anbragt foran dette paa den fra Hovedet vel sondrede første Kropring. Kjæbefødderne uleddede. (Hannerne mindre end Hunnerne.)

B. ***Platycyamus*** m. *Corpus valde depressum, laminare fere; pedes primi paris pedes secundi paris magnitudine fere æquantes hisceque antepositi, annulo primo corporis a capite bene sejuncto; pedes maxillares haud articulati.* (*Mares fæminis minores.*)

11. ***P. Thompsoni*** (Gosse) (Tab. IV f. 11).
(Døglingerne: *Hyperoodon rostratus* og *H. latifrons.*)

Følerne og Gjællerne meget korte. De gjællebærende (tredje og fjerde) Kropringe halv sammenvoksne hos Hunnerne, frie men mindre udviklede end de andre Ringe hos Hannerne. En vandret Torn paa Bigjællens Plads hos Hannerne og en lille Knude ved Grunden af

Antennæ et branchiæ brevissimæ; annuli branchiferi (tertius et quartus) in fæminis semi-coaliti, in maribus sejuncti, sequentibus vero minores; spina conica horizontalis locum appendicis branchialis in maribus tenet; in fæminis tuberculus ad basin laminarum ovi-

de bagre Æggeplader hos Hunnen. Femte og sjette Kropring har to Torne underneden, syvende fire, alle Baghofterne fortil to.

gerarum posteriorum utrinque adest, annulus quintus sextusque subtus bispinosi, septimus quadrispinosus; coxæ pedum posteriorum omnium antice bispinosæ.

For Fuldstændigheds Skyld vil jeg her endnu opføre de usikkre eller utilstrækkeligt kjendte Arter (af hvilke det dog er tænkeligt at nogle falde sammen med hinanden eller med visse af de ovenfor opregnede ti Arter).

6. *C. pacificus* Ltk., af en ubekjendt Hvalart i det stille Hav. (Tab. III fig. 7).

12. «Nordkaperens» eller «Sardens» Hvallus. (Jfr. ovenfor S. 243).

13. Kaskelottens Hvallus (S. 242).

14. *C. Delphini* Guérin (l. c. t. 28 f. 5, copieret af Spence Bate og Westwood l. c. vol. II p. 98, staaende nærmest ved *C. globicipitis*, og muligvis identisk med denne, men hverken med *C. gracilis*, som Sp. Bate først antog (Catal. Amphip. Crust. p. 366) eller med *Platycyamus Thompsoni*, som det formodes i hans og Westwoods senere Arbejde (l. c. p. 96). Af en vestindisk Delfin.

15—17. En ligeledes af en «Delfin»-Art taget, ufuldstændigt kjendt Art (jfr. S. 242 og det følgende) samt de af Bennett paa to forskjellige Delfinformer (hvoraf den ene en Globiocephal) iagttagne Arter.

18. Barkdyrets udryddede og ubekjendte Snylter. (Jfr. det følgende).

---

1. ***Cyamus mysticeti*** Ltk.

(Tab. I, fig. 1.)

distinguitur[1]) *corpore lato, crassiusculo, annulis branchiferis (tertio et quarto) marium ceteris minoribus (brevioribus et humilioribus); antennis (superioribus) caput et annulum secundum fere æquantibus; branchiis simplicibus elongatis, anterioribus caput in fœminis (adultis) æquantibus, in maribus longe superantibus; manibus primi paris dente singulo, secundi dentibus duobus brevibus remotis in utroque sexu armatis; appendicibus branchialibus marium sat magnis, bicornibus, cornu interno breviore, fœminarum unicornibus; annulis corporis posterioribus subtus spiniferis, coxisque pedum posteriorum infra in spinam exeuntibus.*

Størrelse: Hannen 16^{mm} lang, 8^{mm} bred; Hunnen 11^{mm} lang, 6^{mm} bred[2]).

---

[1]) Udførligere Artsdiagnoser ere meddelte i foranstaaende «Oversigt» (Synopsis); her og i de følgende kortere Diagnoser, som forudskikkes for de udførlige Artsbeskrivelser, udhæves kun de væsenligste Hovedtræk af Arts-Karakteristiken, som bedst egne sig til at vejlede Undersøgeren til en foreløbig Opfattelse.

[2]) Størrelsen er her og i det følgende stedse angivet efter de største foreliggende Exemplarer, uanseet om Arten ogsaa med en noget mindre Størrelse kan være fuldstændig udviklet og avledygtig.

Opholdssted: paa Nordhvalen (*Balæna mysticetus* L.), paa de tyndere Steder af Huden, f. Ex. i Akselhulen og ved Kjønsdelene (ifølge Martens og Mandt[1]).

Synonymer og Citater, som med større Sikkerhed synes at kunne henføres til Narhvalens Snylter:

(1675). Fr. Martens: «Spitzbergische oder Grönlandische Reisebeschreibung»: Die sogenandt Walfisches Laus, S. 85—87, t. Q. f. D.

(1734). A. Seba: «Locupletissimi rerum naturalium thesauri» t. I, t. 90 f. 5 (Han og Hun).

(1769). Houttuyn: «Natuurlyke Historie of uitvoerige Beschryving der Dieren, Planten en Mineralien», I. XIII p. 491, t. 106 f. 4—5 (Hun) («eigentlyke Walvischluizen uit Groenland»).

(1772). P. S. Pallas: «Spicilegia Zoologica» fasc. 9, p. 76—78, t. IV f. 14 (A, B, C) (Han og Hun) (*Oniscus ceti*); copieret i «Encyclopédie Méthodique», Crustacés, pl. 239, f. 14—16.

(1778). Ch. de Geer: «Mémoires pour servir à l'histoire des Insectes», t. VII, p. 540—44, t. 42 f. 6—10 (Han) (Squille de la Baleine, *Squilla Balæni*).

(1802). Bosc: «Histoire naturelle des Crustacés», Vol. II, t. 16 f. 2 (Hun ?). (Copieret af Latreille i «Hist. natur. d. Crust. et des Ins.», t. 52 f. 4).

(1816). J. C. Savigny: «Mémoires sur les animaux sans vertèbres», I. 1. tab. V f. 1. (*Cyamus ceti* Latr.). (Copieret i Atlasset til Okens «Naturgeschichte», t. 19 f. 3).

(1817). G. R. Treviranus: «Vermischte Schriften anatomischen und physiologischen Inhalts», 9ter Bd., t. I f. 1 (Han) og 2—3 (Hun). (*Oniscus ceti*).

(1825). Desmarest: «Considérations générales sur la classe des Crustacés», t. 46 f. 4 (*Cyame de la Baleine*).

(1842—43). H. Krøyer: «Naturhistorisk Tidsskrift», 4de Bind, S. 476, t. V f. 63—70 (*Cyamus ceti*).

(1857). A. White: «A popular history of British Crustacea», t. XI, f. 6 (ikke god) p. 219 (*Cyamus ceti*).

(1866). Spence Bate & Westwood: «A history of British sessile-eyed Crustacea», Vol. II, p. 85, c. fig. (Han og Hun)[2]) og p. 90 (Ungen, 1''' lang). (*Cyamus ceti*) (Synonymien meget forvirret).

---

[1]) Mandt (M. G.): Observationes in historiam naturalem et anatomiam comparatam in itinere grönlandico factæ (Dissert. inaug. Berolin. 1822) p. 10. «Partibus tenuioribus cutis, axillis, pudendis *Oniscus ceti* adhæret, præsertim si tempus instat coitionis. Vulva præcipue hoc tempore iis obsessa apparet.» Hermed kan endvidere sammenholdes hvad Scoresby, Dewhurst og O. Reilly anføre derom. (See nedenfor).

[2]) Munddelene synes at være kopierede efter Savigny.

Beskrivelse af Hannen. Legemet er bredt og fladt, men dog snarere tykt end tyndt; Længden det dobbelte af Breden. Et af de største foreliggende Exemplarer har en Længde af 16^{mm} og en Brede af 8^{mm}; det er saaledes den største bekjendte Hvallus-Art. Hovedet er fortil smalt (det egenlige Hoved), bagtil bredere (første Kropring); nogen tydelig Afsnøring finder derimod ikke Sted. Naar de øverste Følere bøjes tilbage, naae de ikke fuldt til tredje Kropring; deres fjerde (yderste) Led er meget lille, de underste Følere meget smaa og skjulte under de øvre. Anden Kropring er temmelig tyk og opsvulmet; Hjørnet mellem dens Bag- og Siderand løber ud i en lille Knude; det samme er Tilfældet med det forreste Sidehjørne af tredje og det bageste af fjerde Kropring. Disse to Ringe ere kjendelig mindre udviklede (d. v. s. kortere og mindre hvælvede eller opsvulmede) end anden og femte. Første Beenpar[1]) er spinkelt og skjult af andet, der ligesom de tre Par Bagbeen har en meget kraftig Bygning; paa Undersiden af første Beenpars Haand er der en meget tydelig «Tand» og paa andets to korte og butte «Tænder», adskilte ved en bred og dyb Bugt. Grundleddet (Hoften) af Bagbenene (5te til 7de) løber paa Undersiden fortil ud i en stærk Torn; ogsaa flere af de øvrige Led af disse Beenpar ere tilbøjelige til at løbe ud i butte Spidser. Der er fire valsedannede, temmelig tykke Gjæller, hvis Længde varierer noget, dels efter Alderen, dels individuelt: hos meget store Individer ere de en Tredjedel længere end Legemet er bredt, og rage begge Par ikke lidet ud over Hovedet og over første Beenpars Haand, ja endog ud over de fremstrakte øvre Følere. Endnu hos Hanner af 10^{mm}s Længde ere Gjællerne længere end Legemets største Brede, men det andet Par naaer undertiden kun til Enden af Hovedet og af andet Beenpars Haand, ikke ud over disse. Bigjællerne (eller de saa kaldte Gjællevedhæng) ere forholdsvis temmelig store og nærmest at sammenligne med skæve Halvmaaner; det ydre (bageste) Horn af disse Halvmaaner er dog betydelig længere end det indre (forreste), som i øvrigt er lidt mere udviklet paa det bageste end paa det forreste Par. Paa Undersiden af syvende Kropring findes der fire smaa Torne: to nærmere ved hinanden og ved Ringens forreste Rand og en paa hver Side, nærmere ved Benenes Indledning; paa den foregaaende (sjette) Ring er der 4 eller 6, paa den femte 2 eller 4 — det ene Par synes at forsvinde med Alderen, saa at der kun er henholdsvis 4 og 2; i det hele synes disse Smaatorne at være mere udviklede hos de yngre end hos de større Exemplarer. Haleknoppen er kløvet i Spidsen.

Yngre Exemplarer besidde ikke alle de her angivne Karakterer. Til hvad derom allerede er anført ovenfor, maa jeg endnu føje følgende: Allerede hos Hanner af 6^{mm}s

[1]) Her og i det følgende benævnes Kropringene og Benene med de Tal (I—VII), som de vilde havt hos de ægte Amfipoder, uden Hensyn til, at første Ring er sammenvokset med Hovedet og 3dje og 4de Ring lemmeløse. V—VIIde Beenpar sammenfatter jeg under Navnet «Bagbenene». At jeg, for Kortheds Skyld, benævner Benenes Grundled «Hofte», maa ikke misforstaaes som Udtryk for en bestemt Opfattelse af det Spørgsmaal, om dette Led hos Læmodipoderne ganske svarer til andre Leddyrs «Hofte».

Længde ere Gjællerne saa korte, at det forreste Par neppe naaer til Enden af Hovedet og første Beenpar, det andet kun til Hovedet; og kun det ydre Horn af Bigjællerne er her udviklet; «Tanden» paa første Beenpars Haand og Tornene paa Undersiden af de tre sidste Kropringe samt paa Bagbenenes Hofteled ere derimod allerede tilstede. Legemets Form er smallere, mere lige bred over det hele; tredje og fjerde Ring ere vel kortere end de andre, men deres og anden Kroprings Hjørneknuder forsvundne. Paa endnu yngre Hanner (4^{mm}) ere Gjællerne endnu kortere, Tanden paa første Beenpars Haand utydelig, men der sees endnu meget tydeligt to Torne paa Bugsiden af femte, fire paa sjette og syvende Ring. Synker Længden ned til 3^{mm}, naaer Breden ikke 1^{mm}, Formen er altsaa paa dette tidlige Udviklingstrin overordenlig smal og smækker; Gjællerne ere ganske korte, kølleformige, Bigjællerne og alle Knuder og Torne forsvundne, selv «Tænderne» paa andet Fodpars Haand ikke undtagne, og Kjønsforskjellen ikke til at erkjende. (Et endnu yngre Stadium (1‴) er afbildet af Spence Bate og Westwood, l. c. p. 90).

Hunnen opnaaer ikke Hannens anselige Störrelse, og dermed staaer det vel i en vis Sammenhæng, at adskillige af de hos Hannen udprægede Artsmærker her træde mindre skarpt frem. De største foreliggende Exemplarer have en Længde af 11^{mm} og en Brede af $5\frac{1}{2}$—6^{mm}. De gjællebærende Kropringe ere her ikke kjendelig svagere eller kortere end anden og femte, men i øvrigt af lignende Form som hos Hannerne, med den Undtagelse at her ogsaa tredje Kroprings bageste og fjerde Rings forreste Sidehjørner ligesom de andre løbe ud i en nedadrettet afrundet Knude. De øvre Følere har jeg snart fundet noget længere og spinklere, snart noget kortere og tykkere. Første Beenpars Haand har ogsaa her en tydelig Tand. Gjællerne ere altid betydelig kortere end hos Hannerne, aldrig længere end sjette Kropring er bred, og det første Par naaer derfor ikke ud over Spidsen af Hovedet eller af andet Beenpar, det andet ikke ud over anden Kropring, ja de ere endog ofte kortere end her er angivet. Paa Bugsiden af syvende Kropring forholde Tornene sig som hos Hannerne, paa sjette er der altid seks, og paa femte er der paa hver Side af Vulva en dobbelt Torn, en større vendende fortil og en mindre vendende bagtil. Af Bigjællernes to Horn findes her kun det ydre; det er kegledannet, mere eller mindre spidst, første Par kortere end andet[1]). Æggepladerne ere som sædvanlig fire, store, runde og haarede i Kanten. — Ved sin mindre Størrelse, kortere Gjæller og stærkere Udvikling af tredje og fjerde Kropring kjendes den udvoxne Hun allerede fra Rygsiden let fra Hannen. Hos yngre Hunner (6^{mm}s) Længde er Tanden paa første Beenpars Haand forsvunden og Æggepladerne saa smaa, at de ikke naae sammen.

At Grønlandshvalen eller Nordhvalen (*Balæna mysticetus*) huser en Hvallus-Art, er

[1]) Ingen *Cyamus*-Hun har overhovedet dobbelte Bigjæller, hvilket hos Hannerne i det mindste er det almindelige. Jeg troer ikke at fejle i at antage, at Bigjællens forreste (indre) Horn er homologt med Hunnens 4 Æggeplader (hvilket jeg seer, at Al. Brandt ligeledes antager).

allerede angivet af Martens og senere af Mandt[1]), og senest bekræftet af Olrik og Ellberg, som have nedsendt de Exemplarer, der ligge til Grund for foranstaaende Beskrivelse, med udtrykkelig Opgivelse af, at de ere tagne af *Balæna mysticetus.* Hvor paa denne Sletbags Hud de især opholde sig, derom have Martens og Mandt oplyst os. At de fleste ældre Forfattere, som beskrive Hvallus under den generelle Benævnelse «*Oniscus ceti*» eller lignende Navne, have havt denne Nordhvalens Snylter for Øje, er altid det rimeligste, selv om det ikke med nogenlunde Sikkerhed fremgaaer af deres Beskrivelser, da der er saa langt større Sandsynlighed for, at netop denne Art vilde blive indsamlet og afgivet til Samlinger og Zaologer, end at dette skulde blive Tilfældet med nogle af de andre nordiske Arter, som beboe Hvaler, der aldrig have været Gjenstand for en saa udstrakt og planmæsig Fangst, eller af Sydhavs-Arterne, hvis Værter først i en senere Periode bleve Gjenstand for en lignende Efterstræbelse. Jeg nærer derfor heller ingen Tvivl om, at den ovenstaaende Synonymi, som jeg har indskrænket til virkelig originale Beskrivelser eller Afbildninger[2]), jo i det væsenlige er rigtig. Da det dog, som ovenfor er udviklet, ikke vides med Sikkerhed, om Linnés «*Oniscus ceti*» netop var den paa Nordhvalen levende

[1]) Af andre Forfattere, der omtale Hvallus som forekommende paa Hvaler og derved fortrinsvis eller udelukkende tænke paa Nordhvalen, skal her endnu anføres: O'Reilly, «Greenland, the adjacent seas and the northwest passage to the pacific ocean, illustrated in a voyage to Davis Strait during the summer of 1817» (1818) p. 166: «Groups of the *Oniscus ceti*, whale-louse, attached to the epidermis, particularly about the fins and anus»; p. 196: «immense groups of the *Oniscus ceti* attached to the under lip and to the under part of the fins» (Talen er begge Steder om Nordhvaler). Scoresby: «An account of the arctic regions» etc. Vol. I. (1820) p. 543: «This little animal (*Oniscus ceti* L., *Larunda ceti* Leach), about $^1/_2$" in diameter, firmly fixes itself by its hooked claws on the skin of the *Mysticetus.* It is found principally under the fin or in other situations, where the skin is tender, and where it is not liable to be dislodged». Parry «Journal of a third voyage for the discovery of a northwest passage» (1826) p. 118 (af en i Juni Maaned ved Port Bowen dræbt «Hval», uden Tvivl en Nordhval); Dewhurst: «The natural history of the order Cetacea and the oceanic inhabitants of the arctic regions» (1834) p. 199: «and like most other animals the wale is tormented with a species of louse (*Oniscus ceti* L.), peculiar to itself, which adheres so strongly to the skin, that it will sooner be torn asunder than be compelled to let go its hold. The fins, the lips, the parts of generation, and other parts of the body which are most protected from friction, are chiefly infested with this parasitical insect. The bite is extremely painfull, and they are most troublesome in that season, when the whale is in heat».

[2]) Der citeres undertiden endnu en Afbildning af Leach i «Supplem. Encycl. Brittan.» (t. 21). Jeg har ikke havt Lejlighed til at efterslaae dette Værk; men til det i min Besiddelse værende Exemplar af samme Forfatters «a general arrangement of the classes Crustacea, Myriapoda and Arachnides» etc. (Linnean Transactions Vol. XI), hvilket Exemplar i sin Tid af Forfatteren selv er tilsendt Schweigger, er der heftet 7 Tavler med kobberstukne Afbildninger af Leddyr, som jeg har Grund til at antage høre til ovennævnte «Supplem. Encycl. Brittan.» Paa den første af disse Tavler er der, med Underskrift: *Larunda ceti*, givet kjendelige, om end ikke særdeles gode Afbildninger af Han og Hun (ovenfra og nedenfra) af *Cyamus mysticeti.* — For saa vidt muligt at gjøre rede for alle erkjendelige Fremstillinger af *Cyamus*-Arter, har jeg ikke villet undlade her at berøre ogsaa dette, om det end i og for sig er temmelig uvæsenligt.

Art, har jeg anseet det for rigtigst at lade Artsnavnet «*ceti*» falde aldeles bort, for at undgaae al den Tvetydighed eller rettere Flertydighed, hvortil det har givet Anledning; det er efterhaanden bleven tillagt ikke mindre end 4 forskjellige Arter. At kalde Nordhvalens Art fremtidig for «*mysticeti*» i Stedet for «*ceti*», er i al Fald en saa nærliggende og lemfældig Ændring, at jeg haaber at den vil blive godkjendt af Zoologerne[1]. — At den anden nordatlantiske Sletbag: «Nordkaperen» eller «Sarden» (*Balæna glacialis*) eller *biscayensis*) ligeledes nærer eller nærede en Art af denne Slægt, om hvilken der dog ikke vides andet end netop dette samme, er ligeledes berørt i det foregaaende.

2. *Cyamus monodontis* Ltk.

(Tab. I, fig. 2.)

distinguitur a C. mysticeti, cui valde affinis, statura minore, branchiis brevioribus, caput haud superantibus, cornu interno appendicum branchialium primi paris marium obsoleto, manibus pedum primi paris in fœminis fere edentulis, antennis brevioribus.

Størrelse: Hannen 11^{mm} lang, $5\frac{1}{2}^{mm}$ bred; Hunnen 8^{mm} lang, $4\frac{1}{2}^{mm}$ bred.

Opholdssted: paa Narhvalen (*Monodon monoceros*), dels og især paa Kroppen og Halen, dels omkring Roden af Stødtanden hos Hannen, sammen med *C. nodosus* m.

Denne Art staaer saa nær ved *C. mysticeti*, at det er overflødigt at beskrive den i alle Enkeltheder: Legemsformen og Dyrets almindelige Udseende (dets Habitus) ere ganske de samme som hos den nævnte Art; først ved en omhyggeligere Sammenligning overbeviser man sig om, at der er konstante Forskjelligheder mellem dem; det vil være tilstrækkeligt at anføre disse. Først Størrelsen; af en stor Række Exemplarer er den største Han ikke større end de største Hunner af Nordhvalens Hvallus — 11^{mm} lang og $5\frac{1}{2}^{mm}$ bred — og de største Hunner kun 8^{mm} lange og $4\frac{1}{2}^{mm}$ brede. Gjællerne ere dernæst kortere: hos den voksne Han naaer det første Par allerhøjst til Enden af Hovedet, det andet kun til dettes Grund; Forholdet er altsaa her omtrent som hos Hunnen af *C. mysticeti*, med hvilken jo Hannen af *C. monodontis* ogsaa stemmer i Størrelse. Hos Hunnen af denne Art naaer derimod det første Gjællepar kun til midt paa Hovedet og det andet lidt ind paa anden Kropring eller, allerhøjst, til Hovedet. Tanden paa Hannens første Beenpar er lille, men dog tydelig. Bigjællerne forholde sig som hos *C. mysticeti*, kun er det indre Horn paa det forreste Par reduceret til en lille Torn eller Knude eller mangler ganske. Af Torne paa Kroppens Underside findes 4 under syvende, 4 (6) under sjette, men ingen under femte Ring, hvor de dog hos lige store Exemplarer af *C. mysticeti* altid ere tydelige nok. Hos Hunnerne af *C. monodontis* findes der paa Bugsiden af tredje og fjerde Ring foruden Æggepladerne en

[1]) At jeg ikke kan indrømme Rigtigheden af det Ræsonnement, i Kraft af hvilket Dr. A. Brandt forkaster dette Forslag, anseer jeg det for overflødigt yderligere at begrunde.

enkelt (halv) Bigjælle af Form som en spids Knude eller tyk Torn, paa hver Side; paa femte en Knude paa hver Side af Vulva, paa sjette 4 (6) Torne, paa syvende to. Første Beenpars Haand har i det højeste Spor til en Tand, ofte ikke engang det. Endnu maa anføres, at de øvre Følere hos denne Art i det højeste naae lidt ind paa anden Kropring, naar de bøjes tilbage; deres Form varierer i øvrigt en Deel hos Hannerne, hvor de snart ere længere og finere som hos Hunnerne, snart paafaldende korte og tykke. Tornene paa Bagbenenes Hofter ere lige saa tydelige som hos *C. mysticeti.*

Hos mindre Hanner (af 5^{mm}s) Længde er den nys nævnte Tand paa første Beenpars Haand forsvunden, og de bageste Bigjæller ligesom de forreste kun dannede af eet Horn. Hunner af samme Størrelse have allerede Spor til Æggeplader og kunne desuden kjendes fra Hannerne derved, at tredje og fjerde Kropring ikke som hos disse er mindre udviklede end de andre. Ved en Størrelse af 4^{mm} ere Bigjællerne forsvundne og en ydre Kjønsforskjel ikke til at opdage; og i en endnu yngre Alder (2^{mm}) have de det for Slægtens Unger almindelige Udseende, næsten kugledannede, blæreagtige Gjæller o. s. v. og ville aabenbart neppe være til at skjelne fra Ungerne af andre Hvallus-Arter.

Talrige Sendinger fra Etatsraad Olrik, Distriktslæge Pfaff, Kolonibestyrer Fleischer o. fl. a. af Narhvalens Hvallus have tilvejebragt et temmeligt rigt Materiale af denne Art, som beboer Narhvalen sammen med *C. nodosus.* I Analogi med Roussel de Vauzèmes Iagttagelser, ifølge hvilke Sydhvalens forskjellige *Cyamus*-Arter tildels i det mindste holde sig til forskjellige Regioner af Hvalens Overflade, kunde der være en vis Sandsynlighed for, at *C. nodosus* og *C. monodontis* heller ikke levede mellem hinanden paa Narhvalen; og denne Formodning styrkedes derved, at mellem en stor Mængde Exemplarer, som Olrik og Fleischer samlede ved Grunden af dette Dyrs Stødtand, paa forskjellige Individer og til forskjellige Tider, var der ikke en eneste *C. monodontis*, men lutter *C. nodosus*; hvorimod de af Pfaff tidligere paa forskjellige Steder af Narhvalens Luffer, Krop og Hale samlede Hvallus alle viste sig at være *C. monodontis*, hvilken Art endelig ogsaa oftere er nedsendt for sig alene som tagen af Narhvalen, men uden nærmere Angivelse af, hvor paa dennes Legeme; een Indsender (Kolonibestyrer Andersen) angav udtrykkelig om de af ham nedsendte *C. nodosus*, at de kun forekom ved Tandroden af Narhvalen. Jeg formodede derfor længe, at *C. nodosus* kun forekom paa dette bestemte Sted, ved Grunden af Narhval-Hannens lange Stødtand, og altsaa kun hos det ene Kjøn, *C. monodontis* derimod andetsteds paa Kroppen og formodenlig hos begge Kjøn. De senere Aars Erfaringer have imidlertid tvunget mig til at opgive denne Formodning. I 1863 nedsendte Hr. Fleischer et Glas med 2 *Cyami* med Paaskrift, at være tagne af en Narhval «ved Tænderne»; det var et Exemplar af hver Art! Den som Følge deraf til Hr. F. udgaaede Opfordring om at skaffe Oplysning om dette Forhold, besvaredes ved i 1865 at sende et Glas med Hvallus, tagne ved Roden af Narhvalens Tand, og et andet med disse Snyltere, tagne af

dens Krop; det første indeholdt *C. nodosus* i Hundredevis, men derimellem dog tre *C. monodontis*; det andet en stor Mængde *C. monodontis*, imellem hvilke der dog var i det mindste seks *C. nodosus* (jeg tager her kun Hensyn til de Exemplarer, der vare saa udviklede, at deres Bestemmelse var let, ikke til Ungerne); samt i 1866 to Glas, det ene med «Tand-Utøj af Narhvalen»: begge Arter i omtrent lige Antal; det andet med «Stjert- og Krop-Utøj: især *C. monodontis*, med et ikke ringe Antal af *C. nodosus*. Mellem et Par hundrede Cyamer «fra Tandens Rodende», nedsendte af Hr. Pfaff i 1863, vare de 7 *C. monodontis*, Resten *C. nodosus*. Resultatet heraf synes i det højeste at kunne blive, at *C. monodontis* især forekommer paa Narhvalens Krop og Hale, *C. nodosus* især ved Grunden af Stødtanden, dog saaledes, at ingen af dem er bunden til denne Fordeling, men at de begge kunne forekomme blandede imellem hinanden. Begge Arter synes at være hyppige, d. e. tilstede i stor Mængde paa de af dem plagede Hval-Individer, men om alle eller de fleste eller kun enkelte Narhvaler ere hjemsøgte af disse Snyltere, er mig ubekjendt[1]).

Mangen Naturforsker, der ellers har vanskeligt ved at tænke sig, hvordan en Art skulde kunne omdannes til en anden gjennem «forandrede Livsvilkaar», vilde maaske nok kunne gaae ind paa denne Tanke for nærbeslægtede Snyltedyrs Vedkommende. Hvorfor skulde samme Snylter ikke kunne leve paa Nordhvalen og Narhvalen, der tilmed noget nær have samme geografiske Udbredning, som ægte Ishavsdyr? Hvad ligger nærmere end at antage, at *C. monodontis* er en for Narhvalen ejendommelig Dværgform af *C. mysticeti*, opstaaet ved dennes tilfældige Overflyttelse paa Narhvalen, eller omvendt *C. mysticeti* en højere og fyldigere Form af *C. monodontis*, fremkommet ved dennes Overførelse paa Rethvalen? Noget saadant er selvfølgelig meget tænkeligt, men denne Mulighed eller Sandsynlighed bør dog ikke have til Følge, at den ene opføres som en Afart af den anden, saa at deres specifiske Selvstændighed miskjendes.

3. ***Cyamus Kessleri*** Brandt.

(Tab. II fig. 3.)

distinguitur a C. mysticeti præcipue corpore angustiore, antennis superioribus brevioribus, caput longitudine æquantibus, branchiis (simplicibus) in utroque sexu caput longe superantibus, appendicibus branchialibus marium, spina ventrali horizontali suffultis, bicornibus,

---

[1]) Flere af de med Polarhavets Natur fortrolige Forfattere kjende Hvallus hos Narhvalen, f. Ex. O. Reilly (l. c. p. 196): «the edge of the fleshy covering, embracing the root of the Monodons tooth was covered with insects of the same description» (ɔ: *Oniscus ceti*); Scoresby (l. c. p. 543): *Oniscus ceti*: «A similar animal, but smaller, is sometimes found on the body of the narwal.» Dewhurst (l. c. p. 259): (*Oniscus ceti*). «The narwal is liable to the annoyance of a similar but smaller animal.» At O. Reilly nærmest har *C. nodosus*, Scoresby nærmest *C. monodontis* for Øje, er i det mindste sandsynligt.

elongatis, filiformibus fere, cornibus anterioribus nonnihil brevioribus, fœminarum simplicibus brevioribus, anterioribus crassis, posterioribus tenuibus, manibus pedum primi paris fere vel plane edentulis, secundi paris bidentatis, dentibus approximatis, anteriori breviore, annulis corporis posterioribus subtus inermibus, solo annulo penultimo fœminæ tuberculis quatuor armato.

Størrelse: Hannen 12^{mm} lang, 5^{mm} bred; Hunnen 10^{mm} lang, 5^{mm} bred[1]).

Opholdssted: «habitat in Sinu Metchigmensi, Maris Beringii, in Balænis» (Br.).

Citat: (1872) Alex. Brandt: «Bericht über die Cyamiden des zoologischen Museums der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften zu St. Petersburg» (Bulletin, t. XVIII p. 113—33)[2]) (*Cyamus Kessleri*, c. fig. xylogr.).

Da jeg af denne Art kun har havt Lejlighed til at undersøge et enkelt Par, som jeg skylder Dr. Brandts Velvillje, er det vel muligt, at jeg i den følgende Beskrivelse ikke ganske har kunnet holde ude fra hinanden, hvad der kun er individuelt, og hvad der udmærker Arten. Foruden til nedenstaaende korte Beskrivelse maa jeg derfor henvise Læseren til Dr. Brandts noget udførligere Skildring. Arten er i øvrigt ved en Række af gode Karakterer vel adskilt fra alle andre bekjendte *Cyamus*-Arter og navnlig fra *C. mysticeti*, som dog vel er den, den kommer nærmest.

Beskrivelse af Hannen. Legemsformen er temmelig smal og langstrakt, den største Brede ikke det halve af Totallængden, Indsnittene mellem Kropringene meget snevre, saa at disse næsten støde umiddelbart op til hinanden; anden Kropring er ikke paafaldende stor; der er intet udmærket ved Formen af den eller af de to følgende (gjællebærende) Ringe, naar undtages at disse i det hele ere svagt udviklede og at deres bageste Sidehjørner løbe ud i en nedad og fortil bøjet Knude[3]), der kommer til Syne bagved Gjællernes og Bigjællernes Fæste; de tre bageste Kropringe løbe paa hver Side ud i en mindre, rund Knude foran Benenes Fæste. Følerne ere korte, ikke længere end Hovedet, men af en temmelig kraftig Bygning. Det nedre Hjørne af første Beenpars Haand springer lidt frem, men en egenlig Tand er der næppe; andets to Tænder sidde temmelig tæt sammen (som hos *C. ovalis*), men her er den forreste kort og but, den bageste længere og spidsere. Gjællerne ere tykke og lange (dobbelt saa lange som Kroppen er bred, men kortere end Totallængden), naae begge langt ud over Spidsen af Følerne. Bigjællerne ere dobbelte og begge Horn for-

---

[1]) De største Exemplarer i Petersborger-Museet ere lidet større: ♂ 14^{mm} l., $5\frac{1}{2}^{mm}$ br., ♀ 11^{mm} l., $5\frac{1}{2}^{mm}$ br.

[2]) Dette Arbejde er først blevet mig bekjendt i Aarets første Dage, længe efter at denne min Afhandling var forelagt Videnskabernes Selskab og afgivet til Trykken. Det indeholder foruden Beskrivelse og Afbildning af ovennævnte Art mere aphoristiske Bemærkninger om de andre Forfatteren bekjendte Arter (som Petersborger-Museet for største Delen havde modtaget herfra ved mig) og navnlig om disse Arters «ontophylogenetiske» Sammenhæng og formentlige Plads i Udviklingsrækken.

[3]) Ved at regne denne Knude for en Bigjælle foranlediges Dr. A. Br. til at tillægge denne Art tredobbelte Bigjæller; en Sammenligning med Forholdet hos andre Arter vil formentlig vise, at denne Opfattelse er mindre rigtig.

længede, næsten traadformede; det forreste (indre) Horn er dog en Deel kortere end det bageste (ydre); derimod er der ingen meget kjendelig Forskjel mellem første og andet Par; ved deres Grund sidder paa hver Side en vandret kegledannet Knude eller Torn [1]. Derimod sees der ikke Torne paa Bugsiden af de følgende tre Led; de tre Par Bagbeen ere smækkre, men ikke meget sammentrykte; Hofternes fortykkede Bagrand danner just ikke en Torn, men dog en tydelig Knude.

Hunnen har forholdsvis lige saa lange Gjæller som Hannen (deres Længde lig med Kroppens, regnet fra anden Kropring), første Beenpars Haand er smækker, uden fremspringende Hjørne; de gjællebærende Ringe (ikke svagere end de følgende og uden ombøjede Baghjørner; Bigjællerne ere tilstede, men enkelte, kortere end hos Hannerne, men længere end de ellers pleje at være hos Hunnerne, den forreste tyk, den bageste tynd; paa Undersiden af næstsidste Kropring 4 tykke kegledannede Knuder.

Efter hvad Dr. Brandt, hvem Fortjenesten af denne Arts Indførelse i Videnskaben tilkommer, har oplyst, hidrøre Petersborger-Museets Exemplarer «fra den afdøde, som rejsende zoologisk Samler højt fortjente Konservator ved det nævnte Museum, E. Wosnessensky«, som i Aaret 1846 plukkede den af en Hval «i Metschigmensky-Bugten, paa Asiens yderste Østspids, tæt ved Beringsstrædet». Der er Grund til at antage, at denne Hval var den Art, der benævnes «den lille Kulema», og som efter den Fremstilling, Aleuterne give af den [2]), maa være nær beslægtet med *B. australis* og *glacialis.*

4. ***Cyamus erraticus*** Rouss. d. Vauz.

(Tab. III fig. 5.)

distinguitur a C. mysticeto branchiis (simplicibus) longissimis, gracilibus, acutis, in utroque sexu caput superantibus, in maribus totum corpus cum capite æquantibus vel illis longioribus; appendicibus branchialibus in maribus bicornibus, cornubus fere æqualibus, in fæminis simplicibus dentatis; antennis superioribus, marium præcipue, longis validisque.

Farven: vinrød (R. d. V.).

Størrelse: Hannen 12^{mm} lang, 5½^{mm} bred; Hunnen 10^{mm} lang, 5^{mm} bred.

Opholdssted: paa Sydhvalen (*Balæna australis*) «paa de glatte Dele af dennes Hud, ved Grunden af de hornagtige Knuder paa Hovedet, paa Finnerne, men især i Akselhulerne under disse og i Folderne omkring Gattet og Kjønsdelene; mere bevægelig — mindre stillesiddende — end *C. ovalis* og *C. gracilis*» (Rouss. de Vauz.).

---

[1]) Denne Dannelse kunde vække Mistanke om, at den paa samme Sted hos flere Arter, (f. Ex. *C. globicipitis*, *C. nodosus* og *Platycyamus Thompsoni*) siddende ganske lignende Torn dog maaskee ikke, som jeg i de følgende Beskrivelser har antaget, repræsenterer Bigjællerne eller disses ene Green.

[2]) Chamisso: Cetaceorum maris Kamtschatici imagines ab Aleutis e ligno fictas, t. XVII f. III.

Synonymer og Citater:

(1834). Roussell de Vauzème l. c. p. 259 tab. VIII fig. 20—23 (*C. erraticus*).

(1840). Milne Edwards: «Hist. nat. d. Crustacés» t. III. p. 113 (med Udelukkelse af alle Synonymer, paa nær det sidste) (*C. erraticus*).

(1842—43). Krøyer: «Naturh. Tidskrift», 4de Bd., S. 479; Tab. V, f. 71—76 (*C. erraticus*).

(1843). Krauss: «Die südafrikanischen Crustaceen», S. 61 (med Udelukkelse af Citatet af Desmarest [*C. mysticeti*]; *C. erraticus*, «af en i Tafelbay fanget Hval, men mindre hyppig paa denne end *C. ovalis*»).

(1862). Spence Bate: «Catal. of Amphip.» p. 368 (*C. erraticus*; Diagnosen imidlertid fuldstændig urigtig).

Beskrivelse af en Han «fra Sydhavet[1])». Længde 9^{mm}, Brede $4\frac{1}{2}^{mm}$. Legemsformen oval, temmelig flad, tredje og fjerde Kropring lidt mindre (kortere) end de andre ligesom hos *C. ovalis*, *mysticeti* etc. De øvre Følere stærke og lange, naae, naar de lægges tilbage, til fjerde Kropring. Første Kropring løber ud i en lille nedadrettet Torn eller Knude paa hver Side, ved Grunden af første Beenpar; anden i tre runde Smaaknuder (de to paa dens Forrand og ved dennes Sidehjørner, den tredje i Baghjørnet), tredje og fjerde hver i een. Første Beenpars Haand er bred, med to utydelige Tænder; andets har to stærke Tænder, adskilte ved en dyb Bugt. Gjællerne ere enkelte, tynde og spidse, meget lange (10^{mm}), længere end hele Dyret, Bigjællerne tvehornede, med begge de spidse Horn lige udviklede. Bagbenene ere stærke og sammentrykte med lange Kløer; Hofterne have underneden hver sin stærke Torn ligesom hos *C. mysticeti*; paa Bugsiden af hver af de tre sidste Kropringe findes der to stærke Torne, paa næstsidste (sjette) desuden Spor til et Par meget smaa bagved det større.

Foruden det beskrevne og Tab. III fig. 5 i de to ydre Figurer afbildede Exemplar har jeg havt Lejlighed til at undersøge et andet lidt større Exemplar (12^{mm} langt, $5\frac{1}{2}^{mm}$ bredt, Gjællerne $12\frac{1}{2}^{mm}$) (efter Opgivende «fra Cayenne»[2]), meddelt af Pariser-Museet), hvis Habitus stemmer noget bedre med Roussells Figur, derved at Kropringene ere adskilte ved videre Mellemrum; i øvrigt

---

[1]) Nærmere Oplysninger om fra hvilken Del af «Sydhavet» dette Exemplar er, foreligge desværre ikke. Paa de større Hudstykker (af *Balæna japonica?*), tæt besatte med talrige Cyamer (*C. ovalis* og *gracilis*), som tidligere fandtes i Universitetets fysiologiske Museum og som jeg i det følgende vil komme til at omtale igjen, har jeg forgjæves søgt efter *C. erraticus*; da den synes at leve mere for sig og ikke at blande sig mellem de to andre Arter, var der da heller ingen stor Udsigt til at finde den der.

[2]) Denne Lokalitetsangivelse er ganske vist meget paafaldende, da det ikke vides, at Sydhvalen nogensinde nærmer sig saa lave Breder; jeg kan kun give den som jeg har faaet den. — At de her beskrevne *Cyami* ere samme Art som Roussels *C. erraticus*, seer jeg dog ikke Grund til at betvivle. Mit Materiale af denne Art er vistnok mindre godt og rigt end ønskeligt var; jeg har imidlertid troet at burde meddele, hvad jeg saa mig i Stand til at oplyse om den.

finder jeg ingen anden væsenlig Forskjel end at Tornene paa femte Kropring ere fire i Tallet, men aldeles rudimentære, hvilket vel kunde være dels en individuel, dels en Aldersforskjel. Exemplaret er afbildet i Fig. 5* ♂. De tilhørende Hunner afvige hverken i Størrelse eller Karakterer fra den nedenfor beskrevne.

Hun (efter et Exemplar fra Tafelbay, meddelt af Prof. Krauss); Størrelse angivet ovenfor. Følerne noget finere og kortere, naae til tredje Kropring; denne og fjerde fuldkommen af samme Størrelse som de følgende. Gjællerne ere kortere (7^{mm}); begge Par naae dog ud over Spidsen af Hovedet. «Tænderne» paa andet Beenpars Haand ere svagere end hos Hannen og førstes nedre Knude ikke tydeligt udviklet. Mellem Grunden af hver Gjælle og Æggepladerne sees en enkelt kort, flad, takket Bigjælle; Tornene paa Bugsiden af Kroppen og Bagbenene forholde sig som hos Hannen, kun ere de alle særdeles store og vel udviklede, i højere Grad endogsaa end hos Hannen; det mindre Par bagved det større paa den næstsidste Ring er forholdsvis mere udviklet.

Saavidt jeg kan see af et Citat hos Spence Bate og Westwood («British Crustacea» p. 86) har Gosse («Mar. Zool. I. p. 131») opført *C. erraticus* som engelsk, sandsynligvis uden Grund. Ligesom Milne-Edwards begaae de nævnte Forfattere den allerede af Krøyer rettede Fejl at forene denne Art og «*C. ceti*» (ɔ: *C. mysticeti* m.).

6. *Cyamus boopis* Ltk.

(Tab. III fig. 6.)

differt a C. erratico, cui maxime affinis, præcipue corpore graciliore, annulisque ejusdem in maribus incisuris majoribus sejunctis, branchiis brevioribus longitudinem corporis haud æquantibus, antennis marium latioribus.

Størrelse: Hannerne 11—12^{mm} lange, 4—5^{mm} brede; Hunnerne 7—8^{mm} lange og 3—3½^{mm} brede.

Opholdssted: paa den nordiske Pukkelhval eller Krepokak (*Megaptera boops*); om ogsaa paa andre *Megaptera*-Arter, er endnu nærmere at undersøge.

Synonym:

(1780). O. Fabricius: «Fauna Grönlandica» p. 253 n. 230 («mea exemplaria accepi in Balæna boope»; *Oniscus ceti*). (Beskrivelse meddeles egenlig ikke; der henvises til Pallas's Beskrivelse (af *C. mysticeti* m.) og tilføjes kun nogle Bemærkninger om Farven[1]) og Opholdsstedet, samt at Hovedet er smallere

[1]) Farven angiver O. Fabricius at være «brun paa den forreste, hvid paa den bageste Halvdeel af Legemet». Hvis denne Angivelse er taget af et tørret Exemplar — hvilket vel ikke er usandsynligt — er den selvfølgelig uden Betydning. — Fabricii efterladte Manuskripter («Zoologiske Samlinger eller Dyrbeskrivelser», Store Kongl. Bibl., Ny Kongl. Saml., Nr. 322) give ingen nærmere Oplysning. Det hedder, 1ste Hefte S. 64: «Paa denne Hval (ɔ: «Stubhvalen», *Balæna boops*) har jeg fundet et Slags Fiskebjørn, der suger sig fast i Huden eller hefter sig med sine store Kløer, der vel heller ikke kan være Hvalen behagelig».

end Pallas fremstiller det, og Bagbenene «tvetornede» (femora postica biaculeata»), hvilket ikke er rigtigt).

Beskrivelse af en Han. Formen er forholdsvis smækker, og navnlig endnu smækkrere end hos *C. erraticus*, som er den af de hidtil beskrevne Arter, som den ligner meest: Kropringene ere endogsaa videre adskilte fra hinanden end hos den ovenfor beskrevne større Han af hin Art. Hovedet er meget smalt og langstrakt og første Kropring løber ogsaa her ud i en lille Knude over Udspringet af første Beenpar; anden Kropring, som er temmelig lille, har ligeledes to afrundede Smaaknuder paa Forranden paa hver Side og en større i det bageste Sidehjørne. Tredje og fjerde Ring ere vidt adskilte, kortere, men ikke smallere end femte og sjette; deres bageste Sidehjørner danne ogsaa her en rund Knude. De øvre Følere ere af en særdeles kraftig Bygning, de to indre Led navnlig udmærkede ved deres Brede; hvor det inderste Led er bredest, er det ikke meget smallere end Hovedet; lagte tilbage ville de naae til tredje Kropring eller endog noget ind paa denne, ere altsaa lidt kortere end hos *C. erraticus*. Gjællerne ere lange — 7 à 8^{mm} hos de større Exemplarer, $^2/_3$ af Totallængden — og naae paa udvoksne Exemplarer, begge Par, ud over Hovedet, men ikke som hos *C. erraticus* (hvis Gjæller de i øvrigt ligne i Form) ud over de øvre Følere. Bigjællerne ere alle tvehornede og Hornene næsten lige udviklede ligesom hos *C. erraticus*, men i øvrigt af noget vekslende Størrelse hos forskjellige Individer, skjøndt altid forholdsvis mindre end hos den nævnte Sydhavs-Art. Første Beenpars Haand er bred med en tydelig Knude eller Tand; andet har to vidt adskilte Tænder, af hvilke den øvre (ydre) er spids, den nedre (indre) temmelig lille; dets Hofter løbe fortil, ligesom hos *C. erraticus* o. fl. a., ud i en pladedannet Forlængelse, som kløver sig i en større afrundet indre og en mindre, spids, ydre Knude. Der findes en Torn under Hoften paa de tre Par Bagbeen og to smaae (mindre end hos *C. erraticus*) paa Bugsiden af sjette og syvende Ring, men ingen paa femte. Paa det tredjesidste Led af de tre sidste Beenpar danner det ydre Baghjørne en meget tydeligere Spids eller Torn end hos *C. erraticus*, hvor det kun danner et mere eller mindre fremspringende Hjørne. — Yngre Hanner have endnu smækkrere Krop og Lemmer, kortere Gjæller og Følere og savne Bigjællerne eller have kun det ene (bageste) Horn af disse, alt efter Alderen; der findes hos dem endnu et Tornpar, paa Bugsiden af femte Ring, som senere forsvinder.

Hunnen er betydelig mindre end Hannen og i mange Henseender forskjellig fra denne, saaledes tredje og fjerde Kropring ikke mindre end de følgende eller i Formen synderlig forskjellige fra disse, Indsnittene mellem Kropringene snevrere, disse derfor tilsyneladende mindre vel adskilte fra hinanden, Gjællerne kortere ($4^1/_2{}^{mm}$ lange hos de største Hunner, hvis Maal ere angivne ovenfor), naae kun til Spidsen af Hovedet (de bagre) eller lidt ud over dette (de forreste), Følerne finere (om end af ret kraftig Bygning) og tillige lidt kortere (naae til tredje Kropring omtrent). Tænderne paa andet

Beenpars Haand ere lidet tydelige, især er den ydre paafaldende lidt udviklet i Sammenligning med, hvad der er Tilfældet hos Hannen. Tornene paa Bugsiden ere meget tydelige, forholdsvis mere udviklede end hos Hannerne, men i øvrigt fordelte paa samme Maade som hos disse, naar undtages, at der ogsaa findes et meget tydeligt Par paa femte Kropring, altsaa seks i alt. Ved Grunden af hver Gjælle er der en halv Bigjælle af lignende Form som hos *C. erraticus*, men uden Takker i Kanten.

De Exemplarer, som foreligge med udtrykkelig Angivelse af at hidrøre fra Pukkelhvalen (*Megaptera boops*), skyldes Etatsraad Olrik, Kaptajn Hammer, Sysselmand Smith og praktiserende Læge (tidligere Skibslæge) Hallas. Desuden har jeg selv fundet den siddende mellem «Hvalkopper» (*Coronula diadema*) paa Hud af denne Hval, og jeg antager overhovedet *C. boopis* for at være en temmelig konstant Snylter paa Krepokaken. Fabricius angiver, at de især findes «ved Lufferne, Ørerne (!), Navlen og Kjønsdelene». Sysselmand Smith skriver, at de fandtes «overalt paa Hvalen»; Hr. Hallas har derimod meddelt mig, at paa den af ham undersøgte Pukkelhval, som fangedes i Myrebugten ved Island i Sommeren 1867, fandtes disse Hvallus i Rynkerne ved Grunden af «Hvalkopperne», men kun paa Halefinnen[1]), ikke paa de andre Steder af Hvalens Hud, hvor de nævnte Balanider sad (Luffens Ydderrand, Bugfolderne, omkring Gattet o. s. v.).

Hvor nær end *C. boopis* i alle væsenlige Træk staaer ved *C. erraticus*, og hvor ringe Vægt Zoologer af den nyeste Skole maaskee ville lægge paa de udhævede Smaaforskjelligheder, af hvilke det ved Exemplarer paa lidt yngre Stadier end de beskrevne endog kunde være misligt at lade sig lede, maa dog den Omstændighed, at den ene lever paa Sydhvalen, den anden paa den nordiske Pukkelhval, i høj Grad styrke Opfattelsen af dem som to distinkte Arter. — Større Tvivl har jeg derimod med Hensyn til nogle paa ubekjendte Hvaler i den tropiske Deel af det stille Hav levende Cyamer, som jeg nu skal gaae over til at omtale, da jeg ikke anseer det for forsvarligt heelt at forbigaae dem med Tavshed, men om hvilke jeg hidtil ikke er naaet til fuldkommen Klarhed.

? *Cyamus pacificus* Ltk.

(Tab. III fig. 7.)

differre videtur a *C. boopi*, cui figura, spinis coxalibus inferiorioribus etc. maxime affinis, branchiis nonnihil longioribus, spinis anguli externi postici articuli tertii pedum posteriorum (V—VII) marium indistinctis, ventralibus fæminarum longioribus.

Størrelse: Hannen 9^{mm} lang, 3^{mm} bred; Hunnen 7^{mm} lang, 3^{mm} bred.

? Varietet: Sp. Bate: «Catalogue of Amphipod. Crustac.» p. 366 t. 58 f. 2 (*Cyamus ceti*) (efter et c. 8^{mm} langt mandligt Expl. fra «Talcahuna» i Pariser-Museet)[2]).

---

[1]) Jfr. Videnskabel. Medd. fra den naturhist. Forening for 1857 S. 176.

[2]) Jeg har havt Lejlighed til at sammenligne dette Originalexemplar til den af Sp. Bate (meget vilkaarligt) som «*C. ceti*» afbildede Art, hvilket velvilligt har været mig overladt i dette Øjemed. Sp.

Opholdssted: paa Hvaler (af ukjendt Slægt og Art) i det stille Hav, ved den amerikanske Side (Panama, Talcahuano?).

Jeg nødes til — i det mindste provisorisk — at optille denne Art paa to Exemplarer, en Han og en Hun, «fra Panama», som jeg skylder Museet i Paris og særligt Hr. Dr. Alphonse Milne-Edwards. Sammenlignes Hannen med Hannen af *C. boopis*, vil man finde, at den i sit Habitus, i alle almindelige Formforhold, kommer den nordiske Art overmaade nær, men tillige at dens Gjæller ere endnu længere — de naae her ud over Spidsen af de fremstrakte øvre Følere og ere overhovedet ikke meget kortere end Legemets Totallængde — at Tornene i det ydre Baghjørne af de tre sidste Beenpars mellemste (tredjesidste) Led er mindre tydelig og andet Beenpars nedre Haandknude lidt mere udviklet. Hunnen afviger fra den tilsvarende Form af *C. boopis* især ved at have de tre sidste Beenpar smækkrere og Tornene paa Kropringenes Bugside, især paa de to sidste længere; Tornene i det ydre Baghjørne af Bagbenenes tredjesidste Led ere derimod her lige saa tydelige som hos Hunnerne af *C. boopis*, og begge Knuderne paa andet Beenpars Haand lidt mere udviklede end hos denne. — Sammenlignet med *C. erraticus* synes Forskjellighederne at stille sig saaledes: Hannen af *C. pacificus* har en smækkrere Bygning, bredere Indsnit mellem Kropringene, lidt bredere Følere, kortere Gjæller, mindre Bigjæller og slet ikke Spor til Torne paa Bugsiden af femte Kropring; Hunnen har en smallere Krop, smækkrere Bagbeen, lidt kortere Gjæller, sex Bugtorne i Stedet for otte, og tydeligere Tornspidser i Baghjørnet af Bagbenenes tredjesidste Led. Yderligere Sammenligninger, anstillede paa et større Materiale, ville imidlertid være aldeles nødvendige for at bestemme Grændserne mellem disse Arter.

Saa længe man ikke veed, hvilken Hval-Art der fostrer «*C. pacificus*», mangler der et væsentligt Moment til dens Bestemmelse. Af geografiske Grunde ligger det maaskee nærmere at henføre den til *C. erraticus*, men i andre Henseender staaer den nærmest ved *C. boopis*. Er det maaskee Kaskelottens ellers ubekjendte Hvallus, som her foreligger? Eller er den tagen af en *Megaptera*-Art i det stille Hav? Den Erfaring, at en fra Museet i Kap og altsaa sandsynligvis fra en eller anden sydlig Hval-Art — uden Tvivl en *Megaptera* — hidrørende *Coronula*-Art ikke er til at skjelne fra *C. diadema* af den nordiske

---

Bates Figur er ikke heldig. Fra mine typiske *C. pacificus* afviger den i Virkeligheden kun ved at være lidt smallere (Længde $8^1/_2$ mm, Brede $2^1/_2$ mm), Gjællerne kortere ($5^1/_2$ mm, naae ikke til Følerspidserne), Bigjællerne overmaade smaa og tredje og fjerde Kropring uden tydelige Sideknuder. Foreløbig henfører jeg den til *C. pacificus* som Varietet af denne; heldigvis er den i Virkeligheden navnløs, da Navnet *C. ceti* ikke med nogen Ret kan tilkomme den; men førend det oplyses, paa hvilke Hval-Arter den og den ægte *C. pacificus* m. leve, vil deres indbyrdes Forhold ikke kunne finde en afgjørende Bedømmelse.

Pukkelhval (*Megaptera boops*) (jfr. S. 244,49), giver mig Mod til ikke at finde det uantageligt, at *C. boopis* kunde forekomme paa det Stille Havs *Megaptera*-Arter; *C. pacificus* og dens Varietet (?) fra Talcahuano kunde da maaskee kun være at opfatte som Former af denne nordiske Art? Jeg er bleven ledet end mere ind paa denne Tanke ved to fra «Museum Godeffroy» modtagne yngre Hanner af en *Cyamus*, der uden anden nærmere Oplysning ere opgivne at være tagne af en Hval ved Tonga-Øerne (nogle endnu yngre Exemplarer ved «Rarotonga, Cooks-Øerne») og som kun ved de noget længere Bagbeen forekomme mig at afvige fra *C. boopis* af samme Størrelse; selv i Børsteudstyret af de øvre Føleres sidste Led finder jeg ingen Forskjel. Med yngre Exemplarer af *C. erraticus* har jeg desværre ikke kunnet sammenligne dem [1]). Idet jeg derfor aabent vedgaaer, at jeg ikke med Hensyn til disse Former er kommet til noget tilfredsstillende Resultat, skal jeg slutte Omtalen af dem med at udtale det Haab, at det snart maatte lykkes Andre at tilvejebringe et rigt Materiale med paalidelig Angivelse af «Fosterdyrene» og derved oplyse, om jeg har Ret i den, som det forekommer

---

[1]) I et lille Glas med Hvallus, som det tidligere Universitetsmuseum i sin Tid har faaet fra det daværende fysiologiske Museum uden nærmere Oplysning, var der, foruden nogle Exemplarer af *C. gracilis* og *C. ovalis*, nogle unge Exemplarer af en tredje Art, som jeg tidligere, da «*C. pacificus*» var mig ubekjendt, uden Betænkning maatte henføre til *C. boopis*. Den Omstændighed, at de laae i Glas med de to paa «*Balæna australis*» forekommende Arter, skulde dog snarest tyde paa, at de ogsaa hidrørte fra denne eller i al Fald fra en anden Sydhavs- eller Stillehavs-Art. For Unger af *C. erraticus* har jeg ikke kunnet ansee dem, saa maatte denne Art og *C. boopis* endnu som halvvoxne ikke være at skjelne fra hinanden, og det kan jeg ikke antage, førend jeg faaer bedre Beviser derfor; lige saa lidet rimeligt vilde det være at antage, at der paa Sydhavets Rethvaler (*Balæna australis* & sp. aff.) skulde leve endnu en fjerde, hidtil overseet eller med *C. erraticus* sammenblandet Art (*C. pacificus*?) — eller at denne maaskee paa en vis Form af Sydhavs-Sletbage træder i Stedet for *C. erraticus*. At fortabe sig i disse Gjetninger er imidlertid aldeles unyttigt, og jeg anfører selve hint i og for sig lidet betydningsfulde Faktum kun for ikke at forbigaae nogen Omstændighed, der mulig under andre Kombinationer kunde lede til, at der spredtes nyt Lys over Spørgsmaalet. — For ikke at slippe nogen Ariadnetraad, der kunde lede mig ud af denne Labyrinth af Usikkerhed, har jeg søgt Oplysning om, hvilke Hval-Arter der ere Gjenstand for Fangst ved Chiles Kyst, og Prof. Reinhardt har da havt den Godhed at meddele mig, at «i selve Bugten, hvorved Talcahuano ligger, er der aldrig drevet regelmæssig Hvalfangst; det var tvertimod forbudt at fange Hvaler der, fordi Strømningerne førte de afspækkede Hvaler ind paa Kysten, hvor de laae og stank. Men udenfor Bugten langs Kysten, paa Højden af Concepcion og Talcahuano, var der endnu i Tyverne og Begyndelsen af Trediverne mange Hvaler og megen Hvalfangst; navnlig fangedes Sydhavshvaler («Southern Right-Whales»), men Sydhavs-Hvalfangerne have stadig ogsaa taget «Humpbacks» (ɔ: *Megaptera*) og «Sulphur-bottoms» (ɔ: virkelige Finhvaler) naar Lejligheden tilbød sig». Jeg skal endnu kun erindre om, at den *Coronula*, hvori Eschricht mente at gjenkjende den nordiske «*Diadema balænaris*» (ɔ: *C. diadema*), var taget af Krøyer ved Siden af et strandet Hvalskelet ved den chileniske Kyst (jfr. Naturhist. Tidsskrift IV S. 486). At E. kan have havt Ret, maa nu forekomme os mindre urimeligt, efter at vi, som ovenfor omtalt, have modtaget den ægte *C. diadema* fra Kap. Ganske vist er Forholdet mellem Hvalkopperne og Hvalen et andet end Forholdet mellem denne og Hvallusen (som er et ægte Snyltedyr, hvad «Hvalkoppen» ikke er), og der kan derfor ikke med Sikkerhed drages nogen Slutning fra det ene til det andet; men der synes dog, som tidligere udviklet, at være en vis Analogi i Hvallusenes og Hvalkoppernes Udbredningsforhold.

mig, ikke ganske ud af Luften grebne Formodning, at der paa en eller flere af det stille Havs Pukkelhvaler lever en Hvallus-Art, der specifisk neppe kan skjelnes fra Krepokakens (*C. boopis*). Min egen Anskuelse er dog indtil videre den, at «*C. pacificus*» m. er en selvstændig Form, specifisk forskjellig fra *C. boopis* og *C. erraticus*, men dannende et Bindeled mellem disse.

7. *Cyamus ovalis* Rouss. de Vauz.

(Tab. II fig. 4.)

differt a C. mysticeti, cui forma similis, branchiis duplicibus, appendicibus branchialibus fœminarum nullis, marium filiformibus, elongatis, anterioribus simplicibus, posterioribus bicornibus; dentibus pedum secundi paris approximatis, anteriori vulgo longiore; coxis pedum posteriorum subtus antice haud in spinas productis.

Farve: hvid (R. de V.).

Størrelse: Hannen 14^{mm} lang, 7^{mm} bred; Hunnen 11^{mm} lang, 6^{mm} bred.

Opholdssted: paa Knuderne paa Hovedet af Sydhvalen (*Balæna australis*) (R. de V.) og det nordlige Stillehavs Sletbag (*B. japonica?*).

Synonymer og Citater:

(1834). Roussell de Vauzème: «Mémoire sur le *Cyamus ceti*» («Annales des sciences naturelles, 2de série. Zool.» Vol. I p. 259, t. 8, f. 1—21; *Cyamus ovalis*).

(1835). Milne-Edwards: «Observations sur les changemens de forme» etc. («Annales des sciences naturelles», 2de série, Zool. Vol. III, t. 14 f. 13—14; *Cyame ovale*). (Udvoxen Hun og Unge af Rugeposen).

Guérin-Méneville, «Iconographie» etc. «Crustacés», t. 28 f. 4 (Han) og 4a (Unge); (denne sidste Kopi efter Milne-Edwards, l. c. f. 14; de øvrige Figurer efter Roussell de Vauzème). (*Cyamus ovalis*).

(1840). Milne-Edwards: «Histoire naturelle des Crustacés», Vol. III p. 113 (*Cyamus ovalis*).

Milne-Edwards: «Cuvier, le Règne animal», grande édition illustrée («Crochard»), Crustacés, t. 63 f. 3.

(1843). F. Krauss: «Die südafrikanischen Crustaceen» S. 61 (*C. ovalis*, af en i Tafel-Bay dræbt Hval; ingen Beskrivelse; Størrelse 6 Linier; «meget hyppigere end *C. erraticus*»).

(1857). White: «A popular history of British Crustacea» p. 219 (*Cyamus ovalis*).

(1862). Spence Bate: «Catalogue of the specimens of Amphipodous Crustacea in the collection of the British Museum», p. 367, t. 58 f. 3 (efter et Exemplar fra Cap i Pariser-Museet) (*C. ovalis*).

(1866). Spence Bate and Westwood: «A history of British sessile-eyed Crustacea» p. 91 c. fig. (Han og Hun; Kopier af Roussell de Vauzème; Beskrivelsen ogsaa øst af fremmede Kilder).

(1871). Alex. Brandt: «Ueber die Haut der nordischen Seekuh (*Rhytina borealis* Ill.») («Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg», VII série, t. XVII No. 7) S. 17—23, t. f. 17—19 (*Cyamus Rhytinæ*) (Jfr. Sammes «Bericht über die Cyamiden» etc. S. 688—90: *C. ovalis*).

Beskrivelse af Hannen. Det største foreliggende Exemplar er 14^{mm} langt og 7^{mm} bredt. Legemsformen ligner meget den hos *C. mysticeti*; dog er anden Kropring forholdsvis længere og ved en Fordybning paa langs samt et bredt Indsnit i den stærkt buede Forrand ligesom deelt i to puklede Sidedele; den løber i hvert Sidehjørne ud i en tydelig Knude ligesom paa den nævnte Art af Nordhvalen. De øvre Følere ere omtrent saa lange som anden Kropring er bred og naae, naar de lægges tilbage, til tredje Kropring. Denne og fjerde ere ligesom hos *C. mysticeti* og de andre hidtil beskrevne Arter noget svagere end de følgende; den første løber, paa hver Side, baade fortil og bagtil ud i en tydelig Knude, den anden blot bagtil. Alle Benene ere meget stærkere sammentrykte end hos *C. mysticeti*, Kanten mellem deres to Flader derfor meget skarpere. «Tanden» paa første Beenpars Haand er mere eller mindre tydelig; andet Beenpars Haand meget stor, dennes to «Tænder» meget fremtrædende og stillede nærmere ved hinanden end f. Ex. hos *C. mysticeti*, den ydre mere spids og temmelig lang, den indre mere but og oftest lidt kortere, Bagbenenes Hofter løbe fortil ud i en Plade med fremspringende Hjørner og fortykket Yderrand[1]), men ikke som hos alle de hidtil beskrevne Arter i en Torn; derimod er der en lille Knude paa Undersiden af de to sidste Par Baghofter[2]). Benene ere i det hele langt mere bevægelige end hos *C. mysticeti* og kunne med stor Lethed drejes rundt; Drejningen finder Sted mellem andet og tredje Led. Undersiden af hver af de to sidste Kropringe kan have fire meget smaa (ofte aldeles utydelige) Knuder. Gjællerne ere lange, tynde, traaddannede og dobbelte, d. v. s. hvor der hos de andre Arter kun findes en, findes der her to, som ved deres Grund hænge sammen og fortsætte sig over i hinanden; den øvre Green er meget længere end den nedre. Den længere Green af første Par naaer ud over Hovedet, af andet til Enden af dette. Bigjællerne ere lange og tynde (omtrent saa lange som tredje og fjerde Kropring tilsammen); ved Grunden af de forreste Gjæller er der en, af bageste to saadanne Bigjæller. — En yngre Han (8^{mm} lang, $3^1/_2$^{mm} bred) har kortere Gjæller; deres Længde er her kun saa stor som Kroppens Brede.

---

[1]) Det er denne Yderrand, som hos *C. mysticeti* fortil løber ud i Tornen; det er vel egenlig kun en Gradsforskjel, men den er dog opfattelig nok.

[2]) Roussell de Vauzème afbilder et tredje Par paa femte Beenpar hos Hunnen: jeg har ikke seet dem.

Den største foreliggende Hun er 11mm lang og c. 6mm bred, følgelig lige saa stor som de største Hunner af *C. mysticeti*, forholdsvis (ɔ: i Forhold til Hannerne) altsaa større end hos denne Art. Hunnerne afvige (bortseet fra de umiddelbart i Forplantningens Tjeneste staaende Dele) kun i følgende Punkter fra Hannerne: De gjællebærende Kropringe ere snarere større (længere) end kortere end femte; af disse Ringes Knuder er kun den i tredjes forreste Sidehjørne udviklet; Gjællerne forholde sig som hos Hannerne, men ere kortere: den længere Green af første Par naaer i det højeste til Enden af Hovedet, af andet Par til dettes Grund; Bigjæller mangle aldeles. Første Beenpars Haand har ogsaa her en mere eller mindre utydelig Tand, og Tornene paa Undersiden af de to sidste Kropringe ere tydeligere end hos Hannerne.

Skjøndt Whites korte Beskrivelse[1]) af hans *C. ovalis* ganske passer paa denne Sydhvalens hyppigste Snylter, kan man dog neppe uden yderligere Bevis antage, at denne Art virkelig er taget paa en ved Englands Kyster strandet (end sige hyppigere forekommende) Art, denne være nu den ægte *Balæna australis* eller ikke; White oplyser ikke noget om sin Kilde til denne noget paafaldende Optagelse af en af Sydhvalens Snyltere i den evropæiske Fauna, og Spence Bate, der kun støtter sig paa White, havde vistnok gjort bedre i at udelade den af sit Værk over de engelske Ringkrebs, hvor dens Optagelse sikkert vil afstedkomme nye Misforstaaelser[2]). — Af den af Say[3]) beskrevne *C. abbreviatus*, tagen af en ubestemt «*Balæna*», uvist hvor, findes der Original-Exemplarer i «British Museum», efter hvilke Spence Bate har meddelt[4]) en ny Beskrivelse og en Afbildning; han tilføier, at den forekommer ham kun at være Ungen af *C. ovalis*. Under alle Omstændigheder vil man vel nu kunne definitivt stryge den Sayske Art af de sikkre og erkjendelige Arters Tal.

Roussell de Vauzème skylde vi den Oplysning, at *C. ovalis* lever sammen med *C. gracilis* paa *Balæna australis*, paa de bruskagtige Knuder, som Overhuden danner paa Hagen, Læberne og Overkjæben, men især i Nærheden af Blæsehullerne; der sidde Balanerne af *Tubicinella*-Slægten, og omkring dem samle atter Hvallusene sig i saadan Mængde, at Hvalens Hoved allerede i lang Afstand synes hvidt, naar den løfter det op til Overfladen. Ligesom *C. gracilis* — der ved sin klare gule Farve er let at kjende fra *C. ovalis* — forlader den ikke de hornagtige Knuder paa Hvalens Hoved. De Hvaler, hvorfra R. de V.

---

1) «Body much wider than in *C. ceti*; four pairs of branchial appendages in both sexes, those of third ring with a single short slender appendage at the base, those of the fourth ring with two of unequal length; lives in clusters on the hard projections of head of whale».

2) Saaledes omtaler Alex. Brandt (l. c. S. 20) uden videre *C. ovalis* som forekommende paa Hvaler ved «de brittiske Kyster».

3) Journal of the academy of natural sciences of Philadelphia. Vol. 1 pt. 2, p. 392.

4) Catalogue of Amphipod. Crust. p. 367, t. 58 f. 4.

havde sine Cyamer, vare fra den sydligste Deel af Atlanterhavet mellem Falklands-Øerne og Tristan d'Acunha, og den i Tafelbay indstrandede, hvoraf Krauss fik sine Exemplarer, har vel ligeledes været den ægte *Balæna australis*; det samme gjælder vel om de Hvaler «from near Patagonia», af hvis Snyltere (*C. ovalis* og *gracilis*) Dr. Packard har havt den Godhed at sende mig nogle Stykker; ogsaa de, som Dr. Møller bragte Prof. Krøyer[1]) fra det danske Hvalfangerskib «Concordias» første Rejse kunne vel hidrøre fra den samme virkelige Sydhval (eller fra *Balæna antipodarum*, hvis de ligesom de *Coronula*'er, samme Skibslæge forærede Eschricht[2]), ere tagne ved Ny-Seland); derimod vare de «udmærket smukke Stykker» af Sydhvalens «Krone» med Tubicineller og Cyamer (*C. ovalis* og *gracilis*), som tidligere opbevaredes i det fysiologiske Museum, efter hvad Eschricht anfører (l. c.) fra Farvandet ved Kamschatka, altsaa uden Tvivl af *B. japonica*, hvilket endelig ogsaa vil gjælde om de i det følgende omtalte af Wosnessensky sammesteds indsamlede Exemplarer, om hvis fuldstændige Identitet med *C. ovalis* R. V. jeg ikke kan nære nogen som helst Tvivl. Selv har jeg havt Lejlighed til at undersøge flere eller færre Exemplarer fra alle de nævnte Udbredningsbælter — fra Cap, fra Patagonien, Ny-Seland og Kamschatka, d. v. s. fra Havene i større eller mindre Nærhed af disse Punkter — uden at kunne opdage nogen Forskjellighed imellem dem. Vi staae altsaa her lige overfor to Alternativer: enten maa det være den samme Hvalart, som forekommer paa begge Sider af Linien i det stille Hav, saa vel som i den sydligste Deel af Atlanterhavet: ved Cap, Patagonien, Ny-Seland og ved Kamschatka; eller *C. ovalis* maa ligesom *Tubicinella balænaris* beboe baade den i den sydlige Deel af Atlanterhavet og af det stille Hav forekommende Sletbag (den egenlige Sydhval) og den, ved et bredt, varmt Havbælte derfra adskilte, i den nordlige Deel af det stille Hav levende *B. japonica*. Da det først nævnte Alternativ vel ubetinget vil blive forkastet af de med Hvalernes Artsadskillelse mere fortrolige Zoologer, bliver formentlig kun det sidste tilbage: at *C. ovalis* ikke alene, som hidtil antaget, beboer *Balæna australis*, men ogsaa *B. japonica* og muligvis andre af det stille Havs Sletbage, hvis saadanne gives (f. Ex. *B. antipodarum* Gray).

„*Cyamus Rhytinæ*" I. F. Brandt.

Størrelse: ½ Tomme lang (Steller).

Opholdssted: paa det uddøde «Barkdyr» (den Stellerske Søko, *Rhytina borealis*) i Hudens Fordybninger, især paa Lufferne, Patterne, ved Gattet og Kjønsdelene (Steller).

---

[1]) Naturh. Tidsskr. IV Bd. S. 475.

[2]) Undersøgelser om Hvaldyrene. I. (Vid. Selsk. Skr. naturv. mathem. Afd. XI) S. 150 og 151.

Citater:

(1751). Steller: «Novi Commentarii Petropolitani», t. II, p. 298, 324 og 330.

(1753). — «Ausführliche Beschreibung von sonderbaren Meerthieren», S. 54, 97 og 106.

(1849). J. F. Brandt, «Symbolæ Sirenologicæ, quibus præcipue *Rhytinæ* historia naturalis illustratur» I. p. 153 («Mémoires de l'academie de St. Pétersbourg», VI. série, sc. natur. t. V) (*Cyamus* s. *Sirenocyamus Rhytinæ*).

Hvad Steller beretter om dette med sin Vært udryddede Dyr, er omtrent følgende: «Denne Søko plages af et ejendommeligt Insekt, en Slags Lus, der plejer at opholde sig i stor Mængde paa de rynkede Forlemmer, Patterne, Kjønsdelene, ved Gattet og i Hudens skruppede Fordybninger. Hvor de gjennemgnave begge Hudens Lag, opstaaer der Vorter af den udsivende Vædske. Disse Insekter tillokke Maagerne, som man derfor seer sætte sig paa Søkøernes Ryg og med deres Næb afplukke dem disse Lækkerbiskener. Disse Insekter ere i Almindelighed en halv Tomme lange, leddede, seksbenede, hvide eller gulagtige, gjennemsigtige; Hovedet er aflangt og spidst, større end et Hirsekorn; paa Panden bærer de to korte, leddede (*geniculatæ*), 1/2 Linie lange Antenner, og i Stedet for Underkjæbe have de to fine, toleddede, i Enden meget spidse og piggede (*clavata*) Smaaarme ligesom hos *Squilla*'erne [ɔ: Caprellerne?]; Resten af Legemet dannes af 6 Ringe, en for hvert Par Been; disse Kropringe ere hvælvede paa Ryggen og 1/3 Linie (!) brede; dog er Brystringen [ɔ: anden Kropring] dobbelt saa bred, hvorimod de øvrige blive smallere mod Halen. Fra Siderne af «Brystringen», der har Form som det halve af en Lindse («*dimidiam lentem refert*[1]), udgaaer der et Par tykke toleddede Sakse, som hver ende med en bøjelig Klo (*aculeus*), hvormed de holde sig rigtig fast i Søkoens Overhud; de øvrige Lemmer ere smækkrere og aftage efterhaanden i Længde, men ende alle med Kløer; de to bageste ere meget korte, udspringe fra den runde Halering [syvende Kropring?] og lede Dyrets Gang, naar det flytter sig.»

Det er maaskee nærmest Billedet af en Cyamide, der stiger frem for Indbildningskraften, naar man opmærksomt gjennemlæser denne Beskrivelse, men der er dog flere Omstændigheder, der udviske dette Billedes Omrids; at første Beenpar (*brachiola*) skildres som toleddede, og at andet Beenpar (*chelæ*) ligeledes beskrives som toleddede, kan maaskee forklares som en mere eller mindre undskyldelig Fejltagelse fra Beskriverens Side. Men var den virkelig kun 1/3 Linie bred[2]) (anden Kropring 2/3'''), bliver Legemsformen yderst smækker, ikke som hos *C. gracilis*, med hvilken den ældre Brandt sammenligner den, men som hos en Caprellin; var det da maaskee snarere en Caprellin? De korte Følehorn (1/2''') saa vel som den Omstændighed, at Caprellerne («*Squillæ*») synes at have været Be-

[1]) Misforstaaet i den tydske Oversættelse.

[2]) Det gaaer naturligvis ikke an at tolke «bred» som «lang»; thi da vil Totallængden kun blive 2 Linier i Stedet for 6.

skriveren vel bekjendte Dyr, tale ikke derfor. Eller er der indløbet en fuldstændig Forvirring i Maalangivelserne? Og hvorledes er det at forstaae, at Steller kalder dem seksbenede? Det ligger vel nærmest at henføre dette Udtryk til de tre Par Bagbeen (af Forbenene omtales jo første Par som «Smaaarmene» og andet som «Saksene»); men Steller antyder jo tillige, at der var lige saa mange Beenpar som Kropringe, altsaa seks Par; og da han ikke med et Ord taler om, at to af disse Par havde en fra de andre afvigende Skikkelse, kunde der være en vis Sandsynlighed for, at Benene slet ikke manglede paa de gjællebærende Ringe (hvis Gjæller maaskee ikke let vare synlige fra oven og derfor havde unddraget sig hans Blik); det blev med andre Ord ikke en ægte *Cyamus*, men snarere en *Leptomera*- (*Proto*)-agtig Skikkelse eller i al Fald en Overgangsform mellem Cyamer og Capreller, der fremstiller sig for Tanken, saaledes som det ogsaa for længe siden er udhævet af J. F. Brandt, der hypothetisk henførte den til en egen Slægt, *Sirenocyamus*, med Hensyn til hvilken det dog endnu blev at undersøge, om ikke andre Arter af den endnu skulde leve som Snyltedyr paa de endnu levende Søkoer: Dygongen og Manaterne.

Hvis der ikke fra denne Side kan kastes noget Lys over Stellers for sin Tid respektable, men ikke tilstrækkelige Beskrivelse, vil der altid kunne være meget delte Meninger om den rette Opfattelse af denne med sit «Fosterdyr» udryddede Cyamide. For ikke længe siden er Opfattelsen imidlertid bleven ledet i en uventet Retning ved en Opdagelse af Dr. Alex. Brandt. Han fandt i 1871 i Petersborger-Museets Magasiner et formentligt Stykke Hud af selve Barkdyret — hvorledes dette er kommet i Museet, er ganske ubekjendt, fra Steller kan det i al Fald ikke hidrøre — og paa dette sad der en stor Mængde Exemplarer af begge Kjøn af en *Cyamus*, som Hr. Brandt paa Grund af den Overeensstemmelse, som han finder mellem hint Hudstykke og Stellers Beskrivelse af *Rhytina*'ens Hud, anseer for at være den virkelige *Cyamus Rhytinæ* J. F. Brandt, og hvoraf han derfor har meddelt Beskrivelse og Afbildning. Her møder os nu den mærkelige Kjendsgjerning, at den formentlige *C. Rhytinæ* viser saa stor Lighed med *C. ovalis* — en af de skarpest udprægede og lettest kjendelige Hvallus-Arter — at det for Dr. A. Brandt selv stillede sig som tvivlsomt, om den er andet end en Afart af denne: ja, for saa vidt jeg maatte være i Stand til at fælde nogen Dom i Sagen, efter hvad derom af Hr. B. var meddeelt, vilde denne kun kunne blive den, at Hr. Br.s Diagnose er ude af Stand til at holde den ude fra *C. ovalis*, eller med andre Ord, den formentlige Barkdyr-Lus, *C. Rhytinæ* A. Brandt, er ikke forskjellig som Art fra Sydhvalens og den nordlige Stille-Havs-Sletbags *C. ovalis*[1]). Det var visselig ikke det, der skulde ventes, hverken af Stellers Beskrivelse,

[1]) Siden dette nedskreves har Hr. Dr. Brandt havt den Godhed at sende mig nogle Exemplarer (2 Hanner, 1 Hun og nogle Unger) af de paa den formentlige *Rhytina*-Hud siddende Cyamer. Jeg har saaledes været i Stand til at lægge dem Side om Side med lige store Exemplarer af *C. ovalis*; jeg

eller af hvad der ellers er bekjendt om *Cyamus*-Arternes Fordeling o. s. v., og i Betragtning af denne Uoverensstemmelse mellem det med Grund ventede og det formentligt fundne, er det vel berettiget, om man forholder sig noget tvivlende lige over for dette sidste og ønsker det underkastet en nærmere Prøvelse, om ikke det omtalte Hudstykke dog maaskee simpelt hen kunde være, ikke af en *Rhytina*, men af en Bardehval og navnlig af *Balæna japonica*. En Kjendsgjerning, som Dr. Br. selv anfører i Slutningen af sin Afhandling, peger i samme Retning. I Petersborger-Museets Magasin fandt Hr. B. nemlig senere nogle smaa Hudprøver (indsamlede af afdøde Wosnessensky) af en ved Kamschatka fanget «*Balæna mysticetus* (ɔ: *japonica*?)», og disse Hudprøver, som «besidde en ikke ringe Lighed» med det ældre formentlig fra Barkdyret hidrørende Hudstykke, navnlig med sammes mindre knudrede Partier — og, som Dr. B. bemærker, erindre om Stellers Ord: «ejusmodi cuticula in nulla prorsus re mutata *Balænam* ambit, licet ejusdem nulla apud auctores fiat mentio» — ere tæt spækkede med Cyamider, som «bortseet fra deres betydeligere Størrelse neppe ville være til at skjelne fra de formentlige Barkdyr-Lus» [1]. — Saa vidt jeg skjønner er der ogsaa en overmaade stor Lighed i Udseende og Bygning mellem de af Dr. Brandt afbildede Huddele, der antoges at tilhøre *Rhytina*'en, og flere for mig staaende af Cyamer beboede og begnavede Hudstykker af det nordlige Stillehavs Sletbag samt af andre Hvaldyr, og det forekom mig derfor at være den rimeligste Løsning af alle Vanskeligheder, at antage, at det kun var et Stykke ægte Hvalhud, som Hr. Br. havde fundet henliggende uden nærmere Oplysning i Petersborger-Museet. Jeg henvendte mig imidlertid til vor kyndige Cetolog, Prof. Reinhardt, for at erfare hans Mening om dette Spørgsmaal, som jeg ikke besad særlig Sagkundskab nok til at bedømme; han har havt den Godhed at meddele mig, at «min Mistanke, at det fundne Stykke Hud turde være af en Hval (og nærmest da af en *Balæna*), forekommer ham vel begrundet og ikke modsiges af nogen af Enkelthederne i Dr. Brandts Beskrivelse»; og han tilføjer, at han «ikke

---

finder ikke en Gang saa megen Forskjel mellem dem, at jeg kunde holde dem ude fra hinanden som Varieteter. Indskæringen i Forranden af anden Kropring sees lige saa tydelig hos det ene af de 3 foreliggende Exemplarer af «*C. Rhytinæ*» som hos lige store Exemplarer af *C. ovalis*, og at den ikke er saa tydelig hos de andre, kan hidrøre fra Indtørringen. De «brune Skinner» paa Gjællerne ere vistnok en Følge af Indtørringen; maaskee kunne ogsaa Ar efter Beskadigelser i levende Live have givet Anledning til denne Særegenhed. Jeg finder saa stor Forskjel i Breden af første Beenpars Haand hos samme Individ af «*C. Rhytinæ*» (jfr. Fig. 4** p^1 ♂), at der ikke kan være Tale om at benytte den til at adskille dem. Hos *C. ovalis* er den første Tand paa andet Beenpars Haand gjennemgaaende lidt længere og lidt mere spids end den anden; men sammenlignes flere Hænder af «*C. Rhytinæ*», vil man endog hos samme Individ kunne træffe Forskjellen mellem Tændernes Længde større eller mindre (jfr. Fig. 4* ♂ p^2); og hos den foreliggende Hun er anden Tand den længste (jfr. Fig. 4*** p^2 ♀).

[1]) Af disse Cyamider har Hr. Brandt ligeledes havt den Godhed at sende mig et Par Exemplarer; det er to Hunner, ikke aldeles fuldvoksne, men i ingen Henseende forskjellige fra lige store Hunner af *C. ovalis*. Tænderne paa andet Beenpars Haand ere nøjagtig lige store hos disse (jfr. Fig. 4**** p^2).

seer, at der er noget i Vejen for at antage, at det fundne Stykke Hud er af Hovedet af en Rethval», hvorfra det, da det bærer enkelte Haar, nødvendigvis maatte hidrøre, hvis det overhovedet skulde have tilhørt et ægte Hvaldyr. — «Barkdyrets» Snylter — den være nu en Cyamide eller ikke — ere vi følgelig neppe komne nærmere i 1872 end vi vare det i 1849.

8. *Cyamus nodosus* Ltk.

(Tab. IV fig. 8.)

distinguitur dorso nodoso (ɔ: annulis corporis 3tio—7mo sulcis longitudinalibus in partes 2—4 gibbosas divisis); branchiis sat brevibus; appendicibus branchialibus brevissimis, simplicibus, conicis; manibusque primi paris edentulis, secundi paris bidentatis.

Størrelse: Hannen 8^{mm} lang, 3^{mm} bred; Hunnen 7^{mm} lang, 4^{mm} bred.

Opholdssted: paa Narhvalen (*Monodon monoceros*), især paa Huden omkring Stødtanden, men ogsaa paa andre Steder af Legemet.

Synonym:

(1789). «Zoologia Danica» Vol. III, p. 69; t. CXIX f. 13—17 (*Oniscus ceti*, med Udelukkelse af Citaterne).

Beskrivelse af Hannen: Legemsformen er temmelig smal, men ikke flad, de enkelte Ringe tykke og mere eller mindre puklede. Første Kropring er fuldstændig sammensmeltet med Hovedet, og anden frembyder intet mærkeligt; tredje og fjerde (som neppe ere kjendelig svagere end de følgende[1]) ere ved Længdefurer delte hver i fire, femte og sjette hver i tre, syvende utydeligt i to Pukler. Det bageste Sidehjørne af hver Ring (paa tredje og fjerde ogsaa det forreste) løber ud i en mere eller mindre tydelig, rund eller spids Knude. De øvre Følere have omtrent Hovedets Længde og en temmelig kraftig Bygning. Første Fodpars Haand er uden «Tand»; andet har derimod to smaa «Tænder». Gjællerne ere korte $2\frac{1}{2}{}^{mm}$) og trinde; det første Par naaer til Øjnene. Bigjællerne ere kegleformige og enkelte; de have egenlig ganske Karakteren af en ud til Siden rettet Torn, og kun Sammenligningen med andre Arter viser, at de svare til disses saakaldte «Bigjæller». Torne paa de bagre Kropringes Bugside findes ikke, eller ere i det højeste kun antydede som to stumpe Knuder paa hver af de sidste Ringe. Paa yngre Exemplarer forsvinde Kropringenes Længdefurer og Ryggen er ganske glat; selvfølgelig ere Gjællerne her endnu kortere og Kropformen smækkrere. En ung Han af 4^{mm} Længde er kun 1^{mm} bred og har Gjæller af $\frac{1}{2}{}^{mm}$s Længde.

Hunnen er forholdsvis bredere og har tredje og fjerde Kropring noget større end hos Hannen, hvilken den for Resten ganske ligner. En lille spids Knude, som i Reglen sees ved Grunden af hver Æggeplade, mellem denne og Gjællestilken, svarer

[1]) Paa indtørrede Exemplarer træder dog ligesom hos andre *Cyamus*-Arter den svagere Udvikling af disse to Ringe stærkere frem.

uden Tvivl til Hannernes «Bigjælle». Hos unge Hunner (5^{mm}) med kun halvt udviklede Æggeplader, mangler den endnu.

Efter de foreliggende Erfaringer maa *C. nodosus* forekomme i stor Mængde paa Narhvalen. Med Hensyn til dens Forekomst paa denne sammen med *C. monodontis* henvises til, hvad ovenfor under denne Art er anført. Jeg har dertil kun at føje, at for saa vidt det Navn (*C. Belugæ*), hvormed den har været benævnet herhjemme, og hvorunder jeg veed, at den er bleven meddeelt andre Samlinger, antyder eller vil fremkalde den Forestilling, at denne Hvallus tillige skulde leve paa «Hvidfisken» (*Delphinapterus beluga*), da er dette, saa vidt jeg har kunnet erfare, uhjemlet; eftersom Narhvalen og Hvidfisken ere meget nær beslægtede Dyr[1]) (langt nærmere Slægtninge end man maaskee ofte endnu antager), tør jeg dog ikke af den Omstændighed, at den vitterligt lever paa Narhvalen, drage den Slutning, at den ikke tillige kan leve paa Belugaen. Imidlertid har jeg ofte henvendt det Spørgsmaal til Mænd, der gjennem langvarigt Ophold i Grønland vare fortrolige med dette Lands Natur, om de nogensinde havde seet «Lus» paa den egenlige «Hvidfisk» — et Dyr, hvoraf der aarlig fanges en 500 Stykker — og altid faaet et benægtende Svar, hvorimod de i Reglen meget godt kjendte Narhvalens «Utøj». Men jeg har tillige faaet en Oplysning (som i øvrigt allerede findes hos Fabricius, i «Fauna Grönlandica» p. 30 og 50), og som synes mig fuldkommen at kunne hæve den Misforstaaelse, som jeg antager har fundet Sted, nemlig at disse to Hval-Arter oftere forveksles i Grønland selv, fordi det grønlandske Sprog har en Fællesbenævnelse («Kelelluak») for dem begge; da denne nu af de danske Kolonister gjengives som «Hvidfisk», oversættes Belugaens grønlandske Navn («Kelelluak kernektok») ved «hvid Hvidfisk» og Narhvalens ved «sort Hvidfisk» («Kelelluak kakortok»). Exemplarer af Narhvalens Hvallus kunne derfor meget godt være blevne nedsendte som tagne af «Hvidfisken» («Kelelluak») og dermed oprindelig være meent «den sorte Hvidfisk» ɔ: Narhvalen[2]).

Jeg kan dog her ikke lade uomtalt, at der tidligere i det fysiologiske (Eschricht'ske) Museum opbevaredes nogle faa unge Exemplarer af en Hvallus-Form, som skulde være tagne «*in Delphino sp.*» — desværre uden al anden nærmere Oplysning. Deres Længde er højst $4—4\frac{1}{2}^{mm}$. De høre aabenbart til den anden Underafdeling af *Cyamus*-

---

[1]) Jfr. f. Ex. Flowers Oversigtstavle over Hvalslægterne i «Trans. Zool. Soc.» VI (1869) p. 115, hvor *Beluga* og *Monodon* danne en af Tandhvalernes 5 Underfamilier (*Belugina*).

[2]) Dr. Brandt («Bericht» S. 699) anfører, at Petersborger-Museet i sin Tid har faaet nogle Exemplarer af *C. nodosus* fra afdøde Etatsraad Eschricht som «*Cyamus delphini globicipitis* fra Færøerne», og mener deraf at kunne drage den Slutning, at *C. nodosus* ogsaa forekommer paa Grindehvalen. Dette tillader jeg mig paa det bestemteste at betvivle; fandtes der end i det Eschrichtske Museum et Glas med et Stykke Hvalhud med hin eller en lignende Betegnelse, er der dog for mig ikke den ringeste Tvivl om, at dette beroede paa en Hukommelsesfejl eller Etiketforveksling, foranlediget ved at E. baade havde faaet Stykker af Grinde-Hvalhud fra Færøerne og af Narhvalhud fra Grønland med Cyamer. Det omhandlede Stykke er upaatvivlig af en Narhval og fra Grønland, med hvilket Lands Fauna E. jo i mange Aar stod i en meget livlig Forbindelse.

Slægten, hvortil *C. nodosus, gracilis* og *globicipitis* høre, og da begge Kjøn have to Tænder paa andet Beenpars Haand, er det nærmest med *C. nodosus* at de maae sammenlignes. De stemme ogsaa med denne Art ved de forholdsvis korte Gjæller og de enkelte, kegle- eller torndannede Bigjæller hos begge Kjøn, saa vel som ved Manglen af Knuder eller Torne paa Kropringenes Bugside, i øvrigt. Sammenlignes de imidlertid med Exemplarer af *C. nodosus* af samme Størrelse, viser det sig, at den paa «Delfiner» tagne Form er mindre smal, har længere Følere, de gjællebærende Ringe forholdsvis svagere, Gjællerne meget længere og tyndere, og i det hele bærer Præget af at være en Deel nærmere ved sin endelige Udvikling; Bigjællerne f. Ex. ere endnu ikke tilstede hos Exemplarer af Narhval-Lusen af denne Størrelse. Den foreliggende Delfin-Lus maa altsaa tilhøre en egen Art, som vel endnu ikke er kjendt i sin fuldt udviklede Skikkelse (en Hun af 4^{mm}s Længde har endnu kun halvt udviklede Æggeplader), men om hvilken man i al Fald kan sige det, at den ikke bliver nær saa stor som *C. nodosus*, der dog er en af Slægtens mindre Arter. Da den endnu ikke vil kunne karakteriseres paa fyldestgjørende Maade, og det desuden er ubekjendt, paa hvilken Delfin-Art den er tagen, har jeg ikke villet tildele den noget Artsnavn, men dog henlede Opmærksomheden paa Tilværelsen af en saadan Form, for kommende Forskeres og Forskningers Skyld. Sandsynligheden for, at den «Delfin», hvoraf den var tagen, netop kunde være Hvidfisken, er dog neppe meget stor. Med *C. Delphini* Guérin kan den heller ikke identificeres. (Om Bennetts Iagttagelse af Hvallus paa «Delfiner» er talt i det foregaaende S. 242).

9. ***Cyamus globicipitis*** Ltk.

(Tab. IV, fig. 9.)

distinguitur forma sat gracili; annulo corporis secundo maximo; manibus pedum secundi paris dente unico, ungui approximato; antennis superioribus validis, latis; branchiis brevibus; cornubus anterioribus appendicum branchialium in maribus elongatis branchiformibus, in fœminis vero deficientibus; spinis ventralibus valde conspicuis.

Størrelse: Hannen 9^{mm} lang, 4^{mm} bred; Hunnen 6½^{mm} lang, 2½^{mm} bred.

Opholdssted: paa Grindehvalen (*Globicephalus melas*), paa Kroppen og ved Tænderne.

Synonym: Steenstrup: «Foreløbig Bemærkning om Forekomsten af en *Otion* og en *Cyamus* paa den færøske Grindehval (*Delphinus globiceps* Auct.»)(«Videnskabelige Meddelelser fra den naturhistoriske Forening» for 1843, S. 95). (*Cyamus* sp. n.?)

Beskrivelse af Hannen. Formen er temmelig smal eller langstrakt; anden Kropring er meget stor og ligesom indskaaren fortil for at optage Hovedet, med hvilket

første Kropring er saa fuldstændig sammensmeltet, at den slet ikke kan erkjendes som egen Ring. Tredje og fjerde ere ubetydeligt mindre end de andre. De øvre Følere ere forholdsvis store (c. 3^{mm}), dobbelt saa lange som Hovedet, men navnlig meget brede paa Grund af de to inderste Leds næsten kølleagtige Opsvulming; de nedre Følere ere meget smaae, uleddede. Første Beenpar er fint, sammentrykt, Haanden uden Tand; andets har kun een (alle andre bekjendte *Cyamus*-Arter med Undtagelse af *C. gracilis* have to), som sidder tæt ved Kloen; dets Hofte har en spids Knude, der vender lige opad og sees paa hver Side af Hovedet; ogsaa Hoften af de tre Par Bagbeen løber fortil ud i en tydelig Spids eller lille Torn. Gjællerne ere korte; første Par naaer kun til Hovedet; men næsten lige saa store ere de under Bugen skjulte, aldeles gjælleagtige fire Bigjæller, som svare til det forreste (indre) Horn af de andre *Cyamus*-Arters saakaldte Gjællevedhæng eller Bigjæller[1]; umiddelbart bag ved hver af dem sidder en horizontal Torn, svarende til de sædvanlige Bigjællers bageste (ydre) Green eller Horn. Under hver af de tre sidste Kropringe er der to stærke Torne, som ere rettede noget fortil. — Hos Ungerne forsvinde Bigjællerne, de egenlige Gjæller forkortes o. s. v.

Hunnen afviger fra Hannen (foruden ved Størrelsen) ved at mangle de egenlige Bigjæller (som her vel ere omdannede til Æggeplader), hvorimod de Torne, som repræsentere disses bageste Horn ere tilstede, samt ved at Tornene paa Bugsiden af femte Ring mangle, og endelig ved at de gjællebærende Kropringe aldeles ikke ere forskjellige fra de følgende. I Henseende til Gjællernes Størrelse og Formen af første og andet Beenpar seer jeg ingen Forskjel mellem Dyr af begge Kjøn.

Cyamus globicipitis er nogle Gange bleven nedsendt fra Færøerne af Hr. Sysselmand Müller, som har taget den paa Grindehvalen. Om den udelukkende eller kun fortrinsvis findes paa syge eller saarede og udmagrede Individer, saaledes som det formodningsvis antydes i Prof. Steenstrups citerede lille Meddelelse, foreligger der ingen senere Erfaringer; men det synes rimeligt nok, da den kun er nedsendt faa Gange. Af de paa anførte Sted meddeelte Kjendsgjerninger fremgaaer det, at den baade findes paa Kroppen og i Rynkerne omkring Tænderne.

Dr. Brandt har udtalt den Formodning, at *C. Delphini* Guér. er nær beslægtet med eller maaskee endog samme Art som D. *globicipitis* m. Umuligt er dette ganske vist ikke, men det vilde dog være meget urigtigt at restituere den Guérinske Benævnelse for Grinde-Hvallusen, saa længe det ikke med større Sikkerhed er paavist, at denne forekommer hos andre Grindehval-Arter, eller at vor nordiske Grindehval kan udvide sine Vandringer til de vestindiske Have. Det maa dog erindres, at der er iagttaget Hvallus hos en

[1]) Man kunde derfor ogsaa (skjøndt vistnok mindre rigtigt) beskrive Hannen af Grinde-Hvallusen som udstyret med dobbelte Gjæller og enkelte (torndannede) Bigjæller.

sydlig Grindehval-Art (*Gl. macrorhynchus*), og efter hvad vi nu kjende til Cyamidernes Udbredningsforhold, skulde det ikke undre mig, om dennes Parasit viste sig at være samme Art som *C. globicipitis.*

10. ***Cyamus gracilis*** R. d. V.

(Tab. IV fig. 10.)

distinguitur forma gracili; annulis corporis posterioribus lateraliter dentatis; manibus pedum primi et secundi paris in maribus adultis dente singulo, in fœminis plane edentulis; branchiis mediocribus, simplicibus; appendicibus branchialibus in maribus adultis duplicibus, minutis, in fœminis deficientibus; spinis abdominalibus nullis.

Størrelse: Hannen 10^{mm} lang, $3^{1}/_{2}{}^{mm}$ bred; Hunnen 8^{mm} lang, c. 3^{mm} bred.

Farven: «klar gul» (Rouss. de Vauz.).

Opholdssted: paa Sydhvalen (*Balæna australis*), paa Hovedets Knuder, sammen med *C. ovalis* (R. de V.), samt paa *B. japonica*?

Synonymer og Citater:

(1834). Roussell de Vauzème l. c. p. 229, t. 8 f. 24—25 (♂) (*C. gracilis*).

(1840). Milne-Edwards, «Hist. natur. d. Crust.» t. III p. 113 (*C. gracilis*).

(1862). Spence Bate: «Catalogue» etc. p. 366, t. 58 f. 1. (efter Exemplarer fra Cap i Pariser-Museet) (*C. gracilis*).

(1866). Spence Bate & Westwood: «British sessile-eyed Crustacea», Vol. II p. 94 f. 1 (Copi efter R. de V.) og fig. 2 (Copi efter «Cat. Amphip. Crust.» l. c?)[1]. (*C. gracilis*).

Beskrivelse af Hannen. Formen er langstrakt, smal, næsten lige bred overalt; Hovedet langstrakt; de øvre Følere smækkre og omtrent af Hovedets Længde; anden Kropring opsvulmet og større (længere) end de andre, men ikke indskaaren fortil; tredje og fjerde kjendelig, men ikke meget[2]) svagere end de følgende; paa hver Siderand af disse to Ringe sees to Knuder, som optage Gjællen mellem sig; paa femte og sjette tre saadanne Smaaknuder eller Spidser; paa syvende ere de igjen mindre tydelige. Første Beenpars Haand har hos den fuldt udvoxne Han en tydelig «Tand», og andets een «Tand» eller fremadrettet spids Knude ved Grunden af Kloen. Gjællerne ere simple, cylindriske, c. 4^{mm} lange; fremstrakte ville de naae ud paa Hovedet; Bigjællerne ere dobbelte (tvehornede eller halv-

---

[1]) Den tredje Figur skal forestille en ung (uudviklet) Hvallus fra de brittiske Have, som af White blev bestemt som *C. gracilis*; det er ene denne, saa vidt jeg skjønner, ubestemmelige Form, som har givet Anledning til Optagelsen af «*C. gracilis*» i den brittiske Fauna.

[2]) Paa tørrede Exemplarer skrumpe disse to Ringe som sædvanligt forholdsvis mere ind end de andre; Figuren af Hannen, Tab. IV, er efter et tørret Exemplar — fuldt udvoksne Exemplarer i Spir. forelaae desværre ikke — og derfor neppe naturtro i dette Punkt. I Beskrivelsen har jeg derimod, hvad dette angaaer, holdt mig til de noget yngre i Spiritus opbevarede Exemplarer.

maanedannede), men smaa. Torne under Bugen savnes ganske. — Allerede hos Hanner af c. 8mms Længde (som man let kunde begaae den Fejl at ansee for fuldt udvikletde[1]) er «Tanden» paa anden Beenpars Haand forsvunden, Bigjællerne utydelige og Forskjellen fra Hunnerne overhovedet mindre.

Hunnerne ere meget mindre, Kropringene i det hele mere eensartede, de gjællebærende navnlig ikke forskjellige fra de andre; ogsaa ere Gjællerne lidt kortere, og baade første og andet Beenpars Hænder aldeles uden Tænder eller Knuder; til Bigjæller finder jeg intet Spor. Allerede ved 6mms Længde ere de to Kjøn saa eens, at det, naar Æggeplader eller Kopulationsorganer ikke ere udviklede, har været mig umuligt at afgjøre, hvilket af dem jeg havde for mig.

De foreliggende Exemplarer, om hvis Hjem noget nærmere er mig bekjendt, ere deels «fra Farvandene omkring Kamschatka», deels «from near Patagonia»; Artens Udbredning er saaledes ganske den samme som for *C. ovalis*, og jeg kan derfor holde mig til, hvad ovenfor er anført (S. 270) for at begrunde den Mening, at begge disse Arter forekomme baade paa *Balæna australis* og paa *B. japonica* (?).

11. ***Platycyamus Thompsoni*** (Gosse).

(Tab. IV. fig. 11).

distinguitur corpore valde depresso, fere laminari; annulo primo corporis a capite bene sejuncto; pedibus primi paris secundi paris fere æquantibus hisceque antepositis; branchiis brevissimis conicis; appendicibus branchialibus in maribus minutis, spiniformibus.

Størrelse: Hannen 6mm lang, Hunnen 8mm.

Opholdssted: paa Døglingen, saavel paa den almindelige (færøske) Døgling (*Hyperoodon rostratus*) som paa den bredpandede (*H. latifrons* Gr.).

Synonymer og Citater:

(1855). Gosse: «Mar. Zool. I p. 131» (*Cyamus Thompsoni*) (citeret efter Spence Bate).

---

[1]) Jeg havde undersøgt mange Hanner af *C. gracilis*, deels fra Cap, deels fra den nordlige Deel af det stille Hav, uden at støde paa Exemplarer med vel udviklede Bigjæller eller med Spor til Tanden paa andet Beenpars Haand, og vidste ikke at forlige dette med Roussells Afbildninger (der vel fremstille Bigjællerne som smaa, men dog tydelige, og antyde Tilstedeværelsen af en eller snarest to «Tænder» paa andet Beenpars Haand), da jeg maatte ansee mine Exemplarer for fuldt udviklede. Først da jeg fik et større Antal tørrede Exemplarer af Dr. Packard, af hvilke de fleste rigtignok ganske stemte med mine tidligere, men hvoriblandt der dog var enkelte noget større, der besad tydelige Bigjæller og en meget tydelig Tand paa det anførte Sted, blev det mig klart, at jeg tidligere kun havde havt Exemplarer for mig, der endnu ikke havde naaet Højdepunktet af deres Udvikling. Det er saadanne ikke fuldt udviklede Exemplarer, der have foreligget Dr. Brandt og givet denne Anledning til at yttre Tvivl om Rigtigheden af R. V.'s Afbildning, der jo heller ikke gjengiver Haandformen godt, hverken hos yngre eller hos ældre Exemplarer.

(1855). Gosse: «Notes on some new or little known marine animals», fasc. II. («Annals and Magazine of natural history», XVI (1855) p. 30—31, t. III f. 11) (*Cyamus Thompsoni*)[1].

(1857). White: «A popular history of British Crustacea» p. 219 (*Cyamus Thompsoni*; blot nævnt, med den urigtige Angivelse at være funden paa en «Delfin»).

(1857). Spence Bate: «A synopsis of the British Edriophthalmous Crustacea pt. I. Amphipoda» (Annals and Magaz. of natur. hist. 2d ser., t. XIX p. 152) (*Cyaamus gracilis* Gosse; senere (ibid. XX p. 525) rettet til *C. Thompsoni* Gosse).

(1862). Spence Bate: «Catal. of Amphipoda in the British Museum» p. 368, t. 58 f. 5. (Copi af Gosses Figurer) (*C. Thompsoni*).

(1866). Sp. Bate & Westwood: «A history of british sessile-eyed Crustacea», II p. 96 (*C. Thompsoni*[2]) (med Træsnit efter Gosses Originalexemplar i «British Museum», som var taget af William Thompson paa en «*Hyperoodon bidens*») (Synonymet «*C. Delphinii* Guér.» bortfalder).

Blandt de hidtil kjendte Arter af Hvallus indtager denne en meget isoleret Plads. Legemets og Lemmernes overordenlige Fladhed og næsten papiragtige Tyndhed giver den allerede et ganske eget Udseende eller Habitus; dertil kommer, at Hovedet her er meget tydelig afsnøret fra den første Kropring, og at det første Beenpar derfor ikke sidder under, men foran det andet, som det ikke giver meget efter i Størrelse; og endelig de uleddede Kjæbefødders afvigende Beskaffenhed (Tab. IV f. 11 *pm*). Allerede Gosse gjorde opmærksom paa, at de opstillede Mærker for *Cyamus*-Slægten maatte ændres, hvis denne Art skulde optages i den. At opstille den som Type for en egen Slægt (jfr. S. 250), er vistnok fuldt berettiget eller rettere uundgaaelig nødvendigt. Da Hunnerne her — i Modsætning til hvad der er Tilfældet hos de ægte *Cyami* — synes at opnaae en betydeligere Størrelse end Hannerne, vil jeg begynde med en

Beskrivelse af Hunnen. Denne naaer en Længde af 8^{mm} med en Brede af lidt over 3^{mm}. Kroppens Omrids er en temmelig smal Oval; dens Fladhed og næsten papirtynde Beskaffenhed ere omtalte ovenfor. Kropringene ere tydeligt adskilte indtil henimod Midtlinien, ligesom hos andre Hvallus, med Undtagelse af de to gjællebærende Ringe (tredje og fjerde), som ere sammenvoksne med hinanden i en større Deel af deres Brede; en lille rund Grube paa hver Side af Midtlinien antyder dog den sædvanlige (og oprindelige?) Ad-

---

[1]) «Body about $^1/_6$ of an inch in length. Five pairs of feet equally developed; all 5-jointed; all with the penultimate joint large and ovate. Third and fourth segments each furnished with a single small oval appendage.»

[2]) «Head triangular; antennæ very short; two middle segments of body narrower than the preceding and following First and second pairs of legs equal in size, and not larger than the posterior pairs. Third and fourth segments with a single very short oval branchia on each side.»

skillelse. Første Kropring er ved en Skraafure paa hver Side skilt fra Hovedet; andens Bagrand har et fremspringende Punkt paa hver Side, omtrent midt imellem Benets Fæste og Ringenes Sammenstød; tredje en rund Knude i sit bageste Sidehjørne, og fjerde en lignende nær ved sit forreste. De øvre Følere ere korte og temmelig brede, saa lange omtrent som selve Hovedet. Første Beenpar er næsten lige saa udviklet som andet, og som dette fladtrykt og ligesom lappet; Haanden danner en flad skarp «Tand» paa den mod Kloen vendende Side. Første Beenpar bestaaer, som sædvanligt, af fire vel udviklede Led foruden Kloen, andet derimod kun af tre, af hvilke Hofteleddet fortil danner en stor dobbelt Flig eller tolappet Knude; Haanden har to stærke «Tænder». De tre Par Bagbeen ere ligeledes stærkt fladtrykte og sammensatte af fire tydelige Led; hvert Hofteled har bagtil (ligesom paa de to første Beenpar) et lille Indsnit, men desuden fortil og underneden (ved sin forreste Rand) to smaa Torne; det tredjesidste (mellemste) Led har ligeledes en lille Torn underneden, men ved det indre Baghjørne, og det næstsidste en svag Antydning til en Tand eller Knude paa sin Bagrand. Gjællerne ere korte, kegledannede, c. 2^{mm} lange; det bageste Par naaer i det højeste til Forranden af tredje Kropring. Ved Grunden af hver af de bagre Æggeplader findes en lille Knude, og skjulte[1]) under hine Plader en lille cylindrisk eller kegledannet Bigjælle indenfor og foran hver af de virkelige Gjællers Fæste. Paa hver af de tre sidste Kropringe, ved deres forreste Rand, findes underneden to tydelige Torne, paa den sidste to smaa til, bagved de andre.

Hannerne synes altid at være mindre end Hunnerne; i en tidligere Række af Exemplarer, som Hr. Sysselmand Müller tog paa den almindelige Døgling, er ingen af Hannerne mere end 4^{mm} lang (2^{mm} bred), medens Hunnerne vare dobbelt saa store (8^{mm} lange); i en senere Sending er Misforholdet mindre, idet Hunnerne ere højst 7, Hannerne indtil 6^{mm} lange (2$^{1}/_{2}$^{mm} brede), og omtrent samme Størrelse have tre Hanner, som bleve tagne af en i Skaalefjorden den 29de Juni 1861 inddreven bred- og hvidpandet Døgling (*Hyperoodon latifrons*), og som jeg aldeles ikke har formaaet at skjelne fra Hannerne af den paa den almindelige Døgling forekommende Hvallus; tilsvarende Hunner bleve ikke nedsendte ved denne Lejlighed. De gjællebærende Ringe ere hos Hannen mindre end de andre (baade kortere og smallere) og ikke sammenvoksne og Gjællerne forholdsvis noget mindre. Paa Bigjællernes sædvanlige Plads sees her en lille ud til Siden rettet, spids Knude eller kegledannet Torn, paa hver Side af tredje og fjerde Kropring, ved Gjællens Grund. For øvrigt seer jeg ingen Forskjel mellem Han og Hun, bortseet fra de egenlige Kjønseller Parringsredskaber.

Da Gosses *Cyamus Thompsoni* udtrykkelig siges at være tagen af en «*Hyperoodon*

[1]) Der er derfor intet Hensyn taget til den i «Oversigten» («Synopsis») S. 250, hvad dog maaskee burde været Tilfældet.

bidens», og da Beskrivelsen og Afbildningen i væsenlige Punkter stemme med den foreliggende Døglingelus, maa denne være rigtigt henført til den af de engelske Faunister opstillede Art, hvoraf der dog kun synes at have foreligget disse Forfattere et eneste i «British Museum» opbevaret Exemplar, hvorefter saavel Gosses som Spence Bates Afbildning er udført; dette Exemplar har dog ikke, som den sidst nævnte Forfatter og hans Medarbejder antoge, egenlig været i en «immature state»; det er en Han, 1/5—1/6'' lang, af en Størrelse altsaa, hvor dette Kjøn allerede har sin endelige, fuldt uddannede Skikkelse. Den Formodning, at *Cyamus Delphini* Guérin kunde være den udviklede Form til denne formentlige *Cyamus*-Unge, savner saaledes al Grund; den Guérin'ske Art (jfr. ovenfor S. 277) er en virkelig *Cyamus*, ikke en *Platycyamus.*

Efter hvad ovenfor er oplyst, maa det antages, at *Platycyamus Thompsoni* ikke alene beboer den almindelige Døgling eller Næbhval, men ogsaa den sjeldnere og mindre vel kjendte bredpandede Døgling (*Hyperoodon latifrons*). Jeg maa beklage, at jeg ikke har kunnet slaae denne interessante Kjendsgjerning yderligere fast ved Undersøgelsen af den endnu ukjendte Hun af den bredpandede Døglings Hvallus.

Efterskrift. Netop som Slutningen af denne Afhandling skulde reentrykkes, modtager jeg Februarheftet af «The Annals and Magazine of natural history» for 1873, hvori findes aftrykt — efter Novemberheftet af «Proc. Calif. Acad. Sci.» for 1872 — korte Beskrivelser ved Hr. W. H. Dall, «U. S. Coast Survey», af tre Hvallus-Arter af Hvaler fangne ved Nord-Amerikas Vestkyst, hvilke Arter ville blive afbildede i det bebudede Værk af Capt. Scammon om det nordlige Stille Havs Hvaldyr. Den ene af disse benævnes *C. mysticeti* og lever paa de nordlige «Buehoveder», der ansees for at være den ægte *Balæna mysticetus*, i Nærheden af Berings-Strædet[1]); der har kun foreligget Forfatteren 2 Hunner af denne

[1]) Ved i Anledning af Hr. Dalls Meddelelse at efterslaae de af Prof. Cope udgivne Optegnelser af Capt. Scammon om Hvaldyrene ved Nordamerikas Vestkyst (Proceed. Acad. Natur. Sc. of Philadelphia, 1869), finder jeg dog (p. 34) under «Bowhead Whale, *Balæna mysticetus* Linn.» den Bemærkning, «all Bowheads found on this cruising ground (ɔ: i Nærheden af Berings-Strædet, Nord og Syd for samme) are quite free from parasitic crustaceans, as well as barnacles». Der siges fremdeles (p. 50): «The Humpback (ɔ: Pukkelhvalen, *Megaptera versabilis*) as well as all other whales except the Bowhead or Arctic Whale are infested with parasitic crustaceans, which collect about the head, particularly near the spoutholes, and if there are any scars and sores on the animals body, this vermin is sure to find them,» og det omtales, at der paa en ualmindelig mager Pukkelhval fandtes mange Pletter med dette «Ukræ», og at flere af disse «Pletter» havde en Udstrækning af 3—4 Fod; Hvalens Usselhed blev netop tilskrevet den usædvanlige Mængde, hvori disse «besværlige Skabninger» fandtes paa den. P. 60 omtales disse «crab lice» ogsaa hos Kaskelotten. I de udhævede Ord p. 50

Art; saa vidt jeg kan dømme af Beskrivelsen, synes det virkelig at være den ægte *C. mysticeti* m., som han har havt for sig. Den anden *C. Scammoni*, der lever paa «den kaliforniske Graahval» (*Rhachianectes glaucus* Cope) — en Rethval med korte Barder og adskilte Halshvirvler — er uden Tvivl en ny Art, der formodenlig vil være at indskyde mellem *C. ovalis* og *C. Kessleri*; enkelte Punkter i Beskrivelsen ere mig ikke klare, f. Ex. at hver Gjælle «ved sin Grund deler sig i to cylindriske spiralrullede Traade» (hvorved der, som det følgende viser, ikke er tænkt paa Bigjællerne). Af denne Art kjendes begge Kjøn; den tredje, *C. suffusus*, der lever paa en Pukkelhval (*Megaptera versabilis* C.) er derimod kun kjendt i det mandlige Kjøn; efter Beskrivelsen kommer den meget nær til min *C. pacificus* og vil muligvis falde sammen med denne; dog forstaaer jeg i saa Fald ikke, med hvad Ret Bagbenenes tredje Led siges at være «keeled above», eller Karakteren «no ventral lines on the posterior segments». Sættes «spines» i Stedet for «lines», bliver der Mening deri, men da maatte Tornene paa de to sidste Kropringes Bugside være oversete eller blevne utydeligere paa de Hr. Dall foreliggende Exemplarer, der unægtelig ere lidt større (længere) end mit; heller ikke stemmer det med Karakteren «body elongate», at Breden angives til over det halve af Længden. Der kunde i øvrigt være omtrent lige saa god Grund til at tænke paa *C. boopis*. De bebudede nærmere Oplysninger om disse det Stille Havs Hvallus-Arter ville derfor være af ikke ringe Interesse i flere Henseender og paa en meget ønskelig Maade supplere de i nærværende lille Arbejde samlede Bidrag til Kundskab om denne Gruppe af Snyltedyr.

Forklaring af Tavlerne.

Da Arternes Navne ere anførte paa Kobbertavlerne, og det tillige paa disse er angivet, hvilke Figurer, der forestille Hanner og hvilke Hunner eller Dele af disse, er en udførlig Forklaring vistnok overflødig. Skjøndt de anvendte Bogstaver vel ogsaa for største Delen forklare sig selv, vil jeg dog ikke undlade at anføre, at

a^1 betyder de øvre Følere;
a^2 de nedre (mindre) Følere;
p^1 første, p^2 andet } Beenpar eller sammes Haand;
mp eller *pm*: Kjæbefødderne (Tab. I f. 2 *mp* og Tab. IV f. 11 *pm*);
x Bigjællerne; *ov* Æggepladerne;

---

synes at være udtalt, at ogsaa de virkelige Finhvaler have Hvallus; men derfor foreligger neppe nogen anden Erfaring, og Dall beskriver heller ikke nogen Finhval-Lus.

Jeg har endnu — i Anledning af hvad S. 262 er bemærket om Krepokak-Lusens Farve, at tilføje, at jeg senere har fundet en Optegnelse af Pastor Jørgensen, ifølge hvilken «af mange levende Exemplarer nogle vare aldeles brune, andre derimod aldeles hvide.»

sp Torne ved Bigjællernes Grund (Tab. II fig. 3♂*; *t* Knude i det bagre Sidehjørne af de gjællebærende Kropringe, af Dr. Brandt betragtet som hørende til Bigjællen);

p^6: Sjette Beenpar (Tab. II fig. 3♀** viser tillige Knuderne paa Undersiden af sjette Kropring).

Tab. I fig. 2 ♂ *a*: første Føler af et andet Individ end det nedenfor afbildede, for at vise Variationen i Formen.

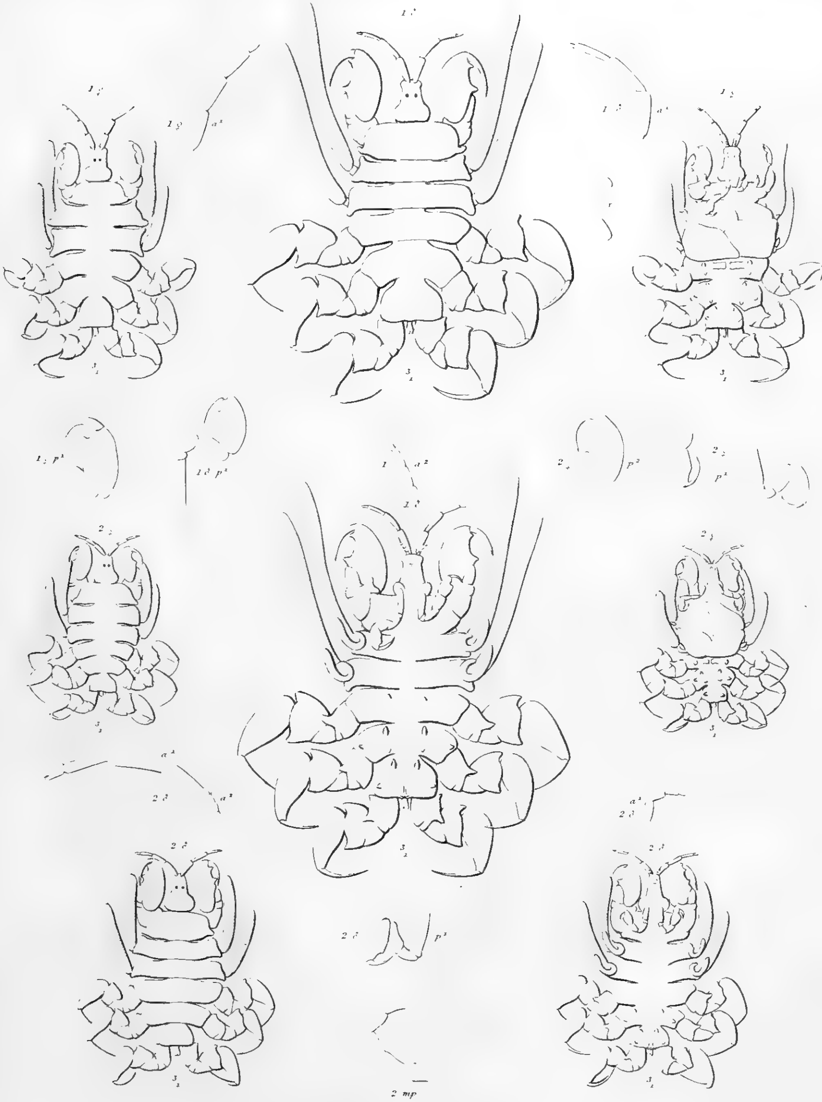
Tab. II fig. 4*, 4** og 4***: Dele af de af Dr. Alex. Brandt for *C. Rhytinæ* ansete Hvallus (*C. ovalis*); fig. 4**** af de af Wosnessensky indsamlede.

Tab. IV fig. 10 ♂ p^2 er af et yngre (men mandligt) Individ end Hovedfiguren (10♂).

Gjællerne ere overalt udfyldte med Punkter for at udhæve deres afvigende Beskaffenhed; det samme er ogsaa Tilfældet med de gjælleagtige Bigjæller hos Hannen af *C. globicipitis* (Tab. IV. f. 9 ♂).

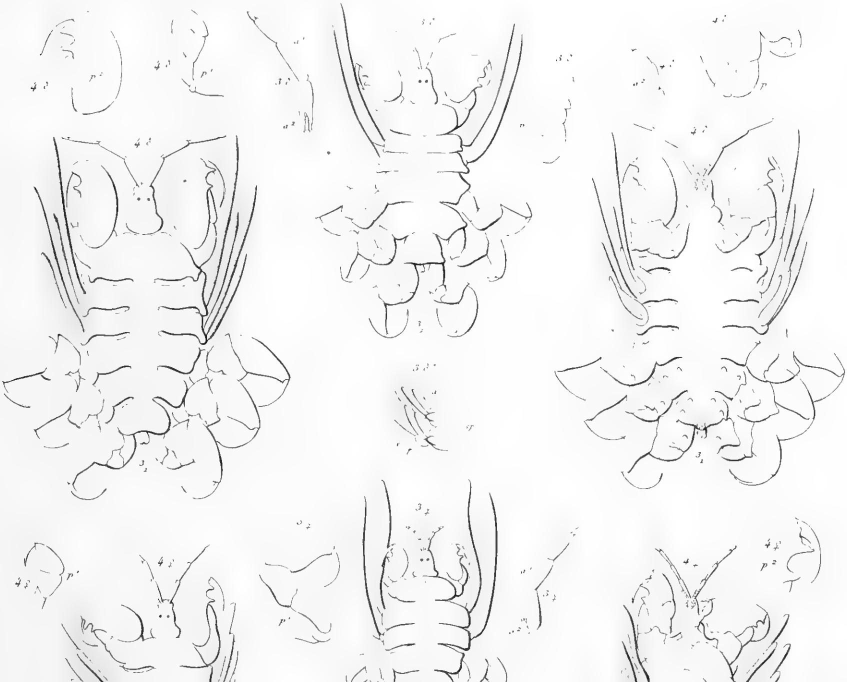
Brøktallene under Hovedfigurerne angive, hvor mange Gange disse ere forstørrede; den naturlige Størrelse af de i anden Maalestok afbildede Enkeltheder vil let kunne bedømmes derefter.

Det bedes ogsaa bemærket, at Bagbenene ikke paa alle de afbildede Exemplarer ere strakte eller spilede lige stærkt ud til Siderne, hvilket kunde fremkalde en urigtig Opfattelse af enkelte Former som værende mere kortbenede, end de i Virkeligheden ere det, og end de andre Arter, i Selskab med hvilke de ere fremstillede.



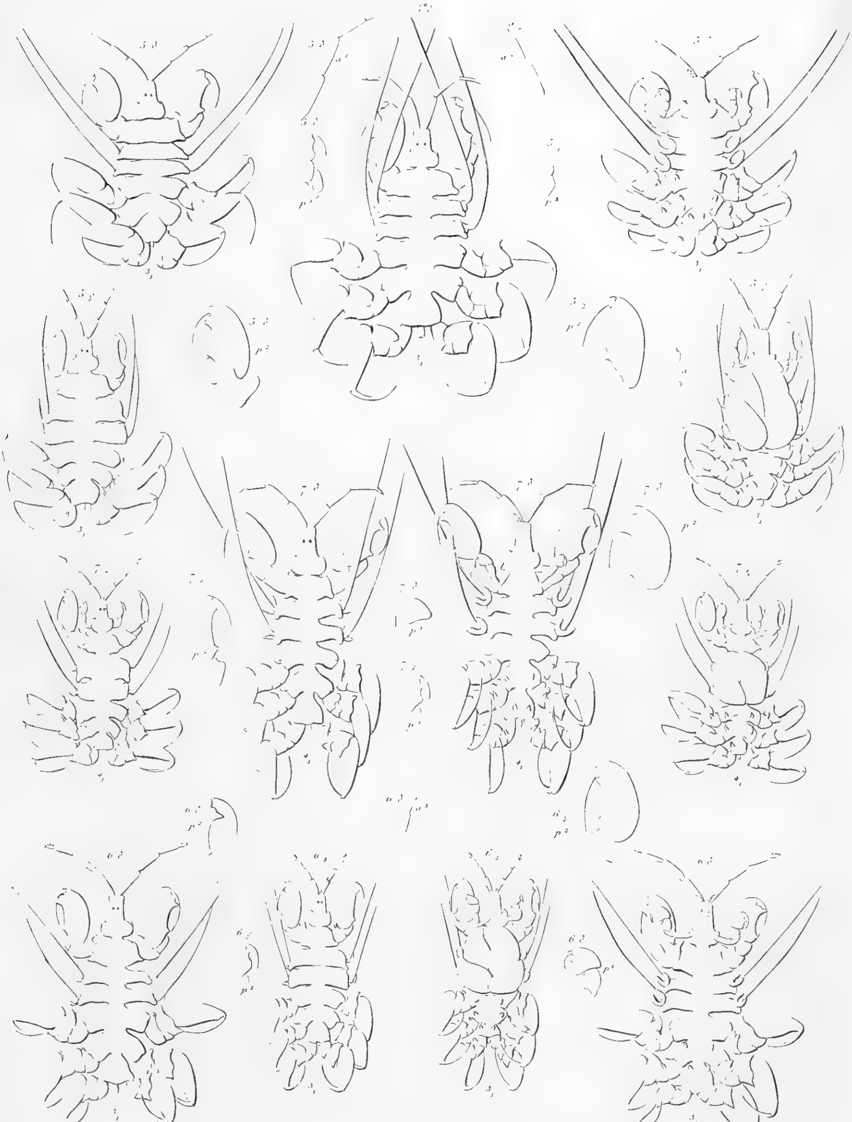
1. Cyamus mysticeti Ltk.   2. C. monodontis Ltk.

Thornam sculp.



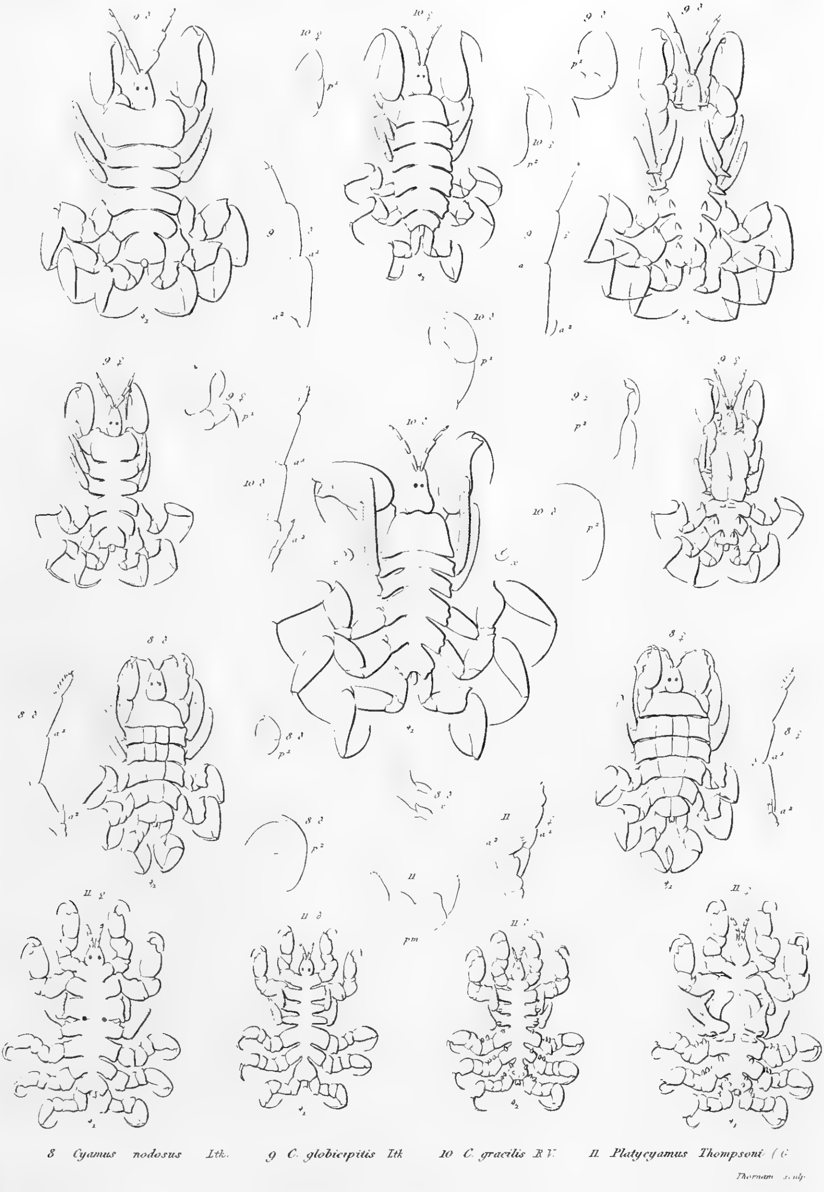
3. *Cyamus Kessleri* Br. 4. *C. ovalis* R.V.

Möller sc.



5. Cyamus erraticus R. V.   6. C. boopis Ltk.   7. C. pacificus Ltk.

C. Thornam sculp.



8. Cyamus nodosus Ltk. 9. C. globicipitis Ltk. 10. C. gracilis R.V. 11. Platycyamus Thompsoni (G.

Thornam sculp.

Sur les Cyames ou poux des Baleines

par M. Chr. Fr. Lütken.

(Voir pag. 231—283).

Dans le mémoire que j'ai présenté sur cette matière à la Société Royale des Sciences — travail commencé depuis longtemps et souvent interrompu — je donne des descriptions détaillées et comparatives des espèces de Cyames qui habitent les Cétacés des mers du nord, savoir 1) le *Cyamus mysticeti* de la vraie Baleine ou Baleine franche (*Balæna mysticetus*); 2) le *Cyamus boopis* du Balénoptère à bosse ou à ailerons allongés, le «Krepokak» des Esquimaux (*Megaptera boops*); 3) le *C. monodontis* et le *C. nodosus* du Narval (*Monodon monoceros*); 4) le *C. globicipitis* du Grindeval (*Globiocephalus melas*); 5) le *Platycyamus Thompsoni* des Dauphins ziphioïdes à bec de canard ou Döglings (*Hyperoodon rostratus* et *H. latifrons*). Les Cyames qui habitent les Baleines vraies des mers du sud (*Balæna australis*, et peut-être la *B. antipodarum*), et dont deux habitent aussi celles des parties boréales de l'Océan Pacifique (*B. japonica*?), savoir les *C. ovalis*, *C. erraticus* et *C. gracilis*, y sont traités de la même manière; on y trouvera en outre la description d'une dixième espèce, décrite il y a peu de temps par Mr. Brandt (*C. Kessleri*), et provenant de la partie septentrionale du grand océan oriental, probablement d'une Baleine vraie du groupe des *B. australis* et *biscayensis* — ainsi que celle d'une onzième de la partie tropicale des mêmes mers (*C. pacificus*), mais d'origine inconnue quant à l'animal qui la nourrit. Cependant il reste encore des doutes sur la question de savoir si cette dernière espèce ne serait pas mieux classée comme variété du *C. boopis*, opinion qui semble confirmée par le fait que de jeunes Cyames, pris sur des Cétacés inconnus, dans l'Océan Pacifique, près des îles Tonga et Rarotonga, se rapprochent extrêmement de l'espèce qui habite le Mégaptère des mers du nord, et sont probablement identiques avec elle. Comme ces dix ou onze espèces sont toutes figurées dans les quatre planches qui accompagnent cet ouvrage, et que j'en ai donné des diagnoses en latin, et résumé dans un «synopsis» tous les caractères principaux, il est inutile que je m'y arrête plus longtemps, et j'en dirai autant du nouveau genre que j'ai proposé, le *Platycyamus*, dont le type est l'espèce qui habite les Döglings des mers du nord.

Aux espèces déjà bien connues et en partie décrites ici en détail pour la première fois, il faut en ajouter encore un petit nombre, dont on peut signaler l'existence, mais dont on ignore, en partie ou en totalité, les caractères, savoir: 1) les espèces qui, selon Bennett, habitent le Cachalot et plusieurs Dauphins et Globiocéphales des mers du sud; 2) le *Cyamus Delphini* Guérin, pris sur un Dauphin dans les parages des Antilles, et très voisin du *C. globicipitis*, sinon identique avec lui; 3) un Cyame, pris également sur un Dauphin d'espèce inconnue, et conservé dans le musée de Copenhague, mais différant spécifiquement de toutes les espèces énumérées ici; vu l'état assez peu développé des exemplaires, je me suis borné à le décrire succinctement sans lui attribuer une dénomination spécifique; 4) le pou de Baleine qui, suivant le tableau publié par Mr. le Dr. Monedero, habite ou habitait jadis la Sarde ou Baleine basque, mais au lieu duquel on a cependant figuré un *Pycnogonum* (!); 5) celui qui, selon les indications du célèbre Steller, habitait autrefois le *Rhytine*, et que Mr. Alex. Brandt a cru — selon moi à tort — avoir retrouvé sur un morceau de peau desséché, dans une des décharges du musée de St. Pétersbourg. D'après la description que Mr. B. en a donnée, et d'après les exemplaires qu'il a bien voulu me communiquer, ce prétendu parasite du Rhytine est réellement identique avec le *Cyame ovale*, et le morceau de peau dont il s'agit appartient probablement, non à un Rhytine, mais à une vraie Baleine de la mer du Kamtschatka, la *B. japonica* p. ex. — Aussi, la description incomplète et, il est vrai, en partie obscure, de Steller ne convient-elle nullement, suivant moi, à un animal du type des Cyames ovales, mais rappellerait plutôt un Læmodipode caprelloide du type des *Proto* ou *Leptomera*, ou d'une configuration analogue.

Les espèces connues ou signalées seulement, se divisent — exception faite du Cyame douteux du Rhytine — assez également entre les Cétacés à dents et ceux à fanons. Bon nombre de Cétacés en paraissent cependant complètement dépourvus; jusqu'ici on n'en a jamais découvert sur un véritable Balénoptère, mais seulement sur les Megaptères, les Baleines vraies, les Hyperoodons, les Cachalots, les Monodons et les Globiocéphales. Des découvertes ultérieures doubleront sans doute le nombre des espèces de ces parasites remarquables.[1] Quelques Cétacés en nourrissent plusieurs, p. ex. le Narval deux, et la Baleine australe trois, et on trouve quelquefois les mêmes espèces sur des Cétacés du même genre ou sous-genre; les deux Döglings des mers du nord, la Baleine du sud et celle dite du Japon en fournissent des exemples, et peut-être les Mégaptères sont-ils dans le même cas. C'est bien à tort, cependant, que l'on a énuméré les espèces habitant la Baleine australe parmi les Crustacés de l'Europe, ou plus particulièrement parmi ceux des Iles Britanniques.

---

[1] Pendant que les dernières pages de ce mémoire étaient sous presse, Mr. Dall a déjà communiqué de courtes descriptions de 3 espèces. Son *C. mysticeti*, qui a été pris sur une *Balæna mysticetus*, dans les environs du détroit de Behring, est sans doute identique avec l'espèce que j'ai désignée sous le même nom; le *C. Scammoni*, qui vit sur le «Grey Whale» de la Californie (*Rhachianectes glaucus*), est certainement une espèce nouvelle qui prendra place entre le *C. ovalis* et le *C. Kessleri*; le *C. suffusus*, qui habite le *Megaptera versabilis*, est peut-être la même espèce que le *C. pacificus* ou le *C. boopis*. (Une notice ultérieure du même auteur a encore augmenté la liste des Coronulides balénophiles d'un genre nouveau, le *Cryptolepas*, habitant la «Baleine grise» nommée ci-dessus).

Les erreurs commises par quelques auteurs du siècle passé et du commencement du dix-neuvième, en attribuant aux Pycnogonides un genre de vie et un «habitat» analogues à ceux des vrais poux de Baleines, et à ceux-ci, la faculté de vivre en parasites sur certains poissons, ont seulement besoin d'être signalées; aujourd'hui il serait superflu de les discuter.

On trouvera aussi, page 244 de ce mémoire, de la main de Mr. Japetus Steenstrup, un aperçu critique des espèces de Cirripèdes, de la tribu des Coronulides, qui habitent les Cétacés. Je crois enfin devoir signaler ici que c'est une grave méprise de Mr. van Beneden d'avoir donné place, parmi les parasites des Cétacés, au *Pennella pustulosa* Baird et au *Lernæonema nodicornis* Stp., Ltk.; car ces Crustacés copépodes ne vivent point sur de vrais Dauphins (Cétacés), mais sur des Dolphins — poissons du genre *Coryphœna.*

Explication des Planches.

Comme les planches portent les noms des espèces, et qu'on y a en même temps indiqué les figures qui représentent les individus mâles, et celles qui représentent les femelles ou des parties de celles-ci, une explication détaillée est certainement superflue. Bien que les lettres employées s'expliquent également en grande partie d'elles-mêmes, j'ajouterai cependant que

a^1 désigne les antennes supérieures;
a^2, les antennes inférieures (plus petites);
p^1, la première paire de pattes, ou leur main;
p^2, la deuxième — — ;
mp ou *pm*, les pieds-mâchoires (Pl. I, Fig. 2 *mp*, et Pl. IV, Fig. 11 *pm*);
x, les appendices branchiaux; *ov*, les lames ovigères;
sp, les épines à la base des appendices branchiaux (Pl. II, Fig. 3 ♂*; *t*, tubercule dans l'angle latéral postérieur des anneaux branchifères, considéré par M. Brandt comme appartenant à l'appendice branchial);
p^6, sixième paire de pattes (Pl. II, Fig. 3♀** montre en même temps les tubercules sur la face inférieure du sixième anneau);
Pl. I, Fig. 2 ♂ *a*: première antenne d'un individu autre que celui qui est représenté au-dessous, pour montrer la variation dans la forme;
Pl. II, Fig. 4*, 4** et 4***: parties des Cyames (*C. ovalis*) considérés par M. Alex. Brandt comme des *C. Rhytinæ*; Fig. 4****, parties des individus recueillis par Wosnessensky;
Pl. IV, Fig. 10 ♂ p^3 appartient à un individu plus jeune (mais mâle) que celui de la figure principale (10 ♂).

On a ponctué partout les branchies pour faire ressortir leur nature différente; il en est de même des appendices branchiaux en forme de branchies du *C. globicipitis* mâle (Pl. IV, Fig. 9 ♂).

Les fractions placées sous les figures principales indiquent le grossissement; d'après cela, on pourra facilement apprécier la grandeur naturelle des détails qui ont été représentés à une autre échelle.

Je dois aussi faire observer que les pattes de derrière, sur tous les exemplaires que j'ai figurés, ne sont pas également étalées sur les côtés, cette circonstance pouvant à tort faire croire que quelques formes ont des pattes plus courtes qu'elles ne le sont en réalité, ou que les autres espèces en compagnie desquelles elles sont représentées.

Almindelige Egenskaber

ved

Systemer af plane Kurver,

med Anvendelse til

Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementære Systemer
af fjerde Orden.

Med 5 Tavler.

Af

H. G. Zeuthen.

Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10 B. IV.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1873.

Da Chasles i sine Afhandlinger i *Comptes rendus de l'Académie des sciences* i 1864 havde grundlagt Læren om Keglesnittenes Karakteristiker, maatte de vigtige Resultater, hvortil den førte, og den overordentlige Lethed, hvormed de opnaas, anspore til at udvide denne Lære til Kurver af alle Ordener. I saa Henseende fik Bestræbelserne en bestemt Retning derved, at Chasles fandt den Sætning (1), at Antallet af Kurver i et System af hvilkensomhelst Orden med Karakteristikerne μ og μ' (se i det følgende 3), som røre en Kurve af Ordenen n og Klassen n', er $n'\mu + n\mu'$, og dertil knyttede den Formodning, at — i Almindelighed som ved Keglesnittene — Antallet af Kurver, der tilfredsstille en given Betingelse, vilde have et Udtryk af Formen $\alpha\mu + \alpha'\mu'$, hvor α og α' kun afhænge af den givne Betingelse, medens μ og μ' fuldstændig repræsentere Systemet. I saa Fald kunde man paa samme Maade som ved Keglesnittene finde Antallene af de Kurver med givne Plückerske Tal, der tilfredsstille saadanne Betingelser, hvis tilsvarende Tal α og α' man kjender, naar man blot først havde fundet Karakteristikerne i alle de elementære Systemer med disse Plückerske Tal, det vil sige i saadanne Systemer, hvor de givne Betingelser kun ere de at skulle gaa gjennem givne Punkter og røre givne rette Linier. Chasles opfordrede derfor navnlig til at søge de elementære Systemers Karakteristiker.

Nogle vigtige Resultater vedrørende Kurvesystemer af alle Ordener, og ikke blot elementære Systemer, fremkom snart fra de Jonquières (2), der for at faa dem tildels kun behøvede at angive de Grænser, indenfor hvilke nogle Resultater, han allerede i 1861 havde udtalt, vare rigtige; men de strække sig kun til Kurver uden særegne Punkter, hvoraf mindst et vist Antal Punkter ere givne. Derimod blev Bestemmelsen af Karakteristikerne blot i alle de elementære Systemer af Kurver af tredie Orden først fundet i 1870 af en ung Franskmand Maillard. Udgivelsen af hans meget fuldstændige Arbejde, som han benyttede

(1) At den her anførte Sætning er rigtig ogsaa da, naar den givne Kurve eller Kurverne i Systemet have særegne Punkter, fremgaar af det Bevis, jeg har givet i *Mathematische Annalen* 3die Bd. S. 153, om jeg end ikke udtrykkelig gjør den sidste Forudsætning.

(2) Navnlig i Crelle-Borchardt: Journal, 66de Bd.

til Erhvervelse af Doktorgraden, sinkedes ved Krigen og Kommunen, saa det først udkom i Slutningen af 1871 ([1]).

Uden at vide noget om Maillard's netop udkomne Arbejde gav jeg mig i Januar 1872 ifærd med den samme Opgave, denne Gang med mere Held, end naar jeg tidligere havde forsøgt det, og jeg kunde i Februar sende Resultaterne til Chasles, som, uagtet han selvfølgelig kjendte Maillard's Afhandling, strax lod mine Meddelelser indrykke i *Comptes rendus* ([2]), paa Grund af den Betydning, flere Løsninger af denne Opgave kunde have med Hensyn til Løsningen af de tilsvarende Opgaver vedrørende Kurver af fjerde Orden. Paa disses Behandling begyndte jeg dernæst, og det ikke alene paa Grund af Resultaternes før omtalte Betydning. Undersøgelsen af Kurverne af tredie Orden havde nemlig vist mig, hvilken Betydning det har for en fuldstændig Opfattelse af plane Kurvers Særegenheder at se, hvorledes de blive til i et System af Kurver med en variabel Parameter, samt at Bestemmelsen af Karakteristiker, ved hvilken de særegne Kurver, deriblandt ogsaa saadanne, som have Mangefoldsgrene, spille en Hovedrolle ([3]), giver et godt Middel til at finde og prøve Egenskaberne ved disse Kurver, samt til at sikre sig mod at glemme nogen særegen Kurve. Med dette Kjendskab til de særegne Kurver følger et Indblik i den Rolle, som under Bestemmelsen af Kurver ved givne Betingelser de forskjelligartede Løsninger spille, der fremkomme samtidig, og som samtidig vilde tilfredsstille samme Ligning, hvis man vilde benytte Analysens Hjælp. Formlerne i mit andet Afsnit — som overhovedet Formler, der findes ved «*Principe de correspondance*» — angive netop, hvorledes det fuldstændige Antal af Løsninger af en Opgave, som kan udtrykkes ved en algebraisk Ligning, fordeles paa de forskjelligartede Løsninger.

Det er klart, at man i disse Henseender maatte opnaa langt mere ved Undersøgelsen af Kurver af fjerde Orden, der kunne have indtil tre særegne Punkter, end ved Undersøgelse af Kurver af tredie Orden, hvor der højst er ét — om end Vanskelighederne voxe i samme Forhold som Udbyttet. Blandt Kurver af fjerde Orden (eller Klasse) træffer man saaledes paa alle de Kurver, der have saadanne særegne Punkter (eller Tangenter), som i Almindelighed i et System ville kunne fremkomme ved Omdannelse eller Sammenfalden af Dobbeltpunkter og Spidser (eller Dobbelttangenter og Vendetangenter). Man kan derfor, som jeg har gjort i denne Afhandling, give de Undersøgelser og Formler, der anvendes ved

---

([1]) *Recherche des caractéristiqus des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre* Paris 1871.

([2]) *Détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires de cubiques.* C. R. 19, 26 février et 11 mars 1872.

([3]) Dette viser sig allerede ved Keglesnit. Se min Afhandling: *Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit.* Kjøbenhavn 1865.

Bestemmelsen af Karakteristiker i Systemer af fjerde Orden, en saadan Almindelighed, at de kunne anvendes paa Systemer af alle Ordener. Ganske vist ville dog disse Formler og de andre Fremgangsmaader, som jeg anvender paa elementære Systemer af fjerde Orden, ikke være tilstrækelige til ogsaa at bestemme Karakteristikerne i alle de elementære Systemer af Kurver af femte eller højere Orden.

Det fremgaar af de foranstaaende Bemærkninger, at den Ordning af Stoffet, som man vil finde i efterfølgende Afhandling (1), er meget forskjellig fra den, jeg har fulgt i mine Undersøgelser. De Egenskaber, som jeg i første og i tredie Afsnit giver en analytisk Begrundelse, og som derefter benyttes til Bestemmelse af Koefficienter i Formler i andet og tredie Afsnit, har jeg i Virkeligheden for en stor Del først fundet gjennem disse Formler og de deraf udledte Tal, idet de omtalte Koefficienter da bestemtes ved ad forskjellige Veje at udlede samme Resultat (Smlgn. 31 og 45).

Det Spørgsmaal ligger nær, om nu den før omtalte Formodning af Chasles angaaende de to Karakteristikers fuldstændige Tilstrækkelighed til at repræsentere et System overfor Indførelsen af hvilkensomhelst ny Betingelse er bleven bekræftet. Dette har ganske vist ikke været Tilfældet (2), men alene den Omstændighed, at som sagt to Karakteristiker ere tilstrækkelige, naar den nye Betingelse gaar ud paa Røring med en given Kurve, giver i alle Tilfælde Karakteristikerne i de elementære Systemer en meget udstrakt Anvendelse. Man maa i alt Fald begynde med de elementære Systemer, og de Veje, som derved benyttes, ville i mange Tilfælde kunne anvendes til direkte at finde Karakteristikerne i saadanne Systemer, hvor det maatte vise sig, at den af Chasles formodede Vej ikke kan bruges. — I hvor stort Omfang nu Chasles's Hypothese gjælder, og med hvilke Modifikationer den gjælder i et endnu større Omfang, indlade vi os her ikke paa at undersøge; men jeg haaber, at min Afhandling vil bringe Materiale ogsaa til Besvarelse af dette Spørgsmaal.

Vi skulle her endnu kun gjøre opmærksom paa, at en Fortegnelse over den Literatur, der knytter sig til Læren om Karakteristiker, findes i *Bulletin des Sciences mathématiques* 1872. S. 155.

---

(1) Om noget af denne Afhandlings Indhold har jeg givet et Par Meddelelser i *Comptes rendus* for 23de Septbr. og 21de Oktbr. 1872.

(2) Til dette samme Resultat kommer Clebsch i sin for ganske nylig — efter Forf.'s Død — udkomne Afhandling: *Zur Theorie der Charakteristiken*, Mathematische Annalen VI S. 1, idet han analytisk viser, at denne Paastands Rigtighed for Keglesnittenes Vedkommende beror paa Egenskaber, som kun tilhøre disse Kurver.

Første Afsnit.

Beskrivelse af et Kurvesystems sædvanlige særegne Kurver uden Mangefoldsgrene.

1. System af Kurver. — Naar en algebraisk Kurve er

af Ordenen n	af Klassen n'
og har d Dobbeltpunkter	og har d' Dobbelttangenter
og e Spidser,	og e' Vendetangenter,

maa disse Tal som bekjendt tilfredsstille følgende tre Ligninger (de Plücker'ske)

$$\left.\begin{aligned} n(n-1) &= n' + 2d + 3e \\ n'(n'-1) &= n + 2d' + 3e' \\ e' - e &= 3(n' - n). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)\,[1].$$

Til at bestemme Kurven kræves $\frac{n(n+3)}{2} - d - 2e \left(= \frac{n'(n'+3)}{2} - d' - 2e'\right)$ opgivne Betingelser. Der vil saaledes være uendelig mange Kurver, der ere underkastede

$$\frac{n(n+3)}{2} - d - 2e - 1 \left(= \frac{n'(n'+3)}{2} - d' - 2e' - 1\right)$$

opgivne Betingelser. Disse siges at danne et System.

2. Analytisk Fremstilling af et System af Kurver. — Analytisk bestemmes et Kurvesystem af n'te Orden ved en Ligning af n'te Grad mellem Punktkoordinater samt de $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Ligninger mellem denne Lignings $\frac{n(n+3)}{2}$ Konstanter, som udtrykke, dels at Kurven har d Dobbeltpunkter og e Spidser, dels at den skal tilfredsstille de opgivne Betingelser. Vi betragte kun Systemer, hvor ogsaa disse sidste Betingelsesligninger ere algebraiske. I saa Fald kunne Konstanterne i Kurvens Ligning tænkes udtrykte som algebraiske Funktioner (i videste Betydning ɔ: Rødder i algebraiske Ligninger) af en blandt dem, eller af en ny Konstant k. Idet man paa samme Maade kunde være gaaet ud fra Kurvens Tangentligning, ses det, at et Kurvesystem kan fremstilles ved en Punkt- eller Tangentligning, hvis Koefficienter ere algebraiske Funktioner af en Parameter k. Denne bør vælges saaledes, at de enkelte Kurver i Systemet ikke bestemmes hver ved flere forskjellige Værdier af k. Hvis man f. Ex. først havde indført en saadan Parameter k, som overalt kun forekom i Forbindelsen $f(k)$, hvor f er en (af x og y uafhængig) Funktion af højere end første Grad, burde man betragte $f(k)$ som Systemets Parameter og ombytte denne Funktion med den enkelte Betegnelse k. At man virkelig altid paa denne

[1] Blandt de heraf afledte Ligninger er det ofte bekvemt at bruge $2(d' - d) = (n' - n)(n' + n - 9)$.

Maade kan opnaa, at der til de enkelte Kurver i Systemet svarer bestemte Værdier af k, er klart; thi dette vil f. Ex. være Tilfældet, naar k er en af selve Koefficienterne i Kurvens Ligning. Enkelte Kurver i Systemet kunne dog danne Undtagelser i denne Henseende: en saadan, der altsaa svarer til flere Værdier af k, forekommer da flere Gange i Systemet.

Dette samme vil være Tilfældet, naar flere af de Kurver, der svarer til samme Værdi af k, falde sammen. Medens man kan bringe hver Kurve i Systemet til at have sin tilsvarende bestemte Værdi af k, kan man nemlig ikke i Almindelighed opnaa, at hver Værdi af k kun bestemmer én Kurve. Dette vil kun finde Sted, naar Ligningens Koefficienter ere rationale Funktioner af k; men man véd, at dette ikke kan opnaas ved nogen Indførelse af en ny Parameter, naar f. Ex. Koefficienterne i Ligningen ere forelagte som Funktioner af k og $\sqrt{R}$, hvor R er et Polynomium i k af højere end anden Grad. (Smlgn. Læren om algebraiske Differentialers Integration).

Naar man skal undersøge de Kurver i Systemet, som ligge nærmest ved en enkelt bestemt, vil det være bekvemt at vælge k saaledes, at denne svarer til $k = 0$, hvad der altid kan opnaas ved at ombytte $k - k_1$ med k. Venstre Side i Systemets Fællesligning $\varphi = 0$ kan da udvikles i en Række efter stigende Potenser af k, hvor det konstante Led bliver $\varphi^{(0)}$, idet $\varphi^{(0)} = 0$ er den Kurve i Systemet, hvis nærmeste Kurver vi vilde undersøge. Rækken bliver konvergent, saalænge k er numerisk mindre end en vis endelig Grænse, der bestemmer, hvor stor en Del af Systemet man ad denne Vej kan undersøge. Hvis Rækken indeholder brudne Exponenter med Generalnævneren p, kan man ved for k at indføre den nye Parameter $k^{\frac{1}{p}}$ — som atter kaldes k — gjøre dem hele. Vi faa paa denne Maade omformet Systemets Ligning til

(I) . . . . $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} k + \varphi^{(2)} k^2 + \dots \varphi^{(r-1)} k^{r-1} + \psi k^r = 0,$

hvor Funktionerne φ ere uafhængige af k, medens ψ er en Funktion af k samt x og y, som ikke bliver uendelig for $k = 0$, eller, hvis man lader r være uendelig, til

(I b) . . . . $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} k + \varphi^{(2)} k^2 + \dots = 0.$

Skal Kurven $\varphi^{(0)}$ forekomme flere Gange blandt de til $k = 0$ svarende Kurver i Systemet, maa det ske ved, at enten de andre Led i den uendelige Række indeholde andre irrationale Konstanter, end der allerede findes i $\varphi^{(0)}$, eller ved at man identisk har $\varphi^{(1)} = 0$, $\varphi^{(2)} = 0 \dots \varphi^{(q-1)} = 0$. I første Tilfælde kan man særskilt undersøge de Kurver, der under hver af $\varphi^{(0)}$'s Forekomster i Systemet ligge den nærmest, i andet Tilfælde derimod ville q paa hinanden følgende Kurver i Systemet falde sammen i $\varphi^{(0)}$.

Da vi nu ikke uden at gjøre Brud paa vore Forudsætninger paany kunne ombytte k med nogen anden ny Parameter end ak, hvor a er en vilkaarlig Konstant eller i alt Fald en saadan Funktion af k, som for $k = 0$ antager en endelig Værdi, kunne vi om en Størrelse u,

der afhænger af Konstanterne i en Kurve i Systemet, som nærmer sig til at falde sammen med $\varphi^{(0)}$, sige, at den for lim. $k=0$ er uendelig lille af Ordenen α, naar $\frac{u}{k^\alpha}$ antager en endelig Værdi for $k=0$. k betragtes da som uendelig lille af første Orden. Udvikles u i Række efter stigende Potenser af k, bliver første Led Ak^α, hvor A er en af k uafhængig Konstant, nemlig Værdien af $\frac{u}{k^\alpha}$ for $k=0$. At to Størrelser ere uendelig smaa af samme Orden, kan ogsaa udtrykkes ved, at man siger, at de ere proportionale. u er i det her antagne Tilfælde proportional med k^α.

Afstandene mellem Kurven $\varphi^{(0)}$, der var en vilkaarlig Kurve i Systemet, og en nærliggende, der bestemmes ved Konstanten k, ville, naar lim. $k=0$, i Almindelighed være uendelig smaa af første Orden. Vi kunne nemlig antage, at der er brugt Punktkoordinater, og at et vilkaarligt (enkelt) Punkt af Kurven $\varphi^{(0)}$ er taget til Begyndelsespunkt O, og at en vilkaarlig ret Linie herigjennem — blot ikke Tangenten — er taget til Abscisseaxe. Første Led i Abscissen til den nærliggende Kurve φ's nærmeste Skjæringspunkt med Abscisseaxen bestemmes da ved i Ligningen

$$\varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} . k = 0$$

af $\varphi^{(0)}$ kun at tage det Led, som indeholder x^1, og af $\varphi^{(1)}$ kun det konstante Led. Er dette forskjelligt fra Nul, bliver den paagjældende Abscisse for lim. $k=0$ uendelig lille af første Orden. Havde Kurven $\varphi^{(0)}$ rørt Abscisseaxen, vilde man faa to Abscisser af Ordenen $\frac{1}{2}$.

Havde det betragtede Punkt været et af de d Dobbeltpunkter eller en af de e Spidser — altsaa ikke et «nyt» Dobbeltpunkt, hvorom nærmere i 10 o. f. — maatte man til Bestemmelse af første Led i Abscisserne til Abscisseaxens to nærmeste Skjæringspunkter med en nærliggende Kurve benytte Ligningen

$$\varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} k + \varphi^{(2)} k^2 = 0,$$

hvor $\varphi^{(0)}$ ikke indeholder Led under anden Grad med Hensyn til x og y, og $\varphi^{(1)}$ ikke Led under første Grad. Om Rigtigheden af den sidste Paastand overbeviser man sig let derved, at den nærliggende Kurves Ligning ved en lille Forflyttelse af Koordinatsystemet skal kunne bringes til ikke at indeholde Led under anden Grad. Naar da $\varphi^{(2)}$ ikke ogsaa bliver Nul for $x=y=0$, blive ogsaa disse Abscisser for lim. $k=0$ uendelig smaa af første Orden. Paa lignende Maade kunde mere sammensatte særegne Punkter behandles, hvis Systemets Kurver havde saadanne.

Naar $x=y=0$ i det første af de her betragtede Tilfælde gjør $\varphi^{(1)}=0$, eller i det andet $\varphi^{(2)}=0$, bliver den omtalte Abscisse, eller i andet Tilfælde en af de to Abscisser, uendelig lille af højere Orden. Et saadant Punkt, hvis Afstand fra den nærliggende Kurve (bestemt ved lim. $k=0$) bliver uendelig lille af anden eller

højere Orden, ligger paa Indhyllingskurven til Systemets Kurver. Dette bliver saaledes Tilfældet med ethvert Skjæringspunkt med den konsekutive Kurve (ɔ: den Grænsestilling, hvortil et Skjæringspunkt mellem $\varphi^{(0)}$ og en nærliggende Kurve nærmer sig for lim. $k = 0$), som ikke er et særeget Punkt paa Kurven $\varphi^{(0)}$, idet disse Skjæringspunkter netop bestemmes ved $\varphi^{(1)} = 0$. Det viser sig, at naar $\varphi^{(1)}$ identisk er Nul, vil $\varphi^{(0)}$, hvori vi før saa, at i dette Tilfælde to paa hinanden følgende Kurver faldt sammen, udgjøre en Del af Indhyllingskurven.

Naar man endvidere søger Tangens til den Vinkel, som en Tangent til Kurven $\varphi^{(0)}$ danner med den Tangent fra et af dens Punkter (dog ikke Røringspunktet) til den ved k bestemte Kurve, som for $k = 0$ falder sammen med Tangenten til $\varphi^{(0)}$, vil denne ogsaa for lim. $k = 0$ være uendelig lille af første Orden, medmindre den rører Systemets Indhyllingskurve. Da dette er samme Resultat, som man vilde faa ved Anvendelse af Liniekoordinater, viser det sig, at en og samme Parameter k vil tilfredsstille de før opstillede Betingelser, hvad enten man fremstiller Systemet ved Punktkoordinater eller ved Liniekoordinater. Det ses ogsaa, at Indhyllingskurven rører de Fællestangenter til Kurven $\varphi^{(0)}$ og den konsekutive Kurve i Systemet, som ikke ere særegne Tangenter til $\varphi^{(0)}$.

Særegne Kurver i Systemet kunne, som vi skulle se, have særegne Punkter og Tangenter, som have Afvigelser (Afstande og Vinkler) af lavere end første Orden fra Nabokurvens Punkter og Tangenter, eller som kunne ligge paa eller røre Indhyllingskurven, medens dog deres Afvigelser ere af lavere end anden Orden. At de ligge paa eller røre Indhyllingskurven, beror da paa, at de ere Grænsestillinger for saadanne Punkter og Linier, som gjøre det.

3. Karakteristiker. — Naar man til Systemets Betingelser føjer endnu én, faas det tilstrækkelige Antal Bestemmelser af en Kurve. Der vil saaledes være et endeligt Antal Kurver i et System, som tilfredsstille en ny Betingelse, saasom at gaa gjennem et givet Punkt, røre en given ret Linie, have et Dobbeltpunkt beliggende paa en given ret Linie o. s. v. — Vi kalde

Antallet af Kurver, som gaa gjennem et givet Punkt . . . . μ;
Ordenen af det geometriske Sted for:
Dobbeltpunkterne . . . . b,
Spidserne . . . . c;
Klassen af Indhyllingskurven for:
Tangenter i Dobbeltpunkter . . . . . . p,
Tangenter i Spidser . . . . q,

Antallet af Kurver, som røre en given ret Linie . . . . μ';
Klassen af Indhyllingskurven for:
Dobbelttangenterne . . . . b',
Vendetangenterne . . . . c';
Ordenen af det geometriske Sted for:
Røringspunkter med Dobbelttangenter p',
Røringspunkter med Vendetangenter . q',

Klassen af Indhyllingskurven for:

Tangenter fra Dobbeltpunkter . . . . . u,

Tangenter fra Spidser . . . . v,

Forbindelseslinier mellem Dobbeltpunkter . . . . x,

Forbindelseslinier mellem Dobbeltpunkt og Spids . . . . y,

Forbindelseslinier mellem Spidser . . . z.

Ordenen af det geometriske Sted for:

Kurvens Skjæringspunkter med Dobbelttangenter . . . . u',

Kurvens Skjæringspunkter med Vendetangenter . . . . v',

Skjæringspunkter mellem Dobbelttangenter . . . . x',

Skjæringspunkter mellem Dobbelt- og Vendetangent . . . . y',

Skjæringspunkter mellem Vendetangenter . . . . z'.

μ og μ' kaldes Kurvesystemets første og anden Karakteristik. Naar den fælles Punktligning for Kurver i et System gjøres hel og rational med Hensyn til Parameteren k, vil Karakteristiken μ være Graden af den saaledes omdannede Ligning. Er det Tangentligningen, som man gjør hel og rational, bliver Graden Karakteristiken μ'. Den omdannede Ligning vil for en konstant Værdi af k under ét fremstille den Gruppe blandt Kurverne i Systemet, som svarer til denne Værdi af k.

Naar der er Tale om Kurverne (b), (b'), (c) ..., forstaas derved de Kurver, hvis Orden eller Klasse betegnes ved b, b', c ...

4. Sædvanlige særegne Kurver; Inddeling af disse i to Hovedklasser.— De særegne Kurver i et System ere saadanne, der have andre særegne Punkter eller Tangenter end en vilkaarlig Kurve i Systemet. De særegne Kurver af en vis Art findes ved til Systemets Betingelser at føje den, at Kurven skal have den paagjældende nye Særegenhed, og Systemet vil virkelig indeholde saadanne (reelle eller imaginære) Kurver, naar den nye Betingelse kan udtrykkes ved en Ligning i k. Hvilke særegne Kurver et System vil indeholde, beror ikke blot paa, hvilke dets Plücker'ske Tal (n, n', d ...) ere, men ogsaa hvilke de andre Betingelser ere, som det er underkastet. Man finder saaledes sædvanligvis i et System af Kurver saadanne, som have et nyt Dobbeltpunkt (altsaa ialt $d+1$); men i specielle Tilfælde kan den Ligning, som tjener til Bestemmelse af saadanne Kurver, give Værdier af k, som svare til Kurver, der f. Ex. have to nye Dobbeltpunkter. Det ligger da nær — her som i lignende Undersøgelser — særligt at undersøge de sædvanlige særegne Kurver i ethvert System med givne Plücker'ske Tal, idet man da derved maatte forstaa saadanne, som bestemmes ved en enkelt Betingelse føjet til dem, som alene udtrykke, at Kurven skal have de givne Plücker'ske Tal. Da denne Betingelse indføres forud for og altsaa uafhængigt af Systemets øvrige Betingelser, maatte man vente at finde saadanne særegne Kurver — eller saadanne, der dannes deraf ved yderligere Tilføjelser af Særegenheder — i ethvert System af Kurver med de samme

Plücker'ske Tal, en Omstændighed, der skulde synes at kunne tjene som Kjendemærke paa de sædvanlige særegne Kurver. Undersøgelser over Systemer med sædvanlige særegne Kurver vilde ogsaa kunne anvendes paa saadanne Systemer, hvori der findes usædvanlige særegne Kurver, idet en saadan betragtes som en Kurve, hvori flere sædvanlige særegne Kurver ere faldne sammen, en Kurve med to nye Dobbeltpunkter f. Ex. som en saadan, hvori to med ét nyt Dobbeltpunkt ere faldne sammen.

Her frembyder sig imidlertid den Vanskelighed, at én og samme Betingelsesligning, føjet til dem, der udtrykke, at Kurven skal have de givne Plücker'ske Tal, kan bestemme forskjellige Slags særegne Kurver. Det vil da bero paa de senere tilføjede Betingelser, som nøjere bestemme Systemet, om man faar Kurver henhørende til alle disse forskjellige Slags særegne Kurver, eller kun til nogle af dem, medens andre mangle. Hvilke der findes, vil være forskjelligt for de forskjellige Systemer.

Vi kunne derfor ikke bestemme Begrebet sædvanlige særegne Kurver paa den ovenfor antydede Maade, men maa for at faa en bestemt Definition vilkaarligt vedtage [1] ved sædvanlige særegne Kurver i et System med givne Plücker'ske Tal at forstaa saadanne, som findes i de elementære Systemer, det er saadanne Systemer, hvor de øvrige givne Betingelser ere vilkaarlig valgte givne Punkter af Kurven og Tangenter til samme. Et System af Kurver, hvor disse Punkter og Tangenter ombyttes med det samme Antal givne Kurver, som Systemets Kurver skulle røre, vil da ogsaa kun have sædvanlige særegne Kurver. Det er fremdeles at vente, at Resultater af Undersøgelser over Systemer, der kun indeholde sædvanlige særegne Kurver, paa den ovenfor beskrevne Maade ville kunne anvendes paa Systemer, der ogsaa indeholde usædvanlige særegne Kurver, eller dog, at man ved Overførelse af den Methode, der har været benyttet i saadanne Undersøgelser, vil kunne finde de tilsvarende Resultater. For at finde en Begrænsning kan man i alt Fald begynde med kun at tage Hensyn til de sædvanlige særegne Kurver.

De særegne Kurver, som man først træffer paa, ere saadanne, der indeholde nye Dobbeltpunkter eller Dobbelttangenter, eller hvor et særeget Punkt eller en særegen Tangent er bleven mere sammensat, eller hvor særegne Punkter eller særegne Tangenter ere faldne sammen; men der existerer endnu en Slags særegne Kurver nemlig dem med Mangefoldsgrene, det er saadanne Grene, som skjæres af enhver ret Linie i flere sammenfaldende Punkter, eller hvortil man fra ethvert Punkt kan trække flere sammenfaldende Tangenter. Til denne Slags særegne Kurver hører, foruden andre, nogle af dem, som vi allerede have henregnet

[1] I Bestemmelsen af de sædvanlige Særegenheder ved en enkelt Kurve støder man paa en lignende Vanskelighed: er Kurven given ved sin Punktligning har den i Almindelighed Dobbelt- og Vendetangenter, men ingen særegne Punkter; er den given ved sin Tangentligning har den i Almindelighed Dobbeltpunkter og Spidser. Man vedtager da at betragte saavel de nævnte særegne Tangenter som de nævnte særegne Punkter som sædvanlige Særegenheder.

til den første Klasse, nemlig Kurver med en ny Dobbelttangent (eller med et nyt Dobbeltpunkt), idet vi skulle se, at denne (dette) maa betragtes som en Dobbeltgren af Kurven. Hvad angaar de øvrige Kurver med Mangefoldsgrene, saa have vi, som det skal ses i tredie Afsnit, bestemt dem, som «sædvanligvis» findes i Systemer af Kurver af tredie og fjerde Orden. Da Antallet af de forskjellige Arter af Kurver med Mangefoldsgrene voxer, naar Kurvernes Orden voxer, lader det sig neppe gjøre at drage disse særegne Kurver ind i saadanne almindelige Undersøgelser, som skulle strække sig til Kurver af alle Ordener. Derfor skulle vi i Udviklingen af Formler i andet Afsnit ikke tage Hensyn til andre Kurver med Mangefoldsgrene end de ovenfor nævnte, der tillige høre til den første Klasse af særegne Kurver. Disse Formler ville da 1) være anvendelige paa de talrige Systemer, hvori der ikke forekommer andre Kurver med Mangefoldsgrene, og 2) ved Tilføjelse af supplementære Led kunne gjøres anvendelige paa saadanne, hvor der findes Kurver med Mangefoldsgrene, og her — som før, da vi talte om usædvanlige særegne Kurver — ville omtrent de samme Undersøgelser, som føre til Formlerne, kunne benyttes til Udledelse af de supplementære Led. Dette skulle vi faa Lejlighed til at se i de før nævnte Tilfælde (Kurver af 3die og 4de Orden), hvor vi gjennemføre Bestemmelsen af Kurver med Mangefoldsgrene.

5. Retliniede Grene og Toppunkter. — Idet vi her betragte Kurvernes Bestemmelse som Punktfrembringelser (geometriske Steder for Punkter) og som Tangentfrembringelser (Indhyllingskurver for rette Linier) som ligeberettigede, maa vi tage et særligt Hensyn til saadanne Kurver, hvoraf rette Linier eller Punkter ere Grene. En ret Linie kan nemlig ikke betragtes som Tangentfrembringelse, og en retliniet Gren af en Kurve vil altsaa kun gjøre sig gjældende, naar Kurven betragtes som Punktfrembringelse. Ligeledes kan et Punkt ikke betragtes som Punktfrembringelse, og et Punkt, som er en Gren af en sammensat Kurve, vil altsaa kun gjøre sig gjældende, naar Kurven betragtes som Tangentfrembringelse. Et saadant Punkt kaldes et Toppunkt; dette Ord [1] svarer altsaa dualistisk til Ordet retliniet Gren.

En sammensat Kurve i et System vil saaledes, naar den betragtes som Punktfrembringelse, kunne bestaa af en krum Linie og retliniede Grene, og betragtet som Tangentfrembringelse være sammensat af den samme krumme Linie og Toppunkter. Den for begge Frembringelsesmaader fælles krumme Linie, der godt kan være sammensat af flere

[1] Det har sin Oprindelse fra Keglesnit, der reduceres til Dobbeltlinier; enhver Linie gjennem disse Keglesnits Toppunkter (i sædvanlig Betydning) er en Tangent, saa de ogsaa blive Toppunkter i den her brugte Betydning. — Et Toppunkt er overhovedet et Punkt af den Beskaffenhed, at enhver ret Linie derigjennem er en Tangent. Det maa ikke forvexles med Punktgeometriens «isoleret Punkt», som blot er et Dobbeltpunkt (Mangefoldspunkt), hvor begge (alle) Grenene ere imaginære. Da en ret Linie ikke betragtes som en Tangent, blot fordi den gaar gjennem et Dobbeltpunkt, er et saadant i Almindelighed ikke et Toppunkt; men vi skulle se, at «nye» Dobbeltpunkter ere dobbelte Toppunkter.

krumme Linier, kaldes Restkurven. De Plücker'ske Formler, ved hvis Udledelse man benytter begge Frembringelsesmaader, kunne i saa Fald kun anvendes paa Restkurven.

6. Hjælpesætninger om Kurver med retliniede Grene og Toppunkter. — Et System vil i Almindelighed ikke indeholde saadanne Kurver, hvor $n-1$ af de d Dobbeltpunkter ere Skjæringspunkter mellem en enkelt retliniet Gren og en Restkurve. I saa Fald vilde nemlig en ret Linie, som forbandt to af de $n-1$ tilsvarende Dobbeltpunkter paa en nærliggende Kurve, i hvert af disse skjære denne Kurve i to Punkter og desuden skjære den i $n-3$ Punkter, som til Grænsestillinger vilde have de andre $n-3$ Dobbeltpunkter, som paa Grænsekurven falde ud i en ret Linie, altsaa i $n+1$ Punkter. Den vilde altsaa være en Gren af denne Kurve. De nærmestliggende Kurver fik saaledes ogsaa retliniede Grene, og uendelig mange Kurver i Systemet vilde altsaa have saadanne. De Kurver, med hvilke dette var Tilfældet, maatte kunne udelukkes af Systemet og danne et særskilt System. Beviset gjælder ogsaa, naar flere af de $n-1$ Skjæringspunkter falde sammen.

Dette stemmer ogsaa med, hvad man finder ved at søge, hvorvidt der, naar $d \geq n-1$, virkelig kan existere Kurver, der ere sammensatte paa den angivne Maade, og som tilfredsstille de øvrige opgivne Betingelser. Restkurven bliver af Ordenen $n-1$, og den maa have $d-(n-1)$ Dobbeltpunkter og e Spidser. Bestemmelsen af den og den retliniede Gren afhænger saaledes af

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - (d-n+1) - 2e + 2 = \frac{n(n+3)}{2} - d - 2e$$

Betingelser, eller af én mere end dem, der skulde bestemme Systemet. De af en ret Linie og en Restkurve sammensatte Kurver, der skulde tilfredsstille Systemets Betingelser, vilde altsaa danne et fulstændigt System for sig. For nu virkelig at udelukke dette System, maa man altsaa, hvis man definerer Systemet ved tre Plücker'ske Tal (n, d og e) samt de øvrige opgivne Betingelser, forudsætte, at kun et endeligt Antal Kurver i Systemet maa indeholde retliniede Grene. Dette er allerede en nødvendig Betingelse for, at de Plücker'ske Ligninger (1) skulle kunne anvendes til af de tre Plücker'ske Tal at bestemme de øvrige. Disse Ligninger vilde i det Tilfælde, som vi forsøgte at antage, give, at Restkurven vel var af Klassen n', men havde $d'-4$ Dobbelttangenter og $e'+3$ Vendetangenter.

Dualitetsprincipet giver, at et System i Almindelighed ikke vil indeholde Kurver, hvor $n'-1$ af de d' Dobbelttangenter ere Tangenter fra et enkelt Toppunkt til en Restkurve, idet vi heller ikke definere Systemet ved tre Plücker'ske

Tal (n', d', e') og de opgivne Betingelser uden at forudsætte, at kun et endeligt Antal Kurver i Systemet indeholde Toppunkter.

Vi se specielt, at en Kurve i Systemet ikke kan faa retliniede Grene eller Toppunkter, uden at der dannes nye særegne Punkter eller Tangenter eller de gamle omdannes, og at det altsaa kun er særegne Kurver i Systemet (se 4), som kunne have retliniede Grene og Toppunkter.

Exempel. I Systemer af Kurver af fjerde Orden med tre Dobbeltpunkter findes der ikke Kurver sammensatte af Kurver af tredie Orden uden særegne Punkter og rette Linier, uagtet man skulde vente at finde saadanne ved til Systemets øvrige Betingelser at føje den enkelte Betingelse, at de tre Dobbeltpunkter skulle ligge ud i en ret Linie. De omtalte sammensatte Kurver kunne heller ikke frembringes ved to Keglesnitsbundter paa samme Maade som andre Kurver af fjerde Orden med tre Dobbeltpunkter.

7. Fortegnelse over de sædvanlige særegne Kurver. — Naar blot d og e samt d' og e' ikke have for smaa Værdier, vil et System »sædvanligvis« — foruden visse Kurver med Mangefoldsgrene — indeholde følgende særegne Kurver, som vi i de følgende N-re skulle beskrive enkeltvis:

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$	Kurver med et nyt Dobbeltpunkt, blandt hvilke α_0 ere saadanne, hvor ingen af de Grene, der danne dette Dobbeltpunkt, er en ret Linie, α_1 saadanne, hvor den ene, og α_2 saadanne, hvor de begge ere rette Linier;	$\alpha' = \alpha_0' + \alpha_1' + \alpha_2'$	Kurver med en ny Dobbelttangent, blandt hvilke α_0' ere saadanne, hvor ingen af de Grene, som Dobbelttangenten rører, er et Toppunkt, α_1' saadanne, hvor den ene, og α_2' saadanne, hvor de begge ere Toppunkter;
β	Kurver, i hvilke et Dobbeltpunkt er bleven til en Spids;	β'	Kurver, i hvilke en Dobbelttangent er bleven til en Vendetangent;
$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$	Kurver, i hvilke en Spids er bleven til et Røringspunkt mellem to Grene, og blandt hvilke særligt γ_1 saadanne, hvor den ene af disse Grene er en ret Linie;	$\gamma' = \gamma_0' + \gamma_1'$	Kurver, i hvilke en Vendetangent er bleven til Tangenten i et Røringspunkt mellem to Grene, og blandt hvilke særligt γ_1' saadanne, hvor den ene af disse Grene er et Toppunkt;
$(2d)$	Kurver, hvor to Dobbeltpunkter falde sammen;	$(2d')$	Kurver, hvor to Dobbelttangenter falde sammen;

$(d\,e)$	Kurver, hvor et Dobbeltpunkt og en Spids falde sammen;	$(d'e')$	Kurver, hvor en Dobbelttangent og en Vendetangent falde sammen;
$(2\,e)$	Kurver, hvor to Spidser falde sammen;	$(2\,e')$	Kurver, hvor to Vendetangenter falde sammen;
$(3\,d)$	Kurver, hvor tre Dobbeltpunkter falde sammen til til et tredobbelt Punkt;	$(3\,d')$	Kurver, hvor tre Dobbelttangenter falde sammen til en tredobbelt Tangent;
$(2\,d\,e)$	Kurver, hvor to Dobbeltpunkter og en Spids falde sammen;	$(2\,d'e')$	Kurver, hvor to Dobbelttangenter og en Vendetangent falde sammen;
$(d\,2\,e)$	Kurver, hvor et Dobbeltpunkt og to Spidser falde sammen.	$(d'\,2\,e')$	Kurver, hvor en Dobbelttangent og to Vendetangenter falde sammen.

Om de i venstre Spalte anførte Kurver forudsættes det, at den anførte Forandring i Henseende til særegne Punkter hverken medfører nogen yderligere Forøgelse eller Sammenfalden af særegne Punkter eller nogen yderligere Dannelse af retliniede Grene, end udtrykkelig angivet. Den første Forudsætning er nødvendig, for at ikke f. Ex. Kurverne $(3\,d)$, det er: «de Kurver, hvis Antal betegnes med $(3\,d)$», skulle henhøre til Kurverne $(2\,d)$, og den anden Forudsætning — hvis Tilladelighed med Hensyn til $(2\,d)$, $(3\,d)$ og $(2\,d\,e)$ følger af 6 — vil være nødvendig, naar ikke Kurverne β', i hvilke vi ville se, at to Spidser falde sammen, skulle henhøre til Kurverne $(2\,e)$. Derimod ville de i venstre Spalte anførte Forandringer i Henseende til særegne Punkter ligefrem medføre Forandringer i Henseende til særegne Tangenter og Dannelse af Toppunkter.

Ligeledes forudsættes det om de i højre Spalte anførte Kurver, at den anførte Forandring i Henseende til særegne Tangenter hverken medfører nogen yderligere Forøgelse eller Sammenfalden af særegne Tangenter eller nogen yderligere Dannelse af Toppunkter, end udtrykkelig angivet, men vel Forandringer i Henseende til særegne Punkter og retliniede Grene.

Det vil vise sig, at de særegne Kurver γ_1, $(2\,d)$, $(d\,e)$, $(2\,e)$ henholdsvis ere de samme som dem, vi have betegnet med γ', $(2\,d')$, $(d'e')$, $(2\,e')$. Vi have altsaa

$$\gamma_1 = \gamma_1', \; (2\,d) = (2\,d'), \; (d\,e) = (d'e'), \; (2\,e) = (2\,e') \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

8. Plücker'ske Tal til Restkurverne α, β, γ, α', β', γ'. — Det vil vise sig, at alle de her nævnte Kurver indeholde enten Toppunkter eller retliniede Grene eller begge Dele. For Kurverne α, β og γ giver Definitionen ligefrem Restkurvens Orden samt Antallene af dens Dobbeltpunkter og Spidser. Restkurven α_1 bliver saaledes, idet den rette

Linie udsondres, af Ordenen $n-1$; af dens Skjæringspunkter med den rette Linie er det ene et nyt Dobbeltpunkt, de øvrige $n-2$ derimod høre til de d, som findes paa enhver Kurve i Systemet, saa Restkurven beholder $d-(n-2)$ af disse; Restkurven beholder alle e Spidser. Ligeledes kjender man Klassen af og Antallene af Dobbelttangenter og Vendetangenter til Restkurverne α', β', γ'. De Plücker'ske Formler ville da give alle disse Restkurvers Plücker'ske Tal. Disse indeholdes i efterfølgende Tavle:

	Orden.	Klasse.	Dobbeltpunkter.	Spidser.	Dobbelttangenter.	Vendetangenter.
α_0	n	$n'-2$	$d+1$	e	$d'-2(n'-6)$	$e'-6$
α_1	$n-1$	$n'-2$	$d-(n-2)$	e	$d'-2(n'-4)$	$e'-3$
α_2	$n-2$	$n'-2$	$d-2(n-2)$	e	$d'-2(n'-2)$	e'
β	n	$n'-1$	$d-1$	$e+1$	$d'-(n'-4)$	$e'-2$
γ_0	n	$n'-1$	$d+2$	$e-1$	$d'-(n'-5)+2$	$e'-4$
γ_1	$n-1$	$n'-1$	$d-(n-3)$	$e-1$	$d'-(n'-3)$	$e'-1$
α_0'	$n-2$	n'	$d-2(n-6)$	$e-6$	$d'+1$	e'
α_1'	$n-2$	$n'-1$	$d-2(n-4)$	$e-3$	$d'-(n'-2)$	e'
α_2'	$n-2$	$n'-2$	$d-2(n-2)$	e	$d'-2(n'-2)$	e'
β'	$n-1$	n'	$d-(n-4)$	$e-2$	$d'-1$	$e'+1$
γ_0'	$n-1$	n'	$d-(n-5)+2$	$e-4$	$d'+2$	$e'-1$
γ_1'	$n-1$	$n'-1$	$d-(n-3)$	$e-1$	$d'-(n'-3)$	$e'-1$

At nu virkelig alle disse Kurver maa regnes med blandt sædvanlige særegne Kurver — naar blot Antallene af særegne Tangenter eller særegne Punkter ikke ere for smaa — vil vise sig, naar man tæller de Betingelser, som de fuldstændige Kurver α, β og γ betragtede som Punktdannelser og α', β' og γ' betragtede som Tangentdannelser kunne underkastes. Man finder f. Ex., at Kurverne α_1 afhænge af

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}-(d-(n-2))-2e+2=\frac{n(n+3)}{2}-d-2e-1$$

Betingelser (som godt kunne være elementære, se 4), og det samme Antal finder man for de andre. Det vil fremdeles blive paavist, at de fuldstændige Kurver ere i Besiddelse af alle de særegne Tangenter og Punkter, som ere bortfaldne for Restkurvens Vedkommende.

Tavlen angiver ogsaa de Minimumsværdier, som de Plücker'ske Tal til en vilkaarlig Kurve i Systemet kan have, naar dette virkelig skal indeholde de paagjældende særegne Kurver. For det første maa nemlig alle Restkurvens Plücker'ske Tal være positive, og dernæst vil det blive vist, at, naar Restkurverne γ_0 have $d'-n'+7$ Dobbelttangenter, be-

ror dette paa, at $n' - 5$ af de d' Dobbelttangenter til den fuldstændige Kurve ikke ere Dobbelttangenter til Restkurven, medens denne har faaet 2 nye, som ikke høre med til de d'. Derfor maa man i dette Tilfælde have $d' \geqq n' - 5$. Ligeledes vil en af Betingelserne for, at et System skal indeholde en Kurve γ_0', være $d \geqq n - 5$. Dette er betegnet ved den Maade, hvorpaa vedkommende Tal ere opførte i Tavlen.

At der ikke vil kunne være Tale om, at en Kurve ved Opløsning i Grene hvoriblandt rette Linier sædvanligvis skulde kunne faa to nye Dobbeltpunkter, eller paa én Gang faa et nyt Dobbeltpunkt og faa en Spids omdannet til Røringspunkt mellem to Grene o.s.v., følger af, at Antallet af Betingelser, som man kunde underkaste saadanne Kurver, vilde blive for lille.

9. Kurverne α betragtede som Tangentfrembringelser og Kurverne α' betragtede som Punktfrembringelser. — Idet en Restkurve α kun er af Klassen $n' - 2$, ere to af de Tangenter, som man fra et vilkaarligt Punkt kan trække til en Kurve i Systemet, ikke indbefattede blandt Tangenterne til denne Restkurve. De manglende to Tangenter maa falde sammen i Linier gjennem det nye Dobbeltpunkt, som altsaa bliver et dobbelt Toppunkt, der maa udgjøre en Del af den fuldstændige Kurve α. De $2(n' - 6)$, $2(n' - 4)$ eller $2(n' - 2)$ Dobbelttangenter, som Restkurverne α_0, α_1 eller α_2 have mistet, falde sammen to og to i Tangenterne fra det nye Toppunkt til Restkurven (Tangenterne i selve dette Punkt ikke medregnede).

I Kurverne α_0, hvor begge det nye Dobbeltpunkts Grene høre med til Restkurven, har fremdeles den fuldstændige Kurve 6 Vendetangenter mere end Restkurven. Da Vendetangenter skulle skjære Kurven i tre sammenfaldende Punkter, kunne de 6 Vendetangenters Grænsestillinger kun være Tangenterne til Restkurvens to Grene gjennem Dobbeltpunktet, og i hver af disse ere altsaa 3 Vendetangenter faldne sammen. — For Kurverne α_1 falde, i Overensstemmelse hermed, tre Vendetangenter sammen i Tangenten til Restkurven i det nye Toppunkt, og de fundne Plücker'ske Tal vise, at disse ere de eneste blandt de e' Vendetangenter til den fuldstændige Kurve, som ere gaaede tabt for Restkurven. At den retliniede Gren af en Kurve α_1 ikke kan være Grænsestilling for en Vendetangent, følger forøvrigt af, at en Vendetangent til en foranderlig Kurve i Systemet, som nærmede sig til denne Grænse, vilde skjære Kurven dels i 3 sammenfaldende Punkter dels i $n - 2$ Punkter, som til Grænsestilling havde de $n - 2$ gamle Dobbeltpunkter, hvori Kurven α_1's retliniede Gren skjærer Restkurven, altsaa ialt i $n + 1$ Punkter. Vendetangenten maatte altsaa være en Gren af den Kurve, hvortil den hørte, eller der maatte være uendelig mange Kurver i Systemet med retliniede Grene, hvilket strider mod vore Forudsætninger (se 6). — I Kurverne α_2, hvor Restkurven slet ikke gaar igjennem det nye Toppunkt, har denne beholdt alle e' Vendetangenter.

Man finder paa samme Maade ved Betragtning af de Plücker'ske Tal til Restkurven α', at en fuldstændig Kurve α_0', naar den betragtes som Punktfrembringelse, er sammensat af Restkurven og en Dobbeltlinie, der falder i dennes nye Dobbelttangent, at to af den fuldstændige Kurves Dobbeltpunkter falde sammen i hvert af denne Dobbeltlinies Skjæringspunkter med Restkurven, og tre af dens Spidser i hvert af Røringspunkterne; at ligeledes en fuldstændig Kurve α_1' eller α_2' er sammensat af Restkurven og en Dobbeltlinie, der i første Tilfælde rører Restkurven i ét Punkt, hvor tre Spidser falde sammen, og at ogsaa i begge disse Tilfælde to Dobbeltpunkter falde sammen i hvert af Dobbeltliniens Skjæringspunkter med Restkurven.

10. Nærmere Undersøgelse af Kurverne α_0. — Punktligningen for en Kurve α_0 vil, naar vi tage det nye Dobbeltpunkt til Begyndelsespunkt O og Tangenterne til Koordinataxer [1], blive af Formen

$$xy + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots = 0,$$

idet φ_r betegner en homogen Funktion af r'te Grad af x og y. Vi kunne antage, at φ_3 ikke bliver Nul, for $x = 0$ eller $y = 0$, da man saa havde med den usædvanlige Særegenhed at gjøre, hvor en af Tangenterne i Dobbeltpunktet var en Vendetangent. Vi have da i 2 set, at de nærmest denne Kurve liggende Kurver i Systemet kunne fremstilles ved Fællesligningen

$$xy + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots + k\psi = 0, \tag{II}$$

hvor ψ er en Funktion af x, y og k, der kan udvikles i en Række efter stigende Potenser af k med hele og positive Exponenter, samt at Konstanterne i denne Række ville have fuldkommen bestemte Værdier, naar vi — i det Tilfælde, at den samme Kurve maatte forekomme flere Gange i Systemet — blot betragte en enkelt Forekomst. Foreløbig skulle vi desuden forudsætte, at $k = 0$, $x = 0$, $y = 0$ gjøre $\psi = a$, hvor $a \gtrless 0$.

Første Led i de Rækker efter stigende Potenser af k, der skulle udtrykke Koordinaterne til de Skjæringspunkter mellem Kurven (II) og en ret Linie gjennem O, der for $k = 0$ falde i O, bestemmes ved Ligningen

$$xy + ka = 0. \tag{III}$$

---

[1] x og y kunne betegne Parallelkoordinater eller almindelige Trekantkoordinater, ɔ: et Punkts Afstande fra Linierne $x = 0$ og $y = 0$, dividerede med dets Afstande fra en tredie Linie $z = 0$, og multiplicerede med vilkaarlige Konstanter. I begge Tilfælde kan man gjøre Ligningerne homogene ved for x og y at skrive $\frac{x}{z}$ og $\frac{y}{z}$. — Linierne x og y ere imaginære, hvis det nye Dobbeltpunkt er et isoleret Punkt; i saa Fald vil Ligning (II) ved Henførelse til reelle Axer gjennem samme Punkt beholde sin Form paa det nær, at xy ombyttes med et reelt Polynomium af anden Grad. Hvis selve det nye Dobbeltpunkt er imaginært, er ej blot x og y (eller dog en af disse Størrelser) imaginære, men ogsaa Punktet $x = 0$, $y = 0$. De nærmest liggende Kurver blive da imaginære, men selve Kurven α kan være reel (se Exemplet i 13). Dette vil ogsaa finde Sted, naar det nye Dobbeltpunkt er reelt, naar blot ψ indeholder imaginære Konstanter.

Det viser sig, at disse Koordinater, og dermed Afstandene fra O til de derved bestemte Punkter, i Almindelighed for lim. $k = 0$ blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$. De ville — idet vi forudsætte, at O er et reelt Punkt, og at ψ ikke indeholder imaginære Konstanter — gaa over fra at være reelle til at blive imaginære eller omvendt, naar k gjennem Nul skifter Fortegn, altsaa naar en foranderlig Kurve i Systemet passerer den særegne. Afstandene fra O til de Skjæringspunkter med $x = 0$ eller $y = 0$, der falde sammen med O for $k = 0$, blive derimod kun af Ordenen $\frac{1}{3}$, hvoraf — naar Dobbeltpunktet har reelle Grene — vil følge, at ét af dem er reelt, hvad enten $k \gtrless 0$. Selve Kurven α_0 vil derimod ikke skjære nogen nærliggende i noget Punkt, som for $k = 0$ falder i O, ligesom to nærliggende Kurver heller ikke skjære hinanden i et saadant Punkt. Man ser da, at, naar Dobbeltpunktets Grene ere reelle, det ene Par deraf dannede Topvinkler for $k > 0$, det andet for $k < 0$ vil indeholde Grene af en nærliggende Kurve, men at, naar Punktet O er et isoleret Punkt af Kurven α_0, en ovalformet Gren af en nærliggende Kurve vil omslutte O for k positiv (negativ), medens ingen reel Gren nærmer sig til O for k negativ (positiv).

Idet nu Afstandene fra O til de Punkter af Kurven (II), der for $k = 0$ falde sammen med O, i Almindelighed ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$ og aldrig af højere Orden, kan man slutte, at det samme maa være Tilfældet med Afstandene til to af Skjæringspunkterne med en Kurve, hvoraf en enkelt Gren gaar gjennem O uden at røre nogen af Axerne, med O's Afstande fra to af Tangenterne fra et Punkt, som ikke ligger paa nogen af Axerne, eller fra to saadanne Dobbelttangenter, som for $k = 0$ falde sammen i en Tangent fra O til Restkurven. Alt dette kunde man ogsaa finde ved en gjennemført analytisk Behandling.

Naar man paa sædvanlig Maade søger Røringspunkterne for Vendetangenterne til en Kurve i Systemet, finder man, at disse bestemmes som Skjæringspunkterne med en Kurve, (Hesse's Kurve[1]), hvis Ligning ogsaa bliver af Formen

$$xy + \varphi_3' + \varphi_4' \ldots + k\psi' = 0, \tag{IV}$$

hvor φ' og ψ' have samme Betydninger som φ og ψ i (II). Af Ligningerne (II) og (IV) kan man udlede, at de søgte Punkter ogsaa maa ligge paa Kurven

$$\varphi_3 - \varphi_3' + \varphi_4 - \varphi_4' + \ldots + k(\psi - \psi') = 0.$$

De Punkter af denne Kurve, som falde sammen med O for $k = 0$, have Afstande fra O, som ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{3}$ eller af en endnu lavere Orden, naar stedse k betragtes som uendelig lille af første Orden, og dette maa saaledes ogsaa være Tilfældet med Røringspunkterne for de Vendetangenter til (II), som for $k = 0$ falde sammen med Axerne, idet disse Røringspunkter have O til Grænsestilling. Disse Punkter maa da, ifølge det som før er sagt om Kurven (II), være saaledes bestemte, at enten lim. $\frac{x}{y} = 0$ eller

[1] Ligningen for Hesse's Kurver findes ved at gjøre Ligningen for den givne Kurve homogen og dernæst sætte Determinanten af dens anden Differentialkoefficienter lig Nul.

$\lim. \frac{y}{x} = 0$, og ifølge 9 maa hver af disse Bestemmelser give 3 Punkter. Vi skulle nøjere undersøge dem, for hvilke $\lim. \frac{y}{x} = 0$.

Disse Punkters Abscisser x maa, da $\lim. \frac{y}{x} = 0$, være af samme Orden som deres Afstande fra O, altsaa af Ordenen $\frac{1}{3}$ eller en lavere Orden. I sidste Tilfælde vilde x udviklet i Række efter Potenser af k begynde med et Led, hvis Exponent var mindre end $\frac{1}{3}$, og hvori Nævneren altsaa var større end 3. Følgelig fik allerede dette Led og altsaa hele Udtrykket for x mere end 3 Værdier, hvilket, som vi have sét, ikke vil være Tilfældet. De søgte Værdier af x blive altsaa af Ordenen $\frac{1}{3}$, og Rækkeudviklingen for x efter stigende Potenser af k vil begynde med et Led af Formen $A.k^{\frac{1}{3}}$, hvor A er en konstant Størrelse. Ligning (II) giver derefter en Rækkeudvikling for y, som begynder med $B.k^{\frac{2}{3}}$, hvor $B = -\frac{A}{a}$. Ligningerne for Tangenterne til Kurven (II) i de saaledes bestemte Punkter $(Ak^{\frac{1}{3}} + \ldots,\ Bk^{\frac{2}{3}} + \ldots)$ eller for de søgte Vendetangenter blive da af Formen

$$\left.\begin{array}{ll} & Xx + Yy + Z = 0, \\ \text{hvor} & X = Ck^{\frac{2}{3}} + \ldots,\ Y = Ak^{\frac{1}{3}} + \ldots,\ Z = Dk + \ldots, \end{array}\right\} \qquad \text{(V)}$$

idet C og D ere nye konstante Størrelser. De Rækkeudviklinger efter stigende Potenser af k, som man saaledes finder for X, Y, Z — Vendetangenternes Liniekoordinater — saavel som Rækkeudviklingerne for Røringspunkternes Koordinater x og y, ville kun indeholde Potenser med hel Exponent af $k^{\frac{1}{3}}$ og fuldstændig bestemte Koefficienter[1], da de ellers vilde bestemme mere end 3 Vendetangenter. Disse Rækkeudviklinger kunne bruges, saalænge k er lille nok til, at de ere konvergente. — Ligningerne (V) blive for $k = 0$ til $y = 0$, som altsaa er den Linie, hvori de tre Vendetangenter, hvis Røringspunkter bestemmes ved $\lim. \frac{y}{x} = 0$, falde sammen, medens de tre, hvis Røringspunkter bestemmes ved $\lim. \frac{x}{y} = 0$, falde sammen i $x = 0$.

Hvis nu det nye Dobbeltpunkt har reelle Grene (og ψ som før forudsættes reel), maa mindst den ene af de tre Vendetangenter, som nærme sig til Grænsen $y = 0$, være reel. Koefficienterne i Rækkerne maa altsaa være reelle — eller kunne gjøres reelle ved at trækkes sammen med Potenser af den imaginære Faktor til $\sqrt[3]{k}$, som indgaar i den Værdi af $k^{\frac{1}{3}}$, som giver den reelle Opløsning. Den reelle Vendetangent bliver da bestemt ved den reelle Værdi af $k^{\frac{1}{3}}$, medens de imaginære Værdier af $k^{\frac{1}{3}}$ give imaginære Opløsninger.

---

[1] Koefficienterne kunne godt være irrationale; men de Værdier, som netop svare til de tre Vendetangenter, vi her betragte, ville være fuldkommen bestemte.

Altsaa vil, saavel før som efterat k har passeret 0, kun den ene af de tre Vendetangenter være reel.

Ligningen (V) vil bestemme det System af rette Linier, som for tilstrækkelig smaa Værdier af k dannes af de Vendetangenter til Kurver φ i det givne System, der have $y = 0$ til Grænsestilling. Ved i denne Ligning at sætte $k^{\frac{1}{3}} = h$, faa vi Systemet saaledes bestemt, at hver Værdi af h kun giver én Linie i Systemet. Indhyllingskurven for dette System bliver en enkelt Gren af Indhyllingskurven (c') for Vendetangenterne til Systemets Kurver, som strækker sig til alle de Vendetangenter, for hvilke Rækkerne (V) ere konvergente. De tre Vendetangenter til en Kurve i Systemet, som have $y = 0$ til Grænsestilling, blive saaledes ikke Tangenter til forskjellige Grene af denne Indhyllingskurve, men kun forskjellige Tangenter til samme Gren. Dette vilde aabenbart være umuligt, naar alle tre vare reelle.

Det er altsaa kun en enkelt Gren af Indhyllingskurven for Vendetangenterne, der rører Linien $y = 0$, og man vil se, at $y = 0$ kun er en simpel Tangent til denne Gren. Benyttes nemlig Ligningen (V), der efter Bortforkortning af den fælles Faktor $k^{\frac{1}{3}} = h$ kan skrive:

$$(Ch + \ldots)x + (A + \ldots)y + (Dh^2 + \ldots) = 0,$$

til Bestemmelse af Vendetangenter gjennem Punktet $(x_1, 0)$, faas

$$Cx_1 h + Eh^2 + \ldots = 0,$$

som kun giver én Rod $h = 0$. Røringspunktet med Indhyllingskurven maa bestemmes ved den Værdi af x_1, for hvilken endnu en Værdi af h bliver 0, altsaa ved $x_1 = 0$, og bliver følgelig selve det nye Dobbeltpunkt O. — De her anførte Sætninger om Tangenten $y = 0$ i dette Dobbeltpunkt gjælde selvfølgelig ogsaa om $x = 0$.

Udtrykkene for Koordinaterne til Vendetangenternes Røringspunkter vise paa lignende Maade, at ogsaa Kurven (q') [se 3] har simpel Røring med det nye Dobbeltpunkts Grene. — Da Afstanden mellem saadanne to Dobbelttangenter til Kurven (II), som for $k = 0$ falde sammen i en Tangent fra O til Restkurven, ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$ ved O, men af første Orden ved Røringspunktet med Restkurven, kan man slutte, at saavel Kurven (b') som (p') rører Restkurven i dette sidste Punkt.

Allerede et System af Trediegradskurver uden særegne Punkter leverer Exempel paa Kurverne α_0. En Kurve i et saadant System har 9 Vendetangenter, af hvilke de 3 ere reelle, medens en Trediegradskurve med et Dobbeltpunkt med reelle Grene har 3 Vendetangenter, hvoraf 1 er reel. Af de 6 Vendetangenter, som gaa tabt ved Dannelsen af Dobbeltpunktet, vare altsaa de 2 reelle — i Overensstemmelse med det ovenfor udviklede. Er derimod Dobbeltpunktet paa Kurven α_0 et isoleret Punkt, ere de Vendetangenter, som tabes, imaginære, hvilket stemmer med, at en Trediegradskurve med isoleret Punkt har 3 reelle Vendetangenter[1].

---

[1] Man kan, som Plücker gjør det i andet Afsnit 64 af *Theorie der algebraischen Curven*, fra de her omtalte Egenskaber ved Kurver af tredie Orden slutte sig til Antallene af de reelle og imaginære Vendetangenter, som falde sammen paa en vilkaarlig Kurve α_0.

Paa Fig. 1 ere 1 og 3 to Kurver i et System, mellem hvilke 2 er en Overgangskurve α_0. Idet en Kurve i Systemet varierer fra 1 gjennem 2 til 3, ville to af Tangenterne fra P begynde med at være reelle, falde sammen i PO og dernæst blive imaginære. c'_2 er en af Tangenterne til 2 i Dobbeltpunktet O, c'_1 og c'_3 ere de reelle Vendetangenter til 1 og 3, der have c'_2 til Grænsestilling og røre den Gren af Vendetangenternes Indhyllingskurve, der i O rører c'_2.

At baade Kurven 1 og Kurven 3, naar de ligge tilstrækkelig nær ved 2, nødvendigvis begge maa have to reelle Vendetangenter, der nærme sig til Tangenterne til 2 i O, viser sig forøvrigt ved selve Tegningen af Figuren, idet disse Kurver i en vis Afstand fra O, vende Konkaviteten samme Vej som 2. Man ser da tillige, at de to reelle Vendetangenter røre samme Gren af den ene (her 1), men de forskjellige Grene af den anden (3).

Man kan ogsaa ved den blotte Figurbetragtning overbevise sig om, at ikke fler end én Vendetangent til 1 eller 3, som nærmer sig til en Tangent til 2 i O, er reel. Dette vil man se, naar man tager i Betragtning, at, da ingen ret Linie gjennem O skjærer Kurven 2 i mere end tre Punkter, som falde sammen i O, kan heller ingen med Kurven 1 forbunden ret Linie skjære denne Kurve i mere end tre Punkter, som falde sammen med O, samtidig med at 1 falder sammen med 2. Man vil nemlig ikke kunne faa flere reelle Vendetangenter til 1 end de alt angivne, uden at nogen af dem endnu skjærer Kurven i et Punkt, der ligesom Røringspunktet har O til Grænsestilling.

11. Fortsat Undersøgelse af Kurverne α_0(¹). — I 10 forudsattes det om Ligning (II)

$$xy + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots + k\psi = 0,$$

at ψ ikke blev 0 for $x = 0$, $y = 0$, $k = 0$. Vi skulle nu undersøge Systemet i det Tilfælde, hvor denne Forudsætning borttages, og hvor ψ altsaa ikke indeholder noget Led af 0'te Grad med Hensyn til x, y og k. I saa Fald faa navnlig Leddene af første Grad $ax + by + ck$ Betydning. Vi skulle nøjes med at behandle det Tilfælde, hvor i alt Fald $c \gtrless 0$.

Første Led i de Rækker, der bestemme de Skjæringspunkter med rette Linier gjennem O, som for $k = 0$ falde i O, findes ved Ligningen

$$xy + k(ax + by) + k^2c = 0, \tag{VI}$$

idet vi foreløbig ikke tage Hensyn til Skjæringspunkter med Axerne. Disse Punkters Afstande fra O blive altsaa for lim. $k = 0$ uendelig smaa af første Orden, hvoraf vil følge, at de enten ere reelle eller imaginære baade før og efter, at k har passeret Nul. Overgangen mellem de Linier, der have reelle, og dem, der have imaginære Skjæringspunkter, dannes af Linierne

$$4cxy = (ax + by)^2. \tag{VII}$$

Disse Linier, der blive Grænsestillinger for Tangenter fra O til den ved k bestemte Kurve,

(¹) Enkelte af de her i 11 behandlede Forhold ere undersøgte af Dr. J. Petersen i en Afhandling »Bidrag til Enveloppetheorien» i Tidsskrift for Mathematik 1872 S. 81.

blive Tangenter i O til Indhyllingskurven for Systemets Kurver, som altsaa faar et Dobbeltpunkt i O. (Man ser ogsaa let, at de faa den i 2 omtalte Egenskab ved Tangenter til Indhyllingskurven).

Ligning (VI) og den, som dannes deraf ved at ombytte k med k, kan ogsaa benyttes til Bestemmelse af første Led i Udtrykkene for Koordinaterne til de to Skjæringspunkter mellem to Kurver i Rækken, som for $k = 0$, $k_1 = 0$ falde i O.

Naar man i et Systems Fællesligning indsætter et givet Punkt (x, y), tjener den til Bestemmelse af de Værdier af k, som bestemme de Kurver i Systemet, som gaa gjennem (x, y). Ligning (VI) kan da benyttes til Bestemmelse af Leddene af første Grad i Rækkeudviklingerne af Udtrykkene for de Værdier af k, som nærme sig til Nul, samtidig med at Punktet (x, y) nærmer sig til O. Man finder to saadanne Udtryk. Ligning (VII) bliver, som man maatte vente, Betingelsen for, at disse første Led skulle blive ligestore.

Ligning (VI) kan kun bruges ved Bestemmelser af det ene Skjæringspunkt med en af Axerne, idet den f. Ex. for $y = 0$ kun giver $x = -k\frac{c}{a} + \ldots$; for at bestemme flere Skjæringspunkter maa man endnu medtage Leddet φ_3, hvorved endnu faas to Abscisser, som blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$.

Idet de Led i Ligningen for Hesse's Kurve, som ere af lavere end tredie Orden med Hensyn til x, y og k, ere

$$xy + k(ax + by) + k^2c',$$

hvor blot c' er en ny Konstant, ville Røringspunkterne for de Vendetangenter, som falde sammen med $y = 0$ for $k = 0$, bestemmes ved $x = Ak^{\frac{2}{3}} + \ldots$, $y = -ak + \ldots$; Kurven (q') vil saaledes have en Spids i Punktet O; Tangenten bliver $y = 0$. — Ligningen for en af Vendetangenterne bliver efter Bortforkortning af $k^{\frac{2}{3}}$

$$(Ck^{\frac{2}{3}} + \ldots)x + (A + \ldots)y + aAk + \ldots = 0,$$

som viser, at Linien $y = 0$ i O er en Vendetangent til Vendetangenternes Indhyllingskurve (c'). — En Tangent fra O til Restkurven bliver her en Dobbelttangent til Dobbelttangenternes Indhyllingskurve (b'), og i Almindelighed vil intet af dens Røringspunkter med (b') falde i Røringspunktet med Restkurven.

Systemets Udseende, naar selve Punktet O er reelt, og naar ψ er reel, fremgaar let af de her udledte Egenskaber. Hvis Punktet O er et isoleret Punkt paa Indhyllingskurven (Linierne (VII) imaginære), ville i (VI) alle reelle Værdier af $\frac{y}{x}$ enten give lutter reelle eller lutter imaginære Værdier af $\frac{x}{k}$. Er da Punktet O ogsaa et isoleret Punkt paa Kurven α_0 (i hvilket Tilfælde Ligningen, naar den gjøres reel ved Henførelse til reelle Axer gjennem O, beholder sin Form paa det nær, at xy ombyttes med et stedse positivt Polynom af anden Grad), maa de nærmest O liggende Grene af Systemets Kurver enten (for $c > 0$) alle være imaginære eller ($c < 0$) alle være Ovaler, der omslute O (Fig. 2), og blandt hvilke de, der svare til positive k, helt omslutte hverandre, og de, der svare til negative k, gjøre det samme. Har derimod Kurven α_0 reelle Grene gjennem O, maa dette Punkt ligge paa samme Side af begge Grene af en nærliggende Kurve. Fig. 3.

Ere Indhyllingskurvens Grene reelle, men Kurven α_0's Grene imaginære, faas en Række Ovaler, der røre Indhyllingskurvens Grene og for $k = 0$ svinde ind til Punktet O Fig. 4. Hvis derimod ogsaa Kurven α_0's Grene ere reelle, viser Ligning (VII), at begge Indhyllingskurvens Grene falde i det samme Par Topvinkler dannede af α_0's Grene, da de to Værdier af $\frac{y}{x}$ begge ere $\gtrless 0$, eftersom $c \gtrless 0$. Det samme opdager man let ved at forsøge at danne en Tegning. Fig. 5 forestiller et saadant System, hvor a er Indhyllingskurven og 2 er Grænsekurven α_0.

Paa Fig. 3 og 5 er c'_2 en Vendetangent til Vendetangenternes Indhyllingskurve, c'_1 og c'_3 nærliggende Stillinger af Tangenter til denne Kurve.

Ligning (VI) viste os, at der i det her undersøgte System gjennem et Punkt (x, y), som nærmer sig til at falde sammen med O, gaar to Kurver, som nærme sig til Grænsekurven α_0, medens man i det i 10 undersogte System kun finder én saadan. Idet Tangenterne i Dobbeltpunktet $x = 0$ $y = 0$ her i 11 ere Vendetangenter til Vendetangenternes Indhyllingskurve, ses det ogsaa, at to Kurver i Systemet, som nærme sig til Grænsekurven, ville være bestemte ved, at en Vendetangent skal gaa gjennem et Punkt, som nærmer sig til en af disse Linier; i Systemet i 10 vare disse derimod simple Tangenter til Vendetangenternes Indhyllingskurve, og den anførte Opgave fik kun én Opløsning. En ret Linie, der nærmer sig til at gaa gjennem O, vil i det her betragtede System røre to Kurver, der nærme sig til Grænsekurven, i Systemet i 10 kun én. Overhovedet vil man, naar Bestemmelsen af saadanne Kurver i de her i 11 og i 10 undersøgte Systemer, der for $k = 0$ falde sammen med Grænsekurven α_0, beror paa de Led, som ere angivne i (VI) og (III), eller i alt Fald paa Led af Systemets Ligning, der som disse hæve sig henholdsvis til anden og første Grad med Hensyn til k, faa dobbelt saamange Opløsninger for det i 11 behandlede System som for det i 10 behandlede. Idet vi nu ved Dannelsen af vore Formler (andet Afsnit) kun faa med saadanne Bestemmelser at gjøre, behøve vi ikke særskilte Navne for Antallene af de særegne Kurver, til hvilke Systemernes Kurver dog nærme sig paa forskjellig Maade; men vi kunne indbefatte dem alle i Antallet α_0, saaledes at en særegen Kurve af den i 10 beskrevne Art (fremstillet ved den almindelige Ligning (II)) tælles én Gang i dette Tal, men en særegen Kurve af den her i 11 beskrevne Art (fremstillet ved en Ligning (II), i hvilken $x = 0$, $y = 0$, $k = 0$ gjør $\psi = 0$) tælles to Gange. Derfor maa man ikke tro, at to paa hinanden følgende Kurver i Systemet falde sammen i de sidst omtalte Kurver. Dette er kun Tilfældet, naar k er Faktor i ψ (se 2). — Til de Systemer, der dannes ved den yderligere Specialisation af Ligning (II), som fremkommer ved, at Koefficienten c til k i ψ bliver Nul, vil der kunne tages Hensyn ved at indbefatte deres ved $k = 0$ bestemte særegne Kurver 3, 4 . . Gange i α_0, hvorved vore Formler ogsaa blive anvendelige paa dem. (Smlgn. Undersogelsen af Kurver med Mangefoldsgrene i tredie Afsnit).

12. Kurverne α_0's Forekomst i elementære Systemer. — Naar man i et System finder en Kurve med et nyt Dobbeltpunkt og dernæst vælger Koordinatsystemet og bestemmer Parameteren k saaledes som antaget i 10 og 2, vil Fællesligningen for Systemets Kurver antage Formen (II), hvor i Almindelighed $x = 0$, $y = 0$, $k = 0$ ikke gjør $\psi = 0$. Det kunde da synes, som om et System i Almindelighed ikke vilde indeholde saadanne særegne Kurver α_0, til hvilke Systemets Kurver nærme sig paa den Maade, der er beskreven i 11. Dette vil dog være Tilfældet med ethvert System, til hvis givne Betingelser hører den at skulle røre en given Kurve. Man kan nemlig finde en Kurve, som tilfredsstiller Systemets øvrige Betingelser, men i Stedet for at røre den givne Kurve har et nyt Dobbeltpunkt beliggende paa denne. Da det nye Dobbeltpunkt er et dobbelt Toppunkt, vil denne Kurve nemlig ogsaa tilfredsstille den Betingelse at røre den givne Kurve. Ligeledes vil der til et System af Kurver, som blandt andet skulle røre to givne Kurver, høre saadanne hvor de nævnte to Betingelser ere opfyldte ved, at de have nye Dobbeltpunkter i et Skjæringspunkt mellem de givne Kurver. I begge de her nævnte Tilfælde gaar Kurvesystemets Indhyllingskurve gjennem de nye Dobbeltpunkter, hvilket kun da er Tilfældet med Systemet (II), naar som i 11 $x = 0$, $y = 0$, $k = 0$ gjør $\psi = 0$. At vi ogsaa her, hvor vi hovedsagelig beskjæftige os med «sædvanlige» Særegenheder (se 4), maa tage Hensyn til de her anførte Tilfælde, er klart; thi de indtræde i alle saadanne elementære Systemer, hvor mindst én eller to Tangenter til Systemets Kurver ere givne.

Naar nu et System indeholder en Kurve, der i Stedet for at røre en given Kurve C har et nyt Dobbeltpunkt beliggende paa denne, og man vælger Koordinatsystemet som i 10—11, bliver Ligningen altsaa en saadan Ligning af Formen (II), som ikke indeholder Led af lavere end anden Grad med Hensyn til x, y og k. Tangenten til Kurven C i Begyndelsespunktet bliver en af Tangenterne til Systemets Indhyllingskurve i dette Punkt, hvilke bestemtes ved (VII). Er nu (x_1, y_1) et vilkaarligt Punkt af denne Tangent, kan Konstanten c i Ligning (VI), der indeholder Leddene af anden Grad i Systemets Ligning, udtrykkes ved Konstanterne a og b ved

$$4 c x_1 y_1 = (a x_1 + b y_1)^2.$$

Hvis det nye Dobbeltpunkt ligger paa to af de Kurver, som Systemets Kurver skulle røre, kjender man begge Tangenter til Indhyllingskurven i Punktet O, hvorved endnu faas Ligningen

$$4 c x_2 y_2 = (a x_2 + b y_2)^2.$$

Disse to Ligninger give to Værdier for $\frac{a}{b}$ og svarende til hver af disse én Værdi af c. (De absolute Værdier af a og b ere ligegyldige, da Systemet ikke forandres, ved at k multipliceres med en af k uafhængig Konstant). Den Omstændighed, at der kommer to Opløsninger, viser, at en Kurve, som har et nyt Dobbeltpunkt i Skjæringspunktet

mellem to Kurver, som Systemets Kurver skulle røre, og som tilfredsstiller Systemets øvrige Betingelser, forekommer to Gange i Systemet. Da man faar en dobbelt Bestemmelse af Koefficienterne i Systemets Ligning, kunde det se ud, som om selve Systemet delte sig i to indbyrdes uafhængige Systemer. Men herved maa erindres, at man ved at bringe Systemets Ligning paa Formen (II) tillige kræver, at den særegne Kurve skal svare til Værdien $k = 0$. Naar nu de to sammenfaldende særegne Kurver, vi her betragte, ikke kunne bringes til at svare til samme Værdi af k, er det klart, at Ligningen maa blive forskjellig, eftersom man vil, at den ene eller den anden af de to Kurver skal svare til $k = 0$. Vælges den Ligning, hvor $k = 0$ bestemmer den ene af de sammenfaldende særegne Kurver, vil den anden bestemmes ved en fra Nul forskjellig Værdi af k.

Da man i Almindelighed gjennem de her anførte Bestemmelser faar endelige Værdier af c, viser det sig, at de her betragtede Grænsekurver virkelig i Almindelighed henhøre til dem, som vi nøjere have undersøgt i 11, og som skulde tælles to Gange med i α_0. Vi se da, at en Kurve i Systemet med et nyt Dobbeltpunkt paa en given Kurve, som Systemets Kurver skulle røre, maa tælles to Gange med i α_0, og en Kurve med et nyt Dobbeltpunkt i et Skjæringspunkt mellem to saadanne givne Kurver maa tælles fire Gange med i α_0, idet en saadan Kurve ifølge ovenstaaende Bestemmelse forekommer en eller to Gange i Systemet. I specielle Tilfælde kunne naturligvis Systemets øvrige Betingelser, deriblandt Formen i O af den eller de Kurver, som den særegne Kurve skal røre i O, bevirke, at samme særegne Kurve forekommer endnu flere Gange.

13. Nærmere Undersøgelse af Kurverne α_1 og α_2. — Ligningen for en Kurve, der til Grænseform har en Kurve α_1 eller α_2, vil ogsaa være indbefattet i Formen (II) i 10 og 11, idet blot $y = 0$ eller $x = 0$ eller begge disse Linier skulle udgjøre Dele af Grænsekurven. Antage vi, at dette er Tilfældet med $y = 0$, maa y være Faktor i φ_3, φ_4, ..., saa Ligningen ogsaa maa kunne skrives

$$y(x + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots) + k\psi = 0. \tag{VIII}$$

Det ses imidlertid, at en saadan Ligning i Almindelighed vilde fremstille en Række Kurver, hvori den særegne Kurve $k = 0$ havde flere nye Dobbeltpunkter, nemlig alle de $n-1$ Skjæringspunkter mellem $y = 0$ og $x + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots = 0$. Da nu dette ikke skal være Tilfældet, men de $n-2$ af disse Punkter, som ikke falde i O, blot skulle være specielle Stillinger af saadanne Dobbeltpunkter, som tilhøre alle Systemets Kurver, indses det, at de nævnte $n-2$ Punkter maa være Skjæringspunkter med den konsekutive Kurve og altsaa

ogsaa maa tilfredsstille Ligningen [1] $\psi^{(0)} = 0$, hvor $\psi^{(0)}$ er den Funktion, som dannes ved i ψ at sætte $k = 0$. De to andre Punkter, hvori $\psi^{(0)} = 0$ skjæres af $y = 0$, maa være Røringspunkter mellem den særegne Kurve α_1 eller α_2 og Indhyllingskurven for Systemets Kurver. Naar Systemets Indhyllingskurve ikke gaar gjennem Begyndelsespunktet O, blive altsaa de retliniede Grene af Kurverne α_1 og α_2 Dobbelttangenter til Indhyllingskurven for Systemets Kurver.

Skal Systemets Indhyllingskurve gaa gjennem O, vil et af de $n-1$ Skjæringspunkter mellem $y = 0$ og $\psi^{(0)} = 0$ falde i O. Dette Punkt, som ikke er et af de $n-2$ Dobbeltpunkter, kan da være et af de to Punkter af den retliniede Gren $y = 0$, i hvilke den særegne Kurve α_1 eller α_2 rører Indhyllingskurven, og $y = 0$ indeholder da endnu kun ét saadant Punkt og vil saaledes foruden at gaa gjennem Indhyllingskurvens Dobbeltpunkt O kun røre den én Gang. Men Punktet O kan ogsaa være et nyt $(n + 1)$te Punkt, som $y = 0$ faar fælles med Kurven $\psi^{(0)} = 0$, som er af n'te Grad, og som altsaa helt indeholder denne rette Linie. I dette Tilfælde bliver $y = 0$ selv en af de to Grene af Systemets Indhyllingskurve, som gaa gjennem O. Endog de elementære Systemer levere Exempler paa begge de her nævnte to Tilfælde.

Da Ligning (VIII) er indbefattet i Ligning (II), kan man forøvrigt paa de Kurver i et System, som nærme sig til at falde sammen med en Kurve α_1 eller α_2, overføre alle de Egenskaber, som vi i 10—12 have fundet ved de Kurver, der nærme sig til at falde sammen med en Kurve α_0, forsaavidt de blot ikke særligt vedkomme Forbindelsen med Linier, der for $k = 0$ falde sammen med en retliniet Gren af Kurven α_1 eller α_2. Man finder saaledes, naar $x = 0$, $y = 0$, $k = 0$ ikke gjøre $\psi = 0$, at O's Afstand fra den Kurve, der svarer til en uendelig lille Værdi af k, er uendelig lille af Ordenen $\frac{1}{2}$, at en Tangent fra O til Restkurven er en enkelt Tangent til Kurven (b') og Kurven (p') og rører dem i Røringspunktet med Restkurven, samt at Linien $x = 0$, hvis den ikke ogsaa er en retliniet Gren af Grænsekurven (Kurverne α_1), vil have simpel Røring med Kurverne (c') og (q') i Punktet O o. s. v. Derimod vide vi forud, at ingen Vendetangent falder i Linien $y = 0$.

Exempler paa α_1 haves i Systemer af Kurver af tredie Orden med ét Dobbeltpunkt: kommer et nyt til, faas en Kurve sammensat af et Keglesnit og en ret Linie. Hvis denne skjærer Keglesnittet i reelle Punkter, er baade det gamle og det nye Dobbeltpunkt reelle, og tre Vendetangenter ere gaaede tabt, hvoraf den ene er

---

[1] Det synes underligt, at Ligningen for en Kurve α_1 eller α_2 forekommer som specielt Tilfælde af Ligningen for en usædvanlig særegen Kurve; men derved maa erindres, at Punktligningens almindeligste Form fremstiller en Kurve uden særegne Punkter. Iblandt saadanne Kurver vilde ganske vist Kurverne α_1 og α_2 være mindre sædvanlige (ɔ: afhænge af flere Betingelsesligninger), end de Kurver, som i Almindelighed fremkomme som Grænsefigurer for Systemer fremstillede ved Ligninger af Formen (VIII). Her betragte vi derimod Systemer, som vi paa Forhaand tillægge $d + e$ særegne Punkter. — Af denne og lignende Grunde ville vi ofte finde algebraiske Fremstillinger af mere sædvanlige særegne Kurver specielt indbefattede i Fremstillingen af mindre sædvanlige.

reel. Hvis den rette Linie derimod ikke skjærer Keglesnittet, ere begge Dobbeltpunkter imaginære. Selve Kurven α_1 kan da være reel, medens de nærmest liggende Kurver, der have et enkelt imaginært Dobbeltpunkt, maa være imaginære. Kurven α_1 bliver da en isoleret Kurve (se 1ste Note til 10). Ved i Fig. 1, 3 og 5 at ombytte den ene Gren af Kurven 2 med en ret Linie (se Fig. 6, som svarer til Fig. 1) faas Kurver α_1. Det ses da, at i saa Fald Kurverne 1 og 3 ikke have nogen reel Vendetangent, som nærmer sig til at røre denne retliniede Gren i O.

Keglesnit, der opløses i to rette Linier, give Exempler paa Kurverne α_2. Skulle Keglesnittene i et System røre fire Kurver C_1, C_2, C_3, C_4, vil Systemet indeholde et Keglesnit sammensat af en Fællestangent til C_1 og C_2 og en Tangent fra dennes Skjæringspunkt med C_4 til C_3. Indhyllingskurven vil have et Dobbeltpunkt i dette Keglesnits Dobbeltpunkt. C_4 bliver den ene af de Grene af Indhyllingskurven, som gaa dergjennem. Den anden Gren bliver selve Fællestangenten til C_1 og C_2, da man allerede om denne véd, at den skal røre Indhyllingskurven i sine Røringspunkter med C_1 og C_2, hvorved denne rette Linie faar tre Punkter fælles med det konsekutive Keglesnit i Systemet. Tangenten til C_3 rører derimod kun Indhyllingskurven i sit Røringspunkt med C_3. De to Grene af denne Kurve α_2 levere derved Exempler paa begge de ovenfor beskrevne Tilfælde. Hvis C_1, C_2 og C_3 ere Punkter, C_4 en ret Linie, er Systemet elementært.

14. Kurverne α'. — Af Kurverne α's Egenskaber udleder man ved Dualitetsprincipet Egenskaberne ved Kurverne α', som kunne fremstilles ved de samme Ligninger, idet blot Punktkoordinater saa maa ombyttes med Liniekoordinater. Hvis den dobbelte retliniede Gren ikke skal røre Indhyllingskurven, vil i Systemets Ligning — naar den bringes paa Formen (II) ved at tage den nye Dobbelttangents Røringspunkter til Vinkelspidserne $x = 0$, $y = 0$ i Koordinattrekanten — Størrelsen ψ indeholde et af x, y og k uafhængigt endeligt Led som i 10; i modsat Fald maa dette Led blive Nul, og da vil den nye Dobbelttangent ogsaa blive Dobbelttangent til Indhyllingskurven, svarende til 11. I første Tilfælde er Afstanden mellem de sammenfaldende Grene for lim. $k = 0$ af Ordenen $\frac{1}{2}$, og disse Grene ville altsaa for $k > 0$ blive imaginære langs de Strækninger af Dobbelttangenten til Kurven α', hvor de vare reelle for $k < 0$, og omvendt. I andet Tilfælde derimod er Afstanden af første Orden og vedbliver altsaa for $k > 0$ at være reel langs de samme Strækninger, hvor den forud var reel. Overgangen mellem de reelle og imaginære Strækninger sker dels gjennem Røringspunkter med Restkurven ($\alpha_0{}'$ og $\alpha_1{}'$) dels gjennem Toppunkter ($\alpha_1{}'$ og $\alpha_2{}'$). I et Røringspunkt med Restkurven falde tre Spidser sammen, hvoraf dog kun den ene er reel. Den nye Dobbelttangent rører i sit Røringspunkt med Restkurven det geometriske Sted for Spidserne, Kurven (c), og denne Kurve har i det Tilfælde, hvor Dobbelttangenten rører Indhyllingskurven, en Spids i det anførte Punkt o. s. v.

Hver af de Kurver, hvor Afstanden mellem Grenene er af Ordenen $\frac{1}{2}$, regnes én Gang med i Tallet α', og hver af dem, hvor den er af Ordenen 1 regnes to Gange. Dette sidste bliver saaledes Tilfældet med saadanne særegne Kurver, hvor den nye Dobbelttangent rører en given Kurve, som Systemets Kurver skulle røre, eller specielt gaar gjennem et Punkt, hvorigjennem de skulle gaa. Rører den nye Dobbelttangent to saadanne Kurver,

forekommer den særegne Kurve to Gange i Systemet og tælles hver Gang som to i Tallet α'. Ialt tælles den saaledes som fire (se 12).

I 41 o. f. vil der blive vist en Fremstilling af Kurverne α' ved Punktkoordinater. De der anvendte Ligninger kunne ogsaa benyttes til Fremstilling af Kurverne α ved Liniekoordinater.

I Fig. 7 er 2 en saadan Overgangskurve α_1' mellem Kurverne 1 og 3, hvor den nye Dobbelttangent ikke rører Indhyllingskurven. Overgangen mellem de Dele af Dobbeltlinien af 2, hvortil der nærmer sig reelle og imaginære Grene enten af Kurven 1 eller af Kurven 3, sker dels gjennem Toppunktet a_2 dels gjennem Røringspunktet med Restkurven c_2. Figuren gjør det anskueligt, at a_2 virkelig maa være et Dobbeltpunkt paa Indhyllingskurven (smlgn 13). Paa denne Figur faar det reelle Grene. Læseren vil anskueliggjøre sig mange af de her omtalte Forhold ved Tegningen af en Kurve α_1', hvis Dobbeltlinie rører Systemets Indhyllingskurve, samt af nærliggende Kurver.

Kurverne α ville, naar de betragtes som Tangentdannelser, og Kurverne α', naar de betragtes som Punktdannelser høre med til Kurver med Dobbeltgrene, idet de første have et dobbelt Toppunkt og de sidste en retliniet Gren. Derimod have Kurverne α og α' ikke Dobbeltgrene, naar de henholdsvis betragtes som Punkt- og Tangentdannelser. Af denne Grund støde vi allerede paa dem her, hvor vi dog beskjæftige os med særegne Kurver uden Mangefoldsgrene.

15. Kurverne β og β'. — Tavlen i 8 viser, at en Kurve β betragtet som Tangentdannelse er sammensat af Restkurven og et Toppunkt, der falder i den nye Spids, der er dannet af et blandt de d Dobbeltpunkter. De n'—4 Tangenter fra dette Toppunkt til Restkurven ere Dobbelttangenter til den fuldstændige Kurve, og i Tangenten i selve Spidsen falde to af dennes Vendetangenter sammen.

En Kurve β' er, betragtet som Punktdannelse, sammensat af Restkurven og en ret Linie, der falder i den nye Vendetangent. Dennes Skjæringspunkter med Restkurven ere Dobbeltpunkter, og i Vendepunktet falde to Spidser sammen.

En Kurve β med Spids i Begyndelsespunktet og Linien $y = 0$ til Tangent i dette Punkt fremstilles ved Ligningen

$$y^2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \dots = 0.$$

Hvis det Dobbeltpunkt, som er gaaet over til en Spids, ligger fast, maa Systemets Ligning være af Formen

$$y^2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \dots + k(\psi_2 + \psi_3 + \dots) = 0, \qquad \text{(IX)}$$

hvor ψ_2, ψ_3 ... ere Funktioner af x, y og k, som ere af anden, tredie ... Grad med Hensyn til x og y. Naar derimod det Dobbeltpunkt, som gaar over til en Spids, bevæger sig, maa man i Ligning (IX) ombytte x og y med $x + f(k)$ og $y + g(k)$; hvor f og g betegne Funktioner af k, der blive Nul for $k = 0$. Udviklede efter stigende Potenser af

k, maa de fremdeles give lutter hele Exponenter, da den ved en lille Værdi af k bestemte Kurve ellers vilde faa flere Dobbeltpunkter, der for $k = 0$ faldt i Begyndelsespunktet. Andre Betingelser ere disse Rækker ikke underkastede. Man har da

$$f(k) = a_1 k + a_2 k^2 + \ldots, \quad g(k) = b_1 k + b_2 k^2 + \ldots,$$

som i Almindelighed blive uendelig smaa af første Orden for lim. $k = 0$. Ligning (IX) vil da omdannes til en Ligning af Formen

$$y^2 + 2b_1 ky + b_1{}^2 k^2 + 2b_2 k^2 y + 2b_1 b_2 k^3 + \varphi_3(x + a_1 k, y + b_1 k) \\ + k\psi_2(x + a_1 k, y + b_1 k) + \chi = 0, \quad \text{(X)}$$

hvor φ_3 og ψ_2 ere Funktioner af tredie og anden Grad (ψ_2 den, der dannes ved at sætte $k = 0$ i ψ_2 i (IX), medens φ_3 er den samme som i (IX)), og hvor χ er en Funktion af x, y og k, som ikke indeholder Led, som ere af lavere end fjerde Grad med Hensyn til disse Størrelser. (Det ses let, at denne Egenskab ved χ er nødvendig, men ikke tilstrækkelig).

Ligning (X) giver, at en ret Linie gjennem Begyndelsespunktet $\left(\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}\right)$, vil skjære den ved k bestemte Kurve i Systemet i to Punkter, hvis Afstande fra O blive uendelig smaa af første Orden. Første Led af begge disse Skjæringspunkters Ordinater bliver $y = -b_1 k$. Ved Bestemmelsen af andet Led maa man tage Leddene af tredie Orden i (X) med. Man finder da

$$y = -b_1 k \pm \sqrt{-(\varphi_3 + k\psi_2)},$$

hvor man i φ_3 og ψ_2 for x skal sætte $\frac{x_1}{y_1} y$ og derefter for y sætte $-b_1 k$. Andet Led, og dermed Differensen mellem de to Skjæringspunkters Afstande fra O, bliver saaledes af Ordenen $\frac{3}{2}$, medmindre $x : y$ er saaledes bestemt, at Størrelsen under Rodtegnet bliver Nul ved de anførte Indsættelser eller ved at sætte $k = -\frac{y}{b_1}$. De rette Linier, med hvilke dette er Tilfældet, fremstilles ved Ligningen

$$\varphi_3(b_1 x - a_1 y, 0) - y\psi_2(b_1 x - a_1 y, 0) = 0.$$

Leddene indeholde den fælles Faktor $(b_1 x - a_1 y)^2$, som bestemmer Tangenten til den Gren af det geometriske Sted for Dobbeltpunkterne, Kurven (b), som gaar gjennem Punktet. Efter Bortskaffelse af denne Faktor bliver tilbage en Faktor af første Grad, som bestemmer Tangenten til en enkelt Gren af Indhyllingskurven, som gaar gjennem O.

Ved de fleste Undersøgelser er det forøvrigt bekvemmere at bruge Ligning (IX) end Ligning (X), idet man saa blot maa erindre, at den undersøgte Kurve samtidig med den ved (IX) udtrykte Forandring underkastes en Forskydning, der for lim. $k = 0$ er uendelig lille af første Orden. Ligning (IX) viser, at Tangenterne i Dobbeltpunktet paa den ved k

bestemte Kurve for lim. $k=0$ ville danne Vinkler, som ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$, saavel indbyrdes som med Linien $y=0$, og at det samme bliver Tilfældet med de Vendetangenter, som nærme sig til $y=0$. Disse bestemmes lettest ved af (IX) at danne Ligningen $\frac{d^2 y}{d x^2}=0$. Disse Omstændigheder, paa hvilke Kurvens og dermed de omtalte Tangenters samtidige Bevægelse ingen Forandring gjør, ville bevirke, at Kurverne (p) og (c') (se 3) have simpel Røring med $y=0$ i Punktet O.

Ligning (IX) viser, at Afstandene fra O til Vendetangenternes Røringspunkter blive uendelig smaa af første Orden, naar det særegne Punkt ligger fast i O. Sammensættes disse Afstande med det særegne Punkts Bevægelse, faas paany uendelig smaa Størrelser af første Orden. Derimod bliver den indbyrdes Afstand mellem Vendetangenternes Røringspunkter uendelig lille af Ordenen $\frac{3}{2}$. Heraf følger, at Kurven (q') faar en Spids i Punktet O. — Idet de forskjellige her omtalte Punktpar eller Liniepar afhænge af Størrelser, i hvis Rækkeudviklinger $k^{\frac{1}{2}}$ maa indgaa, ville de gaa over fra reelle til imaginære eller omvendt, naar k skifter Fortegn, saafremt ellers det særegne Punkt er reelt og Funktionerne ψ ere reelle.

Dualitetsprincipet giver Egenskaberne ved Kurverne β', der kunne fremstilles ved de samme Ligninger, idet da blot Punktkoordinater maa ombyttes med Liniekoordinater.

Paa Fig. 8 betegner 2 en Overgangskurve β mellem 1 og 3. Dobbeltpunket b_1 paa 1 har reelle Grene; men b_3 er et isoleret Punkt paa 3. Derimod ere de to Vendetangenter c_3' reelle paa Kurven 3. At det altid maa være Kurven med isoleret Punkt, paa hvilken de to Vendetangenter, der nærme sig til at falde sammen, ere reelle, viser sig ved Tegning af Figuren, men kan naturligvis ogsaa bevises analytisk. Det er ogsaa bekjendt, at af de tre Vendetangenter til en Kurve af tredie Orden med Dobbeltpunkt er kun en reel, naar Dobbeltpunktet har reelle Grene, men alle tre, naar det er et isoleret Punkt. a er Systemets Indhyllingskurve, b_1 b_2 b_3 det geometriske Sted (b) for Dobbeltpunkter, c_2' og de to Linier c_3' tre Tangenter til Vendetangenternes Indhyllingskurve; c_2' er den midterste af disse tre Tangenter.

Paa Fig. 9 er 2 en Overgangskurve β' mellem 1 og 3. b_1' og b_3' ere Dobbelttangenter til 1 og 3 henholdsvis med reelle og imaginære Røringspunkter. (a) og (b') ere Punkter af Systemets Indhyllingskurve og Dobbelttangenternes Indhyllingskurve. Kurven c_3 c_2 c_3 er det geometriske Sted for Spidserne.

16. Kurverne γ_0 og γ_0'. — Tavlen i 8 viser, at en Kurve γ_0, naar den betragtes som Tangentfrembringelse, er sammensat af Restkurven og et Toppunkt, som maa falde i den Spids, der er gaaet over til et Røringspunkt mellem to Grene. De $n'-5$ Tangenter fra dette Punkt til Restkurven ere Dobbelttangenter til den fuldstændige Kurve γ_0. Naar nu Restkurven har $d'-n'+7$ Dobbelttangenter, maa dette bero paa, at den har faaet to nye Dobbelttangenter. Det har den ogsaa virkelig, idet de to Dobbelttangenter, som falde sammen i Fællestangenten til de to Grene, der røre hinanden (se 18), ikke ere Grænsestillinger for Dobbelttangenter til en foranderlig Kurve i Systemet. Denne Fælles-

tangent maa derimod være Grænsestillingen for de fire Vendetangenter, som Restkurven har mindre end en fuldstændig Kurve i Systemet.

En Kurve γ_0' vil, naar den betragtes som Punktfrembringelse, være sammensat af Restkurven og dennes Tangent i Røringspunktet mellem to af dens Grene. Den fuldstændige Kurve har denne Linies Skjæringspunkter med Restkurven til Dobbeltpunkter og har fire sammenfaldende Spidser i Røringspunktet.

Hvis den Spids, der paa en Kurve γ_0 bliver til et Røringspunkt mellem to Grene, ligger fast saavelsom Tangenten i denne Spids, og man tager Spidsen og Tangenten til Begyndelsespunkt og Linie $y = 0$, bliver Systemets Ligning

$$y^2 + y\varphi_2 + \varphi_4 + \ldots + k(y^2 + \psi_3 + \psi_4 + \ldots) = 0, \tag{XI}$$

hvor φ betegner Funktioner alene af x og y, ψ af x, y og k, Mærketallene Graderne med Hensyn til x og y.

Denne samme Ligning vil da tjene til at henføre et almindeligt System til et bevægeligt Koordinatsystem. For at faa det henført til et fast Koordinatsystem, maatte man ombytte x og y med de lineære Funktioner $ax + by + c$ og $a_1x + b_1y + c_1$, hvor a, b, c, a_1, b_1, c_1 ere Funktioner af k, blandt hvilke a og b_1 blive 1 for $k = 0$, medens de andre for lim. $k = 0$ blive uendelig smaa af første Orden (smlgn. 15). I de fleste Undersøgelser vil det imidlertid være bekvemmest at bruge det bevægelige Koordinatsystem og altsaa Ligning (XI).

Man finder, at en ret Linie gjennem Kurven γ_0's særegne Punkt O — hvis Ligning i det faste Koordinatsystem er $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$, men som ved den modsatte Koordinatændring af den ovenfor angivne kan henføres til samme bevægelige Koordinatsystem, hvortil Kurvesystemet henføres ved Ligning (XI) — i Almindelighed skjærer en nærliggende Kurve i to Punkter, hvis Afstande fra O ere uendelig smaa af første Orden, medens disse Afstandes Differens er af anden Orden. Denne vil reduceres til Ordenen $\frac{5}{2}$, naar den rette Linie gjennem O rører den Gren af Kurven (c) (geometrisk Sted for Spidser), som gaar gjennem dette Punkt, og for endnu en Værdi af $x_1 : y_1$. Denne sidste bestemmer Tangenten til en Gren af Systemets Indhyllingskurve, som gaar gjennem Punktet O.

Røringspunkterne for Vendetangenterne ville, naar Koordinatsystemet i (XI) er fast, i Almindelighed have Afstande fra O og indbyrdes, som blive uendelig smaa af første Orden, naar lim. $k = 0$. Det samme bliver da Tilfældet, naar Systemet bevæger sig, saa hvert af disse Punkter giver sin Gren af Kurven (q') gjennem Punktet O. Kurven (q') har saaledes fire forskjellige Grene gjennem O. — Ligeledes blive Vendetangenternes Vinkler uendelig smaa af første Orden samtidig med, at disse Linier faa Afstande fra O, som ere uendelig smaa af første Orden. Tangenten til Kurven γ_0, i dens særegne Punkt O

rører saaledes Vendetangenternes Indhyllingskurve (c') i fire Punkter, af hvilke i Almindelighed ikke noget falder i O. De Vendetangenter, der ere reelle for $k < 0$, vedblive at være det, naar $k > 0$.

Dualitetsprincipet giver de tilsvarende Egenskaber ved Kurverne γ_0''s nærliggende Kurver.

Paa Fig. 10, 11, 12 fremstiller 2 tre forskjellige Former for de Grene af en Overgangskurve γ_0, der gaa gjennem det nye særegne Punkt O, nemlig saadanne, hvor disse Grene vende Konkaviteterne modsat Vej eller samme Vej eller ere imaginære, saa Punktet bliver et isoleret Punkt. I alle tre Tilfælde maa man under Tegningen af de nærliggende Kurver 1 og 3 iagttage, at ingen ret Linie, der er forbunden med en af disse Kurver paa en saadan Maade, at den kommer til at gaa igjennem O, naar Kurven falder sammen med 2, maa skjære den i mere end fire Punkter, som samtidig ville falde i O, samt at ingen af disse Kurver har nogen Dobbelttangent, der til Grænsestilling har Tangenten til 2 i O. Man vil da i alle tre Tilfælde finde to og kun to reelle Vendetangenter blandt de fire, som nærme sig til Tangenten til 2 i dens særegne Punkt. Dette maa ogsaa kunne bevises analytisk. (c') betegner Punkter af Vendetangenternes Indhyllingskurve.

Figurerne 13, 14, 15, hvor 2 er en Kurve γ_0', svare dualistisk henholdsvis til Fig. 10, 11, 12.

17. Kurverne γ_1. — En Kurve γ_1 adskiller sig, naar den betragtes som Punktfrembringelse, kun derved fra en Kurve γ_0, at den ene af de to Grene, der røre hinanden, er en ret Linie. Tavlen i 8 viser, at Røringspunktet O ogsaa nu maa være et enkelt Toppunkt. De $n'-3$ Tangenter for O til Restkurver maa da være Dobbelttangenter, og Tavlen viser, at den fuldstændige Kurve γ_1 ikke har andre Dobbelttangenter end disse og Restkurvens. Den fuldstændige Kurve γ_1 har derimod en Vendetangent mere end Restkurven, og denne maa falde sammen med den retliniede Gren. Vi se da, at Kurven γ_1 betragtet som Tangentdannelse er en saadan Kurve i Systemet, der i Stedet for en Vendetangent har faaet en Røring mellem to Grene, af hvilke den ene er et Toppunkt, uden at der har fundet nogen yderligere Sammenfalden Sted af særegne Tangenter eller nogen yderligere Dannelse af Toppunkter. En Kurve γ_1 er altsaa tillige en Kurve γ_1' (se 7). Dualitetsprincipet giver, at den omvendte Sætning ogsaa er rigtig.

En Kurve γ_1 fremstilles analytisk paa samme Maade som en Kurve γ_0 eller γ_0'. Skal Kurven $k = 0$ i det til et bevægeligt Koordinatsystem henførte Kurvesystem (XI) være en Kurve γ_1, maa y være Faktor i $\varphi_4 + \ldots$, og skriver man da for $\varphi_4 + \ldots$ $y(\varphi_3 + \ldots)$, skulle de $n-3$ fra Nul forskjellige Rødder x i den Ligning, der dannes ved i

$$\varphi_2 + \varphi_3 + \ldots = 0$$

at sætte $y = 0$, ogsaa være Rødder i den Ligning, der dannes ved i

$$\psi_3 + \psi_4 + \ldots = 0$$

at sætte $k = 0$, $y = 0$ (smlgn. 13), eller de to saaledes dannede Polynomier i x skulle paa en Faktor ax nær være identiske. Den retliniede Grens Røringspunkt med Indhyllings-

kurven kan naturligvis her først vise sig, naar vi ogsaa tage Hensyn til Koordinatsystemets Bevægelse. Naar denne retliniede Gren to Gange skal røre Systemets Indhyllingskurve, vil den have $n+1$ Punkter fælles med den konsekutive Kurve — nemlig to (reelle eller imaginære), der falde sammen i det særegne Punkt O, de $n-3$ Skjæringspunkter med Restkurven og de to Røringspunkter med Indhyllingskurven. Den maa altsaa ogsaa blive en Gren af den konsekutive Kurve og altsaa ogsaa af Indhyllingskurven (smlgn. 13). Kurven γ_1's Toppunkt vil have tilsvarende Egenskaber. Forøvrigt fremgaa Egenskaberne ved Kurverne γ_1's nærliggende Kurver af, hvad der i 16 er sagt om Kurverne γ_0's nærliggende Kurver.

Paa Fig. 16 er 2 en Overgangskurve γ_1 mellem 1 og 3. De tre Kurver, som ere tegnede i Fig. 16, danne tilsammen en Overgangsfigur mellem Figurerne 10 og 11, naar alle Kurver paa disse Figurer betragtes som Punktdannelser, og mellem Figurerne 13 og 14, naar Kurverne betragtes som Tangentdannelser. For med Øjet ogsaa at opfatte dette sidste maa man erindre, at en retliniet Gren ikke gjør sig gjældende paa en Kurve, der betragtes som Tangentdannelse, samt at Fig. 16 skal dannes af 13 eller 14 derved, at to Grene lukkes sammen til en Bue med meget stærk Krumning, som kan nærme sig til et Toppunkt, f. Ex. de øverste i Fig. 13, som for Kurven 1's Vedkommende ere forbundne ved en punkteret Linie.

18. Kurverne $(2d)$, (de) og $(2e)$. — Naar to Dobbeltpunkter falde sammen, uden at flere særegne Punkter falde i samme Punkt, maa begge Dobbeltpunkterne dannes af de samme to Grene, som saaledes komme til at røre hinanden. Ifølge 6 er ingen af disse to Grene retliniet. Der vil derfor samtidig falde to Fællestangenter til Grenene sammen i Tangenten i Røringspunket, uden at der tillige falder flere særegne Tangenter sammen. De særegne Kurver $(2d)$ ere derfor tillige Kurver $(2d')$. Dualitetsprincipet giver den omvendte Sætning.

Hvis et af de to her omtalte Dobbeltpunkter ombyttes med en Spids, bliver det dannede særegne Punkt som bekjendt (se forøvrigt 20) Tilbagegangspunkt af anden Art af den simpleste Beskaffenhed (nemlig et saadant, hvor Kurven skjæres af sin Tangent i fire sammenfaldende Punkter [1]). I et saadant Punkts Tangent falder en Dobbelttangent sammen med en Vendetangent [2], og man finder da ligeledes, at de særegne Kurver (de) og de særegne Kurver $(d'e')$ ere de samme.

Hvis endelig to Spidser skulle falde sammen i et Punkt O uden at danne noget nyt Dobbeltpunkt, ser man, at de Grene, der danne disse Spidser maa smelte saaledes sammen, at de danne samme Figur som to Grene, der gaa gjennem Punktet O, uden at nogen enkelt af dem danner særegne Punkter. I modsat Fald havde man nemlig et fir-

(1) Ligesaa er en Spids et Tilbagegangspunkt af første Art af den simpleste Beskaffenhed, nemlig et saadant, hvor Kurven skjæres af sin Tangent i tre sammenfaldende Punkter. Andre Tilbagegangspunkter af første eller anden Art dannes ved yderligere Sammenfalden af Dobbeltpunkter og Spidser.

(2) Se Plücker *Theorie der algebraischen Curven.* 2 Afsn. 62.

dobbelt Punkt, i hvilket foruden de to Spidser endnu fire Dobbeltpunkter faldt sammen. Paa en Sammenfalden af to Spidser, uden at samtidig Dobbeltpunkter faldt sammen, have vi havt Exempel i Kurverne β', hvor den ene af de to Grene blev en ret Linie, der var Vendetangent til Restkurven, og som altsaa havde Trepunktsrøring (Røring af anden Orden) med den. Vi have nu i 7, netop for at udelukke Kurverne β', forudsat, at Kurverne $(2e)$ ikke havde retliniede Grene; men vi skulle nu se, at ogsaa de to Grene af en Kurve $(2e)$ have Trepunktsrøring.

Hertil kunne vi blandt andet anvende de Plücker'ske Formler. Idet det særegne Punkt ikke mere betragtes som dannet af to Grene med Spidser, men af to Grene uden særegne Punkter, ere de særegne Punkter, som erstatte Spidserne, saadanne, som kunne dannes af forskjellige Grene, altsaa sammensatte af lutter Dobbeltpunkter. Vi have nu forudsat, at ingen Gren af Kurven er retliniet, og der dannes ingen Toppunkter, ved at to Spidser falde sammen, saa Kurven beholder Tallene n og n'. Den første Formel (1) giver da, at to Spidser, naar n og n' skulle blive uforandrede, maa ombyttes med tre Dobbeltpunkter. Heraf følger, at de to Grene af Kurven $2e$ faa Trepunktsrøring. Det samme vil man finde ved for en nærliggende Kurve til Kurven $(2e)$ at konstruere en Hjælpekurve, der rører den i begge Spidser. Denne Hjælpekurve faar til Grænsestilling en Kurve, der skjærer Kurven $(2e)$ i sex Punkter, der falde sammen i det særegne Punkt. — Det samme vil i 21 fremgaa ad analytisk Vej.

Naar man i de Plücker'ske Formler ombytter e og d med $e-2$ og $d+3$ uden at forandre n og n', maa man samtidig ombytte e' og d' med $e'-2$ og $d'+3$. Det ses da, at, samtidig med at de to Spidser falde sammen og danne tre Dobbeltpunkter, maa to Vendetangenter falde sammen og danne tre Dobbelttangenter. Kurverne $(2e)$ ere altsaa tillige Kurver $(2e')$. Dualitetsprincipet giver den omvendte Sætning.

Anmærkning. Vi se, at vi, naar vi betragte en Kurve $(2e)$ for sig, efter Behag kunne regne dens Plücker'ske Tal, enten saaledes, at det nye særegne Punkt er dannet af 3 Dobbeltpunkter, den særegne Tangent af 3 Dobbelttangenter, eller saaledes, at de dannes henholdsvis af 2 Spidser og 2 Vendetangenter. Naar den derimod betragtes som en Kurve i Systemet, maa man holde sig til den sidste Opfattelse. Nu har Cayley(1), idet han foruden til en Kurves Plücker'ske Tal tager Hensyn til dens Slægt (*genre*), tillagt enhver Kurve med sammensatte særegne Punkter og Tangenter fuldkommen bestemte Plücker'ske Tal, og hans Bestemmelse af disse er en saadan, at Røring af anden Orden mellem to Grene skal være dannet derved, at saavel tre Dobbeltpunkter som tre Dobbelttangenter falde sammen. Da man nu imidlertid virkelig i Systemer af Kurver med mindst

(1) *Quart. Journal of Math.* vol. VII p. 212.

to Spidser og to Vendetangenter finder Kurver (2*e*), hvad vi have fundet bekræftet ved Kurver af fjerde Orden, kan det Hensyn, der ligger til Grund for Cayley's Betragtning, ikke gjøre sig gjældende her.

19. Analytisk Fremstilling af Kurverne (2*d*). — Vi ville henføre en vilkaarlig Kurve i et System, som, idet k nærmer sig til Nul, nærmer sig til en Kurve (2*d*), til et Koordinatsystem, hvor $y=0$ er Forbindelseslinien mellem de to Dobbeltpunkter, som falde sammen for $k=0$. Denne er i Almindelighed bevægelig; men da den er fuldkommen bestemt, naar Kurven er en given nærliggende Kurve til (2*d*), vil Ændring til et fast Koordinatsystem ske ved en Ligning, hvis Koefficienter kunne udvikles i Rækker efter Potenser af k med hele Exponenter. Om Ligningen for Kurvesystemet henført til dette bevægelige Koordinatsystem maa der altsaa gjælde det samme, som i 2 er forudsat at gjælde om den Ligning, hvorved Systemet henføres til et fast Koordinatsystem, at Koefficienterne kunne udvikles i Rækker efter Potenser af k med hele Exponenter. Systemets Ligning bliver altsaa ogsaa nu — naar vi lade Axen $x=0$ gaa igjennem det særegne Punkt paa Kurven (2*d*) af Formen

$$y^2+\varphi_2 y+\varphi_4+\ldots+k\psi=0. \tag{XII}$$

Da der kun er to Dobbeltpunkter, som for $k=0$ falde i Begyndelsespunktet, maa deres Abscisser kunne udvikles i Række efter Potenser af $k^{\frac{1}{2}}$ med hele Exponenter $f_1 k^{\frac{1}{2}}+f_2 k+\ldots$. Ved Flytning af Begyndelsespunktet til et af disse Dobbeltpunkter, som sker ved Ombytning af x med $x+f_1 k^{\frac{1}{2}}+f_2 k+\ldots$, skal Ligningen komme til ikke at indeholde Led, som ere af mindre end anden Grad med Hensyn til x og y. Denne Omstændighed kan benyttes til Bestemmelse af $f_1, f_2 \ldots$ samt af visse Ligninger, som Koefficienterne i ψ maa tilfredsstille. Man vil for det første finde, at Ligningen (XII) ikke kan indeholde Led af mindre end anden Grad med Hensyn til y, k og x^2. Leddene af anden Grad med Hensyn til disse Størrelser tjene til Bestemmelse af f_1. De ere

$$y^2+ax^2y+bx^4+k(a_1 y+b_1 x^2)+k^2 b_2. \tag{XIII}$$

Naar disse Led ved Indsættelse af $x+f_1 k^{\frac{1}{2}}$ for x skulle reduceres til Led af mindst anden Grad med Hensyn til x og y, maa man have

$$\begin{aligned} af_1^2 &+ a_1 &&= 0,\\ bf_1^4 &+ b_1 f_1^2 + b_2 &&= 0,\\ 4bf_1^3 &+ 2b_1 f_1 &&= 0. \end{aligned}$$

Disse Ligninger medføre Betingelsesligningerne

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_2}{\frac{b_1}{2}}=\frac{\frac{b_1}{2}}{b},$$

hvorefter den første Ligning bestemmer f_1.

Leddene af anden Grad med Hensyn til x og y i det omdannede Polynomium (XIII) ville da, efter Reduktion ved de fundne Ligninger, blive

$$y^2 + 2af_1 k^{\frac{1}{2}} xy + 4bf_1{}^2 k x^2 = 0, \tag{XIV}$$

som tjener til Bestemmelse af første Led i de Udtryk for $\frac{y}{x}$, som bestemme Tangenterne i det Dobbeltpunkt, hvortil Begyndelsespunktet er flyttet. — Paa lignende Maade kunde man ved at medtage Led af højere Orden af Kurvesystemets Ligning finde flere Led i de her omtalte Rækkeudviklinger samt de Betingelser, som de øvrige Koefficienter i ψ skulle tilfredsstille.

Idet den bevægelige Abscisseaxes Forflyttelse, der for lim. $k = 0$ i Almindelighed er uendelig lille af første Orden — da den kun afhænger af Potenser af k med hele Exponenter —, forsvinder over for Forflyttelser af Ordenen $\frac{1}{2}$, finde vi, at de to Dobbeltpunkter paa den ved en uendelig lille Værdi af k bestemte Kurve i Almindelighed have en Afstand fra det særegne Punkt paa Kurven $(2d)$ og indbyrdes, som er uendelig lille af Ordenen $\frac{1}{2}$, og at Tangenterne i disse Dobbeltpunkter danne Vinkler med den særegne Tangent og indbyrdes af Ordenen $\frac{1}{2}$. Man vil ligeledes kunne udlede af disse Ligninger — i Stedet for hvilke man ogsaa kunde have anvendt Tangentligninger —, at Bevægelserne af de to Dobbelttangenter, der nærme sig til at falde sammen, og af deres Røringspunkter blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$ for lim. $k = 0$. Heraf slutter man, at én Gren af Kurverne b og b' og to Grene af Kurverne p og p' røre Kurven $(2d)$ i dens særegne Punkt. Derimod vil Systemets Indhyllingskurve i Almindelighed ikke gaa gjennem dette Punkt. — De her omtalte Resultater følge forøvrigt af, at hver af de to Grene af den til en Værdi af k svarende Kurve ifølge 2, naar lim. $k = 0$, skulle have en Afstand fra den tilsvarende Gren af Kurven $(2d)$, som er uendelig lille af første Orden.

Paa Fig. 17 antages de to Grene at bevæge sig i modsat Retning. Idet Konkaviteterne vende modsat Vej, ere Dobbeltpunkterne reelle, saalænge Dobbelttangenterne ere imaginære (Kurven 1) og omvendt (Kurven 3). Det modsatte er Tilfældet, naar Konkaviteterne vende samme Vej.

20. Analytisk Fremstilling af Kurverne (de). Hvis de i 19 fremstillede særegne Kurver skulle være Kurver (de), maa de to Tangenter i et af Dobbeltpunkterne falde sammen. En nødvendig Betingelse herfor er, at (XIV) giver lige Rødder, eller at

$$a^2 = 4b.$$

Denne Betingelse, som rammer de af k uafhængige Led i Systemets Ligning (XII); ((XIII) indeholder Led af denne), udtrykker netop, hvad der er angivet i 18, at det særegne Punkt paa Kurven (de) er et Tilbagegangspunkt af anden Art.

Ved den videre Undersøgelse af Kurver, der nærme sig til en Kurve (de) [samt af

dem, der nærme sig til en Kurve $(2e)$], vil det være bekvemt at foretage en Forandring af Koordinatsystemet, idet vi ombytte

$$y + \frac{a}{2} x^2 \text{ med den enkelte Benævnelse } y. \tag{XV}$$

Ligningerne $y =$ Konst. ville da fremstille Parabler (Keglesnit, hvis man ikke har brugt Parallelkoordinater), som ikke skjære hverandre i noget bevægeligt Punkt, og som skjære Linierne $x =$ Konst. i ét bevægeligt Punkt. Et Punkt bliver saaledes fuldkommen bestemt ved sine Koordinater (x, y). Betingelserne for Skjæring og derved ogsaa for Dobbeltpunkt blive de samme som i et lineært Koordinatsystem.

Som i 19 benytte vi nu baade et fast og et bevægeligt Koordinatsystem. I det faste er Kurven $y = 0$ en Parabel med vilkaarlig valgt Axeretning, som oskulerer Kurven (de) i dens særegne Punkt, og Linien $x = 0$ er en ret Linie gjennem dette Punkt; i det bevægelige er Linien $x = 0$ den samme, medens Kurven $y = 0$ er en ny Parabel bestemt i det faste System ved en Ligning af første Grad, hvis Koefficienter ere bestemte saaledes, at den gaar gjennem de to særegne Punkter paa den ved k bestemte Kurve, der for $k = 0$ falde sammen. Disse Koefficienter kunne udvikles i Rækker efter Potenser af k med hele Exponenter.

Ligningen for en Kurve i Systemet bliver i dette bevægelige Koordinatsystem af Formen

$$(1 + \varphi_1) y^2 + \varphi_3 y + \varphi_5 + \ldots + k\psi = 0. \tag{XVI}$$

Hvis man nu ved at ombytte x med $x + f_1 k^{\frac{1}{2}} + f_2 k + \ldots$ vil bortskaffe Leddene af mindre end anden Grad med Hensyn til x og y og kun faa saadanne Led af anden Grad, som danne et fuldstændigt Kvadrat, vil man finde [1], at $f_1 = 0$, hvis φ_5 indeholder et af y uafhængigt Led. At $f_1 = 0$, maatte man ogsaa vente her, hvor de særegne Punkter, som nærme sig til at falde sammen, ere af forskjellig Beskaffenhed og altsaa ikke kunne bestemmes ved blot at tage de to Værdier af $k^{\frac{1}{2}}$. Rækkerne maa da kun indeholde Potenser af k med hel Exponent.

Ved Bestemmelsen af den første Koefficient f_2 benyttes følgende Led af (XVI) — der, som vi skulle se nedenfor, slet ikke vil indeholde Led, der ere af Graden Nul med Hensyn til y og af mindre end 5te Grad med Hensyn til x og k eller af første Grad med Hensyn til y og af mindre end 3die Grad med Hensyn til x og k:

$$y^2 + bx^3 y + cx^5 + k(b_1 x^2 y + c_1 x^4) + k^2 (b_2 xy + c_2 x^3) + k^3 (b_3 y + c_3 x^2) + k^4 c_4 x + k^5 c_5. \tag{XVII}$$

Skulle Leddene af mindre end anden Grad med Hensyn til x og y forsvinde heraf, ved at x ombyttes med $x + f_2 k$, maa f_2 være Rod i Ligningen

$$bf_2{}^3 + b_1 f_2{}^2 + b_2 f_2 + b_3 = 0, \tag{XVIII}$$

(1) Fremgangsmaaden er den samme, som nu strax skal benyttes til Bestemmelse af f_2.

og to Gange være Rod i Ligningen

$$cf_2{}^5 + c_1f_2{}^4 + c_2f_2{}^3 + c_3f_2{}^2 + c_4f_2 + c_5 = 0. \tag{XIX}$$

Første Led i de Værdier af $\frac{y}{x}$, som bestemme Stillingen af Tangenterne i det til en Værdi af f_2 svarende særegne Punkt mod den bevægelige Parabel $y = 0$, findes ved Ligningen

$$y^2 + (10cf_2{}^3 + 6c_1f_2{}^2 + 3c_2f_2 + c_3)k^3x^2 = 0, \tag{XX}$$

idet Koefficienten til xy, som bliver af anden Grad med Hensyn til k, ikke kan komme i Betragtning, saalænge vi ikke medtage flere Led af Kurvens Ligning. Naar nu Punktet skal være en Spids, maa denne Ligning have lige Rødder. Koefficienten til x^2 maa da forsvinde, hvorved udtrykkes, at f_2 endnu en tredie Gang er Rod i (XIX). De Betingelser, som Koefficienterne b_1, b_2, b_3, c_1, .. c_5 maa tilfredsstille, for at det fremstillede System virkelig skal være et saadant, hvori $k = 0$ giver en Kurve (de), ere altsaa de, som udtrykke, at Ligning (XIX) har en dobbelt og en tredobbelt Rod, og at disse begge tilfredsstille Ligning (XVIII).

Vi se nu let Rigtigheden af den Paastand, at Ligning (XVII) ikke kan indeholde Led, der ikke indeholde y, og som ere af lavere end femte Grad med Hensyn til x og k. Saadanne Led vilde nemlig give Anledning til en Ligning, som skulde spille samme Rolle som (XIX), altsaa ogsaa have en dobbelt og en tredobbelt Rod, men som var af lavere Grad, hvilket er umuligt.

Man ser ogsaa, at Ligningen ikke kan indeholde Led, som kun indeholde første Potens af y og ere af mindre end tredie Grad med Hensyn til x og k. Da Ligningen nemlig for $k = 0$ ikke har noget saadant Led, vilde disse Led ikke indeholde x i højere Potens end første, og altsaa give Anledning til en Ligning af første Grad, der skulde erstatte (XVIII), hvilket er umuligt, da denne Ligning skal have 2 Rødder.

Man finder, at naar en Kurve bestemt ved k nærmer sig til at falde sammen med en Kurve (de), blive dens særegne Punkters Afstande fra det særegne Punkt paa (de) uendelig smaa af første Orden. De Vinkler, som Tangenterne i Dobbeltpunktet danne med den bevægelige Parabel $y = 0$, og altsaa indbyrdes, blive af Ordenen $\frac{3}{2}$, medens den Vinkel, som Tangenten i Spidsen danner med samme Kurve, bliver af anden Orden. Nu danne i disse Punkter (hvis x-Koordinater ere uendelig smaa af første Orden) Tangenterne til Parablen (hvis Afvigelse fra Parablen i det faste System ligeledes i Almindelighed er uendelig lille af første Orden) Vinkler med den særegne Tangent til Kurven (de), som maa blive af første Orden. Det samme bliver da Tilfældet med Tangenterne til den ved k bestemte Kurve i dens særegne Punkter.

Ligeledes finder man ved Ombytning af Punkt og Liniekoordinater, at de to særegne-Tangenter til den ved k bestemte Kurve og deres Røringspunkter afvige uendelig lidt

af første Orden fra deres Beliggenheder paa Kurven (de). Afstanden mellem Dobbelttangentens to Røringspunkter bliver derimod af Ordenen $\frac{3}{2}$. — Vi se heraf, at Kurverne (b), (c) og (q') gaa gjennem det særegne Punkt paa Kurven (de), og at dette Punkt bliver en Spids paa Kurven (p'), samt at Kurverne (b'), (c') og (q) røre den særegne Tangent til Kurven (de), og at denne Linie bliver en Vendetangent til Kurven (p).

Ved Tegningen af en Figur (se Fig. 18) ser man, at Dobbeltpunktets Grene og Dobbelttangentens Røringspunkter samtidig ere reelle (Kurven 1) og samtidig imaginære (Kurven 3).

21. Analytisk Fremstilling af Kurverne $(2e)$. — Naar Ligning (XVI), idet vi vedblive at benytte samme Koordinatsystem, skal fremstille Kurver, der for lim. $k=0$ nærme sig til en Kurve $(2e)$, ses det af 20, at φ_5 maa indeholde Faktoren y; thi i modsat Fald kunde paa den ene Side de to særegne Punkter, der nærme sig til at falde sammen, ikke bestemmes ved $x=f_1 k^{\frac{1}{2}}+f_2 k+\ldots$, saaledes at $f_1 \gtrless 0$, og paa den anden Side skulde, naar $f_1=0$, Ligning (XIX) have to tredobbelte Rødder. Ligningen kan da skrives

$$(1+\varphi_1) y^2+(\varphi_3+\varphi_4) y+\varphi_6+\ldots+k \psi=0. \tag{XXI}$$

Denne Ligning viser, at Kurven $(2e)$ virkelig har to Grene gjennem Punktet (0, 0), som begge have Trepunktsrøring med Kurven $y=0$ altsaa ogsaa indbyrdes.

Hvis nu de Spidser paa (XXI), som nærme sig til at falde sammen, skulle bestemmes ved $x=f_1 k^{\frac{1}{2}}+f_2 k+\ldots$, maa følgende Led af (XXI), som ikke vil indeholde Led under anden Grad med Hensyn til y, $k^{\frac{3}{2}}$ og x^3, benyttes til Bestemmelsen af f_1:

$$y^2+b x^3 y+c x^6+k(b_1 x y+c_1 x^4)+k^2 c_2 x^2+k^3 c_3. \tag{XXII}$$

Naar Led af mindre end anden Grad med Hensyn til x og y skulle forsvinde heraf ved Indsættelse af $x+f_1 k^{\frac{1}{2}}$, og naar Leddene af anden Grad skulle danne et fuldstændigt Kvadrat, maa man have

$$f_1=-\frac{b_1}{b}=\frac{4 c_1}{b^2-12 c}, \tag{XXIII}$$

og denne Størrelse maa desuden være dobbelt Rod i Ligningen

$$c x^3+c_1 x^2+c_2 x+c_3=0. \tag{XXIV}$$

Den Værdi af $\frac{y}{x}$, som bestemmer den Vinkel, Tangenten i en Spids danner med Kurven $y=0$, bliver for lim. $k=0$ uendelig lille af første Orden; men da selve denne Kurves Tangent i det paagjældende Punkt danner en Vinkel af Ordenen $\frac{1}{2}$ med den særegne Tangent til Kurven $(2e)$, bliver den Vinkel, som Spidsens Tangent danner, ogsaa af Ordenen $\frac{1}{2}$.

Man finder saaledes, at paa en Kurve, der idet lim. $k=0$ nærmer sig til en Kurve $(2e)$, ville de to Spidser og Tangenterne i samme, samt de to Vendetangenter og sammes

Røringspunkter have Afstande fra og danne Vinkler med deres Grænsestillinger, som ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$. Heraf følger, at Kurverne (c), (c'), (q) og (q') røre Kurven $(2e)$ i dens særegne Punkt.

Ved Tegningen af Figurer (se Fig. 19 og 20) ser man, at de to Spidser og de to Vendetangenter samtidig ere reelle (Kurverne 1) og samtidig blive imaginære (Kurverne 3). Paa Fig. 20 reduceres den Gren af Kurve 2, hvorpaa det her kommer an, til et Punkt og bliver imaginær paa Kurven 3.

22. Kurverne $(3d)$, $(2de)$, $(d2e)$, $(3d')$, $(2d'e')$, $(d'2e')$. — De særegne Punkter paa og Tangenter til Kurverne (de) og $(2e)$ opstod derved, at to særegne Punkter eller Tangenter faldt sammen, uden at dette medførte, at flere faldt sammen med dem. Dette vil derimod være Tilfældet, naar der ved deres Sammenfalden dannes tredobbelte Punkter og Tangenter i dette Ords mest omfattende Betydning, det er: Punkter, i hvilke Kurven af enhver ret Linie, som gaar derigjennem, skjæres i tre sammenfaldende Punkter, og Linier, i hvilke tre af de Tangenter til Kurven, som udgaa fra et hvilketsomhelst af deres Punkter, falde sammen [1].

Det er maaske mest iøjnefaldende, at Kurverne $(3d')$, $(2d'e')$ og $(2e'd')$ høre til et Systems sædvanlige særegne Kurver. Det vil nemlig være dem, hvor en Dobbelttangent enten endnu engang rører Kurven $[(3d')]$, eller i et af sine Røringspunkter faar Røring af anden Orden $[(2d'e')]$, eller faar sædvanlig Topunktsrøring i to sammenfaldende Røringspunkter, altsaa Firpunktsrøring $[(d'2e')]$. Derved dannes henholdsvis en tredobbelt Tangent med adskilte Røringspunkter (altsaa en egentlig tredobbelt Tangent) eller en tredobbelt Tangent (i den ovenfor nævnte omfattende Betydning af Ordet) med to eller med tre sammenfaldende Røringspunkter. Dobbelttangenten falder sammen henholdsvis med to andre Dobbelttangenter, med en anden Dobbelttangent og en Vendetangent eller med to Vendetangenter. For at et Kurvesystem virkelig skal indeholde Kurver $(3d')$, $(2d'e')$, $(d'2e')$, maa dets Kurver mindst være af 6'te, 5'te eller 4'de Orden og mindst have de særegne Tangenter, som skulle falde sammen. — Dualitetsprincipet giver de tilsvarende Egenskaber ved Kurverne $(3d)$, $(2de)$ og $(d2e)$.

Da en Kurve $(3d)$ eller $(2de)$ dannes ved, at en ny Gren gaar gjennem et Dobbeltpunkt eller en Spids, og saavel den tilsvarende Gren som det tilsvarende Punkt af en nærliggende Kurve — bestemt ved k — for lim. $k = 0$ ere i uendelig smaa Afstande af første Orden fra de Stillinger, de indtage paa Kurverne $(3d)$ og $(2de)$, ville den nærliggende Kurves Egenskaber følge af de bekjendte Egenskaber ved Dobbeltpunkter og Spidser. Man finder, at det særegne Punkt paa en Kurve $(3d)$ er et tredobbelt Punkt paa Kurven (b), og

[1] Havde vi brugt den tilsvarende mest omfattende Betydning af dobbelt Punkt og dobbelt Tangent, maatte vi have betragtet Spidser og Vendetangenter som specielle Tilfælde af dobbelte Punkter og Tangenter.

at det særegne Punkt paa en Kurve ($2\,de$) er en Spids paa Kurven (b) og et enkelt Punkt af Kurven (c).

Man finder ligesaa, at den særegne Tangent til Kurven ($3\,d'$) er tredobbelt Tangent til Kurven (b'), og at den særegne Tangent til Kurven ($2\,d'e'$) er Vendetangent til Kurven (b') og enkelt Tangent til Kurven (c').

23. Analytisk Bestemmelse af Kurverne ($d\,2e$) og ($d'\,2e'$). — Et Kurvesystem, hvor $k = 0$ giver en Kurve ($d'\,2e'$), kan, idet vi paany anvende sædvanlige lineære Koordinater, fremstilles ved Ligningen

$$y\,(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_4 + \ldots + k\psi = 0, \tag{XXV}$$

og denne Ligning vil i Almindelighed — det er, naar ikke noget særeget Punkt falder i Punktet (0, 0) (som i XII)) — fremstille et saadant System. Undersøgelsen foretages imidlertid lettest ved et bevægeligt Koordinatsystem, i hvilket man til Axe $y = 0$ tager den Dobbelttangent, der har Axen $y = 0$ i det faste Koordinatsystem til Grænsestilling. I saa Fald skal Ligningen, derved at Begyndelsespunktet flyttes til et Røringspunkt ved for x at sætte $x + f_1\,k^{\frac{1}{2}} + f_2\,k + \ldots$, miste de Led, som ere uafhængige af y og af mindre end anden Grad med Hensyn til x. En Betingelse herfor vil være, at blandt de af y uafhængige Led, som Ligningen indeholder, intet er af mindre end anden Grad med Hensyn til x^2 og k, medens Leddene af anden Grad danne et Kvadrat. De Led af Ligning (XXV), som man da faar Brug for i de Undersøgelser, hvorpaa det her udelukkende kommer an, blive da

$$y + a\,(x^2 + a_1\,k)^2. \tag{XXVI}$$

Man finder $f_1{}^2 = -a_1$.

Paa den ved k bestemte Kurve faa, naar lim. $k = 0$, Dobbelttangentens og de to Vendetangenters Røringspunkter Afstande fra Kurven ($d'\,2e'$)'s Røringspunkt med sin særegne Tangent, som ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$. Vendetangenterne paa den ved k bestemte Kurve danne saavel indbyrdes som med samme Kurves Dobbelttangent Vinkler af Ordenen $\frac{3}{2}$; den Tangent fra et Punkt af Dobbelttangenten i endelig Afstand fra dens Røringspunkter, som for $k = 0$ falder sammen med Dobbelttangenten, danner en Vinkel af anden Orden med Dobbelttangenten, og den Tangent fra et Punkt af en Vendetangent i endelig Afstand fra dens Røringspunkt, som for $k = 0$ falder sammen med Vendetangenten, danner ligeledes en Vinkel af anden Orden med Vendetangenten. Alle disse Linier danne derimod Vinkler af første Orden med den særegne Tangent til Kurven ($d'\,2e'$).

Man ser, at den særegne Tangent til Kurven $d'\,2e'$) rører Kurverne (p') og (q') i sit Røringspunkt med ($d'\,2e'$), og at den i et og samme af sine andre Punkter rører Kurven (b') og er Vendetangent til Kurven (c'). (Se Fig. 21).

Ved Anvendelse af Dualitetsprincipet paa de ovenfor angivne Resultater ser man, af hvad Orden Afstandene fra det særegne Punkt paa en Kurve ($d\,2e$) til Punkter af en nærliggende Kurve, som have dette Punkt til Grænsestilling, ere, og af hvad Orden de Vinkler ere, som Tangenter i saadanne Punkter danne med deres Grænsestilling. Man finder, at Kurverne (p) og (q) i det særegne Punkt af Kurven ($d\,2e$) røre denne, at Kurven (b) gaar derigjennem, og at Kurven (c) har en Spids i dette Punkt, og at disse to Kurver have samme Tangent. (Se Fig. 22).

Vi skulle her endnu tilføje, at der i 40 vil blive gjort en stereometrisk Anvendelse af Læren om Systemer af Kurver, som maaske vil tjene til yderligere at belyse de særegne Kurver.

Andet Afsnit.

Relationer mellem Karakteristiker og Antal af sædvanlige særegne Kurver.

---

24. Hovedresultater. — I de Ligninger, vi skulle bevise i dette Afsnit, tages der som anført i 4 (S. 12) kun Hensyn til de særegne Kurver, som ere omtalte i forrige Afsnit, altsaa ikke til andre Kurver med Mangefoldsgrene end Kurverne α og α'. Der maa altsaa, naar de skulle anvendes paa saadanne Systemer, hvor der er Kurver med Mangefoldsgrene, tilføjes supplementære Led hidrørende fra disse Kurver. For saa vidt disse Kurver ere bekjendte, findes de supplementære Led ved samme Fremgangsmaade som Formlen.

Man finder følgende Formler, der som Ligninger mellem Antal slutte sig til de Plücker'ske Formler (1) og til Formlerne (2) i 7:

$$2(n-1).\mu = \mu' + 2b + 3c + \alpha', \tag{3}$$

$$2(n'-1).\mu' = \mu + 2b' + 3c' + \alpha, \tag{3'}$$

$$d.\mu' + n'.b = 2p + u + \beta, \tag{4}$$

$$d'.\mu + n.b' = 2p' + u' + \beta', \tag{4'}$$

$$e.\mu' + n'.c = 3q + v + \gamma, \tag{5}$$

$$e'.\mu + n.c' = 3q' + v' + \gamma', \tag{5'}$$

$$2(d-1).b = 2x + (2d) + 6(3d) + 3(2de) + (n-6)\alpha_0' + (n-4)\alpha_1' + (n-2)\alpha_2', \tag{6}$$

$$2(d'-1).b' = 2x' + (2d) + 6(3d') + 3(2d'c') + (n'-6)\alpha_0 + (n'-4)\alpha_1 + (n'-2)\alpha_2, \tag{6'}$$

$$e.b + d.c = y + (de) + 2(2de) + 3(d2e), \tag{7}$$

$$e'.b' + d'.c' = y' + (de) + 2(2d'e') + 3(d'2e'), \tag{7'}$$

$$2(e-1).c = 2z + (2e) + 3(d2e) + 4\alpha_0' + 2\alpha_1' + \beta' + 12\gamma_0', \tag{8}$$

$$2(e'-1).c' = 2z' + (2e) + 3(d'2e') + 4\alpha_0 + 2\alpha_1 + \beta + 12\gamma_0, \tag{8'}$$

$$(n-2).\mu' + (n+n'-4).\mu = c' + p + 2q, \tag{9}$$

$$(n'-2).\mu + (n'+n-4).\mu' = c + p' + 2q', \tag{9'}$$

$$(n-2).b + d.\mu = p + 3(3d) + 3(2de) + 2(d2e) + (n-6)\alpha_0' + (n-4)\alpha_1' + (n-2)\alpha_2', \tag{10}$$

$$(n'-2).b' + d'.\mu' = p' + 3(3d') + 3(2d'e') + 2(d'2e') + (n'-6)\alpha_0 + (n'-4)\alpha_1 + (n'-2)\alpha_2, \tag{10'}$$

$$(n-2).c + e.\mu = 2q + (2de) + 4(d2e) + 4\alpha_0' + 2\alpha_1' + 8\gamma_0', \tag{11}$$

$$(n'-2).c' + e'.\mu' = 2q' + (2d'e') + 4(d'2e') + 4\alpha_0 + 2\alpha_1 + 8\gamma_0, \tag{11'}$$

$$(n-3)[(n-2).\mu' + 2(n'-2).\mu] = 2b' + 2u + 3v + n'\alpha_0' + (n'-1)\alpha_1' + (n'-2)\alpha_2', \tag{12}$$

$$(n'-3)[(n'-2).\mu + 2(n-2).\mu'] = 2b + 2u' + 3v' + n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + (n-2)\alpha_2, \tag{12'}$$

$$(n-3)[(n-2).b + 2d.\mu] = u + 4x + 3y + [d-2(n-6)]\alpha_0' + [d-2(n-4)]\alpha_1' + [d-2(n-2)]\alpha_2', \tag{13}$$

$$(n'-3)\,[(n'-2)\,.\,b'+2d'\,.\,\mu'] = u'+4x'+3y'+[d'-2\,(n'-6)]\,\alpha_0+[d'-2(n'-4)]\,\alpha_1 + [d'-2\,(n'-2)]\,\alpha_2\,, \qquad (13')$$

$$(n-3)\,[(n-2)\,.\,c+2e\,.\,\mu] = v+2y+6z+(e-6)\,\alpha_0'+(e-3)\,\alpha_1'+e\,\alpha_2'\,, \qquad (14)$$

$$(n'-3)\,[(n'-2)\,.\,c'+2e'\,.\,\mu'] = v'+2y'+6z'+(e'-6)\,\alpha_0+(e'-3)\,\alpha_1+e'\,\alpha_2\,. \qquad (14')$$

Blandt disse 24 Ligninger [(3)—(14)] skulle vi se, at én kan udledes af de andre; de kunne altsaa tjene til at udtrykke 23 af Tallene μ, μ', b, b', c, c', p, p', q, q', u, u', v, v', x, x', y, y', z, z', α_0, α_1, α_2, α_0', α_1', α_2', β, β', γ_0, γ_1, γ_0', $(2d)$, (de), $(2e)$, $(3d)$, $(3d')$, $(2de)$, $(2d'e')$, $(d2e)$, $(d'2e')$ ved de 17 andre, idet de Plücker'ske Tal forudsættes givne. Ligningerne ere homogene og af første Grad med Hensyn til de 40 Tal.

25. Korrespondanceprincipet. — De i 24 opregnede Formler ere fundne ved Hjælp af det saakaldte «*principe de correspondance*», som indeholdes i følgende Sætning:

Naar to bevægelige Punkter X og Y af en ret Linie (L) svare saaledes til hinanden, at der til hvert Punkt X svarer η Punkter Y, og til hvert Punkt Y svarer ξ Punkter X, og naar denne Forbindelse kan udtrykkes ved en algebraisk Ligning mellem Punkternes Afstande fra et fast Punkt af Linien, vil Linien indeholde $\xi+\eta$ Punkter (XY), hvori et Punkt X falder sammen med det tilsvarende Punkt Y. — Det er en Selvfølge, at Punkter af en ret Linie kunne ombyttes med Linier gjennem et Punkt.

Det sædvanlige meget simple Bevis [1] for denne Sætning beror paa, at den algebraiske Ligning maa være af Graden ξ med Hensyn til den ene og af Graden η med Hensyn til den anden af de to Afstande. Vi skulle her anføre et andet Bevis.

Naar man udenfor Linien (L) vælger to faste Punkter A og B saaledes, at Skjæringspunktet C mellem AB og (L) ikke er noget af de søgte Punkter (XY), bliver det geometriske Sted for Skjæringspunktet Z mellem AX og BY en algebraisk Kurve. Denne vil gaa ξ Gange gjennem A, som bliver Skjæringspunkt mellem BC og de Linier, der forbinde A med de ξ Punkter X, der svare til C betragtet som et Punkt Y. Disse Linier blive Tangenter i A. En vilkaarlig Linie AX gjennem A skjærer altsaa den frembragte Kurve i ξ Punkter, som falde i A, og desuden i sine Skjæringspunkter med de η tilsvarende Linier BY, og ikke i noget andet Punkt. Kurven bliver saaledes af Ordenen $\xi+\eta$ og skjærer følgelig ogsaa Linien (L) i $\xi+\eta$ Punkter. Disse ere netop de søgte Punkter (XY).

Anmærkning. Korrespondanceprincipet faar sin Betydning derved, at man uden nogensomhelst Vanskelighed finder, at en vis Forbindelse kan udtrykkes ved en algebraisk Ligning, ogsaa i de Tilfælde, hvor det vilde være yderst vanskeligt eller umuligt ved Gjennemførelse af Eliminationer o. s. v. at finde selve denne Ligning. I de talrige

---

(1) Se Chasles's Afhandling i *Comptes rendus de l'Académie des sciences* for 27de Juni 1864.

Undersøgelser, hvor jeg har set dette Princip anvendt, eller hvor jeg selv har havt Lejlighed til at anvende det, mindes jeg ikke noget Tilfælde, hvor der behøvedes nogen særlig Prøvelse for at finde, om virkelig Forbindelsen kunde udtrykkes ved en algebraisk Ligning.

At Korrespondanceprincipet kun kan anvendes paa saadanne Forbindelser, som kunne udtrykkes ved algebraiske Ligninger, har saavidt mig bekjendt altid været anerkjendt — om det end ikke altid udtrykkelig har været fremhævet. Jeg kan derfor vel billige, at Dr. Geiser [1] fordrer denne Indskrænkning udtalt; men da jeg altid har betragtet den som hørende med til Principet, maatte det undre mig, at han dermed mente at indskrænke dets Betydning. De Urimeligheder, man vilde komme til ved at udelade denne Indskrænkning, ere forøvrigt saa iøjnefaldende, at det ikke er let at forstaa, hvorledes Manglen deraf i Udtalelsen af Principet kan have givet Hr. Geiser Anledning til Misforstaaelse. Ja i den Udtalelse, som han citerer, som er Chasles's første Udtalelse af Principet (for $\xi = \eta = 1$ eller $\xi = 1$, $\eta = 2$) [2], er Indskrænkningen endog antydet paa en temmelig klar Maade, idet Chasles forudsætter, at man er stødt paa Forbindelsen i Betragtninger, «hvor der ikke forekommer transcendente Kurver eller Funktioner». Naar man gjør denne Indskrænkning, turde det være tydeligt nok, at Principet endnu mindre bør anvendes paa saadanne Tilfælde, hvor Tallene ξ og η faas ved vilkaarlig tegnede Kurver og ved vilkaarlig Skjelnen mellem reelt og imaginært, som i Hr. Geisers Exempler, eller ved en vilkaarlig Skjelnen mellem højre og venstre, konvex og konkav o. s. v.

26. Sammenfaldende Opløsninger. — Hvad der kan besværliggjøre Anvendelsen af Korrespondanceprincipet, er Vanskeligheden ved at bedømme, hvormange Punkter (XY) der falder sammen i et Punkt af Linien (L), hvor et Punkt X falder sammen med et eller flere tilsvarende Punkter Y. Afgjørelsen heraf føres ved det i 25 anførte Bevis tilbage til at afgjøre, hvormange Skjæringspunkter mellem Linien (L) og den konstruerede Hjælpekurve (Z) der falder sammen i et saadant Punkt [3]. Den beror da dels paa, hvormange Grene af denne Kurve der gaar gjennem et saadant Punkt, dels paa disse Grenes Beskaffenhed og Ordenen af den Røring, som de maatte have med Linien (L). Denne sidste finder man ved at tage Hensyn til, at, naar Afstanden XY bliver uendelig lille, bliver Punktet Z's Afstand fra den rette Linie (L) uendelig lille af samme Orden, idet Vinklerne i Trekant XYZ ere endelige. Man finder da følgende Regel:

---

(1) *Annali di Matematica IV.*

(2) *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 24 Decbr. 1855.

(3) At Bestemmelsen af Antallet af sammenfaldende Punkter (XY) ogsaa paa Grundlag af den sædvanlige Bevisførelse kan føres tilbage til Bestemmelsen af Antallet af sammenfaldende Skjæringspunkter mellem en ret Linie og en Kurve, har jeg vist i *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1867, uden dog udtrykkelig at opstille den her angivne Regel, som man ogsaa kan finde ad den dér anviste Vej — eller rent analytisk.

Naar Punktet X og et af de tilsvarende Punkter Y samtidig falde i et fast Punkt D af Linien, og naar, idet Afstanden DX bliver uendelig lille, XY bliver proportional med $(DX)^\zeta$ (se 2), giver et saadant Punkt Y Anledning til, at ζ af de $\xi + \eta$ Punkter (XY) falde i D.

Idet man nu lader X bevæge sig henad Linien og passere D, og man paa denne Maade for sig betragter alle de tilsvarende Punkter Y, som falde i D, naar X gjør det, vil man finde alle de Punkter (XY), som falde sammen i D. Disses Antal bliver helt, idet Antallet af saadanne Punkter Y, der give ζ en bruden Værdi $\frac{p}{q}$, er deleligt med q.

27. Udledelse af Formlerne (3) og (3'). — Vi skulle nu vise, hvorledes vi have anvendt Korrespondanceprincipet til Udledelse af de i 24 opstillede Formler.

Formel (3) er fundet ved at lade X og Y være to af de Punkter, hvori en ret Linie (L) skjæres af en Kurve i Systemet. Gjennem et vilkaarligt Punkt X af Linien gaar der μ Kurver, og hver af dem skjærer den rette Linie i $n-1$ andre Punkter. Til et Punkt X svarer altsaa $\mu(n-1)$ Punkter Y, og omvendt. Altsaa

$$\xi = \eta = \mu(n-1).$$

Punkterne (XY) ere 1) de μ' Punkter, hvori (L) rører Kurver i Systemet, 2) de b Punkter, hvori den skjærer det geometriske Sted for Dobbeltpunkterne (b), 3) de c Punkter, hvori den skjærer det geometriske Sted for Spidserne (c), 4) de α' Punkter, hvori den skjærer Dobbeltlinierne paa Kurverne α'.

Er D et af de μ' Røringspunkter, vil samtidig med X ét af de tilsvarende Punkter Y falde i dette Punkt, idet nemlig én af de μ Kurver gjennem D skjærer (L) i endnu ét Punkt, som falder sammen med D. Nærmer X sig til D, bliver saavel DX som DY uendelig lille af Ordenen $\frac{1}{2}$ (se 2). Det samme maa være Tilfældet med XY. [Man finder $\lim. \frac{XY}{DX} = -2$]. Altsaa bliver $\zeta = 1$, og Punktet D tælles én Gang med blandt Punkterne (XY).

Er D et af de b Skjæringspunkter med Kurven (b), bliver det Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet. Da denne Kurve to Gange gaar igjennem D, maa den tælles to Gange med blandt de μ Kurver gjennem D. Dette fremgaar ogsaa af 2, hvor vi saa, at naar Systemet i dette Tilfælde fremstilles ved Ligning (I), idet D tages til Begyndelsespunkt, vil $x = 0$, $y = 0$ gjøre $\varphi^{(0)} = 0$ og $\varphi^{(1)} = 0$, hvorved to af de Værdier af k, som bestemme Kurver gjennem D, blive Nul. Da hver af de to Kurver skjærer (L) i et Punkt Y foruden det Punkt X, der bestemmer den, vil, naar X falder i D, to tilsvarende Punkter Y ogsaa gjøre det. DX, DY og XY blive, naar X fjerner sig fra D, uendelig smaa af samme Orden, idet Vinklerne i Trekanterne XYU og DXU, hvor U er Dobbeltpunktet paa Kurven gjennem X og Y, ere endelige. De aldeles specielle Tilfælde, hvor dette ikke finder Sted —

i hvilke forøvrigt Punktet D blot paa éngang vilde være et Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet og et Røringspunkt med (L), eller Dobbeltpunkt paa to Kurver i Systemet — kunne nemlig undgaas ved Valget af (L). Vi have saaledes $\zeta = 1$ og finde altsaa, at to Punkter (XY) falde i et saadant Punkt D. (D bliver Dobbeltpunkt paa Hjælpekurven Z).

Er D et af de c Skjæringspunkter med Kurven (c), bliver det en Spids paa en Kurve i Systemet. Det ses, paa samme Maade som i foregaaende Tilfælde, at, naar X falder i D, to tilsvarende Punkter Y ogsaa gjøre det. Da en ret Linie, hvis Afstand fra en Spids paa en Kurve er uendelig lille af første Orden, i Almindelighed skjærer Kurven i to Punkter, hvis Afstand er uendelig lille af Ordenen $\frac{3}{2}$, ser man, at XY bliver proportional med $DX^{\frac{3}{2}}$. I Punktet D falder saaledes $\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$ Punkter (XY) sammen. — (Punktet D bliver en Spids paa Hjælpekurven (Z), der tillige har Linien (L) til Tangent i dette Punkt.)

Er D endelig Skjæringspunktet med Dobbeltlinien paa en Kurve α', vil man, naar denne ikke rører Systemets Indhyllingskurve, ifølge 14 og 10 gjennem et Punkt X, der nærmer sig til D, kun kunne lægge én Kurve, der nærmer sig til α', og Afstandene fra D til dennes Skjæringspunkter X og Y blive af Ordenen $\frac{1}{2}$. Man finder da, som naar D var et af de μ' Røringspunkter, $\zeta = 1$. Naar derimod Dobbeltlinien paa α' rører Indhyllingskurven, falde to blandt de μ Kurver gjennem D sammen i Kurven α' (fire, hvis den desuden forekommer to Gange i Systemet — se 14), og DX og XY blive da begge uendelig smaa af første Orden, altsaa $\zeta = 1$. Det ses saaledes, at der i Punktet D falder 1, 2, 4 Punkter (XY) i de Tilfælde, hvor vi have angivet, at den særegne Kurve tælles 1, 2, 4 Gange med i Tallet α'. Der vil overhovedet falde et Punkt (XY), for hver Gang Kurven tælles med i α'.

Korrespondanceprincipet giver altsaa

$$2(n-1)\mu = \mu' + 2b + 3c + \alpha',$$

som netop er Formlen (3).

Dualitetsprincipet giver Formlen (3'). Dens med den her anførte Udledelse af (3) analoge Udledelse vilde bestaa i, at man søgte sammenfaldende Stillinger (XY) af Linier X og Y fra et fast Punkt, som røre en og samme Kurve i Systemet.

28. Udledelse af Formlerne (4)—(8) og (4')—(8'). — Formlerne (4)—(8) finder man som (3') ved at søge sammenfaldende Stillinger (XY) af til hinanden svarende Linier X og Y fra et fast Punkt. Linien X gaar gjennem et Dobbeltpunkt [(4) og (6)], eller en Spids [(5), (7) og (8)] paa en Kurve i Systemet. En tilsvarende Linie Y rører den samme Kurve [(4) og (5)] eller gaar gjennem et (andet) Dobbeltpunkt [(6) og (7); andet Dobbeltpunkt i (6)] eller en anden Spids [(8)]. Tallet η findes da ved først at søge de Kurver i Systemet, som ere i den angivne Forbindelse med en vilkaarlig ret Linie betragtet som Linie X. Disses Antal bliver

$$\text{i} \quad (4), \quad (5), \quad (6), \quad (7), \quad (8)$$
$$\text{henholdsvis} \quad b, \quad c, \quad b, \quad c, \quad c.$$

Dernæst søger man for hver af disse Kurver Linierne Y, hvis Antal blive

$$n', \quad n', \quad d-1, \quad d, \quad e-1.$$

Man finder da

$$\eta = n'.b, \quad n'.c, \quad (d-1).b, \quad d.c, \quad (e-1).c.$$

Paa samme Maade finder man

$$\xi = d.\mu', \quad e.\mu', \quad (d-1).b, \quad e.b, \quad (e-1).c,$$

hvorefter Antallet af sammenfaldende Linier bliver $\xi + \eta$.

For nu at finde Koefficienterne paa højre Side af Lighedstegnet benytter man for det første den samme Fremgangsmaade som her til at bestemme de Linier Y, som falde sammen med særegne Stillinger af Linien X, idet man for hver af disse først søger dem blandt de b eller c Kurver, som give saadanne Linier, og dernæst for hver af disse Kurver dem blandt de n', $d-1$, d, $e-1$ Linier Y, som falde sammen med X. Hvormange Gange saa enhver af disse Linier Y skal tælles med i det fundne Tal $\xi + \eta$, afgjøres ved Reglen i 26, idet Ordnerne af de forskjellige uendelig smaa Størrelser ere fundne i vort første Afsnit eller bero paa bekjendte Egenskaber ved Dobbeltpunkter og Spidser. Man vil ved disse Betragtningsmaader netop komme til de i 24 angivne Resultater.

Dualitetsprincipet giver Ligningerne (4′)—(8′).

29. Hjælpesætninger til Udledelse af Ligningerne (9)—(14) og (9′)—(14′). — I Beviserne for Ligningerne (9)—(14) har man Brug for følgende Hjælpesætninger:

1) Det geometriske Sted for Røringspunkterne mellem Kurverne i Systemet og Tangenter fra et fast Punkt A er af Ordenen $\mu + \mu'$; thi det gaar μ Gange igjennem A (Røringspunkt med de μ Kurver, som gaa derigjennem), og skjærer desuden en vilkaarlig ret Linie derigjennem i μ' Punkter.

2) Det geometriske Sted for de $n-2$ Punkter, hvori en Tangent fra et fast Punkt A til en Kurve i Systemet skjærer samme Kurve, er af Ordenen $(n'-2).\mu + (n-2).\mu'$; thi det gaar $(n'-2).\mu$ Gange gjennem A og skjærer desuden en ret Linie derigjennem i $(n-2).\mu'$ Punkter.

3) Det geometriske Sted for de $n-2$ Punkter, hvori en ret Linie fra et fast Punkt A til et Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet skjærer Kurven foruden i Dobbeltpunktet, er af Ordenen $d.\mu + (n-2).b$, og 4) det geometriske Sted for de Punkter, hvori en ret Linie fra et fast Punkt til en Spids paa en Kurve i Systemet skjærer Kurven foruden i Spidsen, er af Ordenen $e.\mu + (n-2).c$; thi de geometriske Steder gaa henholdsvis $d\mu$ og $e\mu$ Gange gjennem det faste Punkt og skjære desuden en ret Linie gjennem samme i $(n-2).b$ eller $(n-2).c$ Punkter.

Det vilde ikke være vanskeligt ogsaa at bevise de her anførte Sætninger ved Korrespondanceprincipet.

Blandt de Sætninger, som faas ved Anvendelse af Dualitetsprincipet, blive de to første kun andre Former for dem, hvortil de svare.

30. Udledelse af Ligningerne (9) — (14) og (9') — (14'). — Venstre Side $(n-2).\mu' + (n+n'-4).\mu$ i Ligning (9) angiver Antallet af de Tangenter fra et fast Punkt A til Kurver i Systemet, for hvilke Røringspunktet falder sammen med et af de $(n-2)$ Punkter, hvori Tangenten skjærer Kurven. Dette Antal kan man finde ved Korrespondanceprincipet, idet man søger Antallet af sammenfaldende Stillinger (XY) af Linier X og Y, som forbinde et andet fast Punkt B med Røringspunktet for en Tangent fra A til en Kurve i Systemet og med et af den samme Tangents $n-2$ Skjæringspunkter. Man faar da ifølge 29

$$\xi = (n'-2).\mu + (n-2).\mu', \quad \eta = (n-2)(\mu+\mu').$$

Antallet $\xi+\eta$ af Linier (XY) vil imidlertid foruden Linier fra A til de søgte Tangenters Røringspunkter indbefatte Linien BA $(n-2)\mu'$ Gange. De søgte Tangenters Antal bliver da

$$(n'-2).\mu + (n-2).\mu' + (n-2)(\mu+\mu') - (n-2).\mu' = (n-2).\mu' + (n+n'-4).\mu.$$

Højre Side $c'+p+2q$ i Ligning (9) findes ved Hjælp af den nu flere Gange benyttede Regel 26. At Koefficienterne virkelig maa faa de her angivne Værdier (1, 1 og 2), ser man ogsaa ved at tælle de Skjæringspunkter mellem de to første af de i 29 omtalte Kurver [1], som falde i Røringspunkterne for de Linier gjennem A, der give Løsninger af den foreliggende Opgave. Saaledes stemmer den Omstændighed, at q faar Koefficienten 2, dermed, at de to Kurver røre hinanden i de q Spidser, hvis Tangenter gaa gjennem A.

Formlerne (10) — (14) bevises ganske paa samme Maade, idet deres venstre Sider angive følgende Antal:

$(n-2).b+d.\mu$ er Antallet af rette Linier, der forbinde et fast Punkt A med et Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet, som de endnu skjære i et tredie Punkt, der falder sammen med Dobbeltpunktet;

$(n-2).c+e.\mu$ Antallet af Linier, der forbinde A med en Spids paa en Kurve, som de endnu skjære i et tredie Punkt, der falder sammen med Spidsen;

$(n-3)[(n-2).\mu'+2(n'-2).\mu]$ Antallet af Linier gjennem A, som røre en Kurve og endnu engang skjære den i to sammenfaldende Punkter;

$(n-3)[(n-2).b+2d.\mu]$ Antallet af Linier, som forene A med et Dobbeltpunkt paa en Kurve og endnu engang skjære den i to sammenfaldende Punkter.

$(n-3)[(n-2).c+2e.\mu]$ Antallet af Linier, som forene A med en Spids paa en Kurve og endnu engang skjære den i to sammenfaldende Punkter.

---

[1] Det er dog ingenlunde alle Skjæringspunkter udenfor A mellem de to Kurver, som give Opløsninger paa den foreliggende Opgave, men kun saadanne, hvor de to Kurvers sammenfaldende Punkter svare til samme Kurve i Systemet.

Ogsaa disse Antal findes ved Korrespondanceprincipet, idet X og Y ere de Linier, som forene et andet Punkt B med de Punkter af Linier gjennem A, som skulle falde sammen, og idet man fra $\xi + \eta$ fradrager de Linier (XY), som falde i Linien BA.

Dualitetsprincipet giver Formlerne (9')—(14').

31. Direkte Udledelse af Ligninger, som kunne erstatte nogle af Ligningerne i 24. — Idet man ved X og Y betegner de to Punkter, hvori en fast ret Linie (L) skjæres af de to Tangenter i et Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet, finder man, at der er $2p$ Punkter (XY), hvori X og Y falde sammen. Dette kan enten bero paa, at Dobbeltpunktet ligger paa selve den rette Linie, eller derpaa, at de to Tangenter falde sammen. Man finder da

$$2p = 2b + \beta + 2(2d) + 3(de) + (d2e). \tag{15}$$

Dualitetsprincipet giver

$$2p' = 2b' + \beta' + 2(2d) + 3(de) + (d'2e'). \tag{15'}$$

Man kommer til en anden Formel [1] ved at søge Ordenen s af det geometriske Sted for de Punkter, hvori Tangenten til en Kurve i Systemet i et af dens Skjæringspunkter med en ret Linie (M) skjærer den samme Kurve. For at finde Antallet s af dette geometriske Steds Skjæringspunkter med en anden Linie (L) lader man X være et af de Punkter, hvori en Kurve i Systemet skjærer (L), Y et af dem, hvori (L) skjæres af Tangenterne til denne Kurve i dens Skjæringspunkter med (M). Man finder da

$$n.(\mu + \mu') + n.\mu = s + 2\mu + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha' + 2\beta' + 3\gamma'.$$

Men s kan ogsaa bestemmes ved at tælle de Punkter, hvori samme Kurve skjærer selve Linien (M). Man finder

$$s = \mu'(n-2) + q' + 2b + 2c.$$

Indsættelse giver

$$2(n-1)\mu + 2\mu' = q' + 2b + 2c + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha' + 2\beta' + 3\gamma'. \tag{16'}$$

Dualitetsprincipet giver

$$2(n'-1)\mu' + 2\mu = q + 2b' + 2c' + \alpha_1' + 2\alpha_2' + 2\alpha + 2\beta + 3\gamma. \tag{16}$$

De her beviste Ligninger kunne, som vi skulle se i 32, alle udledes af dem, som ere opstillede i 24. Korrespondanceprincipet sætter istand til direkte at bevise mange andre, hvorom det samme gjælder. Disse forskjellige Ligninger kunne tjene til Prøve paa Ligningerne i 24, navnlig til Prøve paa, om der ikke skulde være begaaet Fejl ved Bestemmelsen af Koefficienterne eller glemt Led. Hvis man ikke som her direkte havde bestemt alle Koefficienterne, men kun en Del af dem, kunde disse forskjellige Udledelser af samme

---

[1] Herpaa er min Opmærksomhed henledet ved Maillard's Udledelse af sin Formel D, hvoraf den, som her skal anføres, kun er en meget simpel Udvidelse. — Maillard's Betegnelse N svarer til min Betegnelse $\frac{\alpha_1}{2}$.

Formel tjene til Bestemmelse af ubekjendte Koefficienter. Et endnu større Antal af Midler til denne Bestemmelse faar man ved Anvendelse af Formlerne paa en Række af elementære Systemer af Kurver med givne Plücker'ske Tal, idet da et og samme Tal er Karakteristiken μ' i et af disse og Karakteristiken μ i det paafølgende. Det er i Virkeligheden paa denne Maade, at jeg først har fundet en stor Del af disse Koefficienter, hvorefter jeg har benyttet de fundne Værdier til at finde en Del af de Egenskaber ved Systemets Kurver, som omvendt her i Afhandlingen — efter i første Afsnit at være beviste analytisk — have tjent til Bestemmelse af Koefficienterne (Smlgn. Indledning).

32. Afledte Ligninger. — Ved af de i 24 opstillede Ligninger at borteliminere p, p', q, q', u, u', v, v', x, x', y, y', z, z', α_0, α_0' finder man, idet man tillige tager Hensyn til Plückers Formler,

$$(3n' - 3n + 3d + 5e)\mu - (n-2)(3b+4c) - c' + 3(3d) + 4(2de) + 6(d2e) + 8\gamma_0' = 0, \qquad (17)$$

$$\left.\begin{array}{l} -4(5n' + 4n - 6 + 6d + 9e)\mu + 2(n' + 2n + 6)\mu' + 8(3n-1)b + 18(2n-1)c - 2b' \\ -4(2d) - 12(de) - 9(2e) - 24(3d) - 36(2de) - 63(d2e) + 12\alpha_1' + 24\alpha_2' - 9\beta' - 108\gamma_0' \end{array}\right\} = 0, \qquad (18)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2(2n' - 12n + 12 + 3d + 6e)\mu - 2(n-6)\mu' - 6(n-5)b - 6(n-6)c \\ +2(2d) + 3(de) + 6(3d) + 6(2de) + 5(d2e) + 4\alpha'_1 + 8\alpha_2' + \beta \end{array}\right\} = 0, \qquad (19)$$

$$\left.\begin{array}{l} (48n - 48 - 5e)\mu - 24\mu' - 48b - (5n+54)c + 1(de) + 6(2e) \\ +5(2de) + 18(d2e) - 12\alpha_1' - 24\alpha'_2 + 6\beta' + 48\gamma_0' + 2\gamma \end{array}\right\} = 0, \qquad (20)$$

samt de Ligninger, som dannes heraf ved at ombytte mærkede og ikke-mærkede Bogstaver, hvilke vi ville betegne med (17'), (18'), (19'), (20'). Ombytningen af Mærker har, som det vil erindres, ingen Indflydelse paa $(2d)$, (de), $(2e)$, og γ_1. Ovenstaaende Ligninger dannes ved at finde x, y, z, p og q af (6), (7), (8), (10), (11) og indsætte i (9), hvorved (17) findes, i (13) og (14), hvorved u og v findes, dernæst Udtrykkene u og v i (12), hvorved (18) findes, og endelig Udtrykkene for p, q, u og v i (4) og (5), hvorved (19) og (20) findes, idet overalt α' bortskaffes ved Ligning (3).

Man vil dernæst finde, at Ligningen

$$2[(17)-(17')] + 1[(18)-(18')] + 3[(19)-(19')] + 2[(20)-(20')] = 0,$$

hvor (17), (17') o. s. v. betegne de venstre Sider i Ligningerne af samme Navn, er identisk. Det viser sig saaledes, at én af de i 24 opstillede Ligninger kan udledes af de andre. Man finder let, at det samme ikke gjælder om flere.

Af Ligningerne (17), (18), (19), (20) samt Ligningerne (3) og (3') i 24, som vi ogsaa ville hidsætte her, skrevne saaledes

$$2(n-1)\mu - \mu' - 2b - 3c - \alpha' = 0, \qquad (3)$$

$$2(n'-1)\mu' - \mu - 2b' - 3c' - \alpha = 0, \qquad (3')$$

udledes en mærkelig Ligning ved Operationen

$$-2\,(3) - 5\,(3') + 20\,(17) + 5\,(18) + 10\,(19) + 8\,(20).$$

Man finder

$$-15\mu + 4c - 5c' + 2(de) + 3(2e) - (d\,2e) + 5\alpha + 10\beta + 16\gamma + 2\alpha_0' + 6\alpha_1' + 10\alpha_2' + 3\beta' + 4\gamma_0' = 0, \tag{21}$$

hvor de Plücker'ske Tal ere bortskaffede, uden at derfor Ligningerne ere blevne af mere end første Grad med Hensyn til Tallene μ, c .... Man finder ligeledes

$$-15\mu' + 4c' - 5c + 2(de) + 3(2e) - (d'2e') + 5\alpha' + 10\beta' + 16\gamma' + 2\alpha_0 + 6\alpha_1 + 10\alpha_2 + 3\beta + 4\gamma_0 = 0. \tag{21'}$$

Ved mellem Ligningerne (10), (15) og (3) at borteliminere p og α_0' kommer man paany til Ligning (19), og ved mellem (11), (16) (20) (3) og (3') at borteliminere q og de Led, der indeholde Plücker'ske Tal, kommer man paany til (21). Ligningerne (15) og (16) maa da som allerede angivet høre med til dem, der kunne udledes af de i 24 opstillede Ligninger.

33. Kurver i et System, som tilfredsstille en given Betingelse. — Da en Betingelse, som en Kurve i et System skal tilfredsstille, i Almindelighed kan føres tilbage til den, at Punkter af en ret Linie eller Linier i et Bundt skulle falde sammen, kan man anvende Korrespondanceprincipet til at bestemme saadanne Kurvers Antal. Man finder dette Antal udtrykt ved de i Nr. 24 omtalte 40 Tal eller, paa Grund af de 23 Ligninger, som finde Sted mellem disse, ved 17 af dem. Man finder i Almindelighed ved denne Fremgangsmaade ogsaa lineære og homogene Udtryk for de nye Antal. Blandt herhen hørende Bestemmelser — der forøvrigt ikke ere væsentlig forskjellige fra Bestemmelserne af 23 blandt de allerede omtalte 40 Antal ved de 17 andre — maa nævnes Bestemmelsen af Ordenen af geometriske Steder og Klassen af Indhyllingskurver for Punkter og Linier, der ere forbundne med Systemets Kurver. En saadan Orden eller Klasse beror nemlig paa Antallet af de Kurver i Systemet, der have et af vedkommende Punkter beliggende paa en fast ret Linie eller en af vedkommende rette Linier gaaende gjennem et fast Punkt.

Af de her omtalte Bestemmelser af Kurver i et System, der tilfredsstille en given Betingelse, har Chasles som bekjendt først foretaget en overordentlig stor Mængde for Keglesnittenes Vedkommende (1). De fundne Antal afhænge alene af μ og μ', idet μ, μ', α_2 og α_2' i dette Tilfælde ere de eneste af de 40 Tal, som ikke blive Nul, og idet α_2 og α_2' udtrykkes ved μ og μ' ved Ligningerne (3) og (3'), som give

$$\alpha_2' = 2\mu - \mu', \quad \alpha_2 = 2\mu' - \mu.$$

(1) I *Comptes rendus* navnlig i 1864.

Chasles's Methode til derefter at bestemme Antallet af Keglesnit, der tilfredsstille 5 hvilkesomhelst saaledes undersøgte Betingelser, er bekjendt.

For Systemer af Kurver med hvilkesomhelst Plücker'ske Tal haves fremdeles Chasles's, i Indledningen omtalte, vigtige Sætning, at et System indeholder $n_1' \mu + n_1 \mu'$ Kurver, der røre en given Kurve af Ordenen n_1 og Klassen n_1'. Hertil skulle vi (foruden Bestemmelsen af de geometriske Steder i 29 og af s i 31) her [1] endnu kun føje nogle faa Exempler.

Det geometriske Sted for de Punkter, hvori en Tangent i et Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet skjærer Kurven foruden i Dobbeltpunktet, er af Ordenen [2]:

$$np + 2d\mu - \begin{bmatrix} 6b + (n-2)\alpha_1 + 2(n-2)\alpha_2 + 2(n-6)\alpha_0' + 2(n-4)\alpha_1' \\ + 2(n-2)\alpha_2' + 2(n-4)\beta' + 3(n-5)\gamma_0' + 3(n-3)\gamma_1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Dette Tal maa være Nul, naar $n = 3$. — Bestemmelsen sker ved at lade X være et af de Punkter, hvori en ret Linie skjæres af en Kurve i Systemet, og Y et af dem, hvor den skjæres af en Tangent i et af dens Dobbeltpunkter. (Overensstemmelsen med Bestemmelsen af s i 31 faar navnlig Betydning derved, at Koefficienterne blive de samme.)

Det geometriske Sted for de Punkter, hvori en Tangent i en Spids paa en Kurve i Systemet skjærer Kurven foruden i Spidsen, er af Ordenen

$$nq + e\mu - [3c + 4\alpha_0' + 2\alpha_1' + 2\beta' + 4\gamma_0' + \gamma_1]. \tag{23}$$

Dette Tal maa være Nul, naar $n = 3$. — Bestemmelsen sker ved at lade X og Y være Punkter, hvori en Kurve i Systemet og Tangenten i en af dens Spidser skjære en ret Linie.

Det geometriske Sted for de Punkter, hvori Forbindelseslinien mellem to Dobbeltpunkter paa en Kurve i Systemet skjærer denne foruden i Dobbeltpunkterne, er af Ordenen

$$nx + \frac{d(d-1)}{2}\mu - \begin{bmatrix} 2(d-1)b + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\alpha_1 + 2\frac{(n-2)(n-3)}{2}\alpha_2 + 4\frac{(n-6)(n-7)}{2}\alpha_0' \\ + 4\frac{(n-4)(n-5)}{2}\alpha_1' + 4\frac{(n-2)(n-3)}{2}\alpha_2' + 2\frac{(n-4)(n-5)}{2}\beta' \\ + 3\frac{(n-5)(n-6)}{2}\gamma_0' + 3\frac{(n-3)(n-4)}{2}\gamma_1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

---

(1) Jeg haaber snart andetsteds at meddele flere Bestemmelser af Kurver i et System, der tilfredsstille en given Betingelse.

(2) Vi trække ikke de fundne Tal sammen, men lade dem staa saaledes, at det er tydeligt, hvorfra hvert Led hidrører.

Dette Tal maa være Nul, naar $n = 4$. — Til X og Y tages Punkter, hvor en Kurve i Systemet og Forbindelseslinien mellem to af dens Dobbeltpunkter skjære en ret Linie.

Det geometriske Sted for de Punkter, hvori Forbindelseslinien mellem et Dobbeltpunkt og en Spids paa en Kurve i Systemet skjærer denne foruden i Dobbeltpunktet og Spidsen, er af Ordenen

$$ny + de\mu - [2eb + 2dc + 12(n-6)\alpha_0' + 6(n-4)\alpha_1' + 3(n-4)\beta' + 8(n-5)\gamma_0' + 2(n-3)\gamma_1]. \quad (25$$

Dette Tal maa være Nul, naar $n = 4$. Til X og Y tages de Punkter, hvor en Kurve i Systemet og Forbindelseslinien mellem et af dens Dobbeltpunkter og en af dens Spidser skjære en ret Linie.

Det geometriske Sted for de Punkter, hvori Forbindelslinien mellem to Spidser paa en Kurve i Systemet skjærer denne foruden i Spidserne, er) af Ordenen

$$nz + \frac{e(e-1}{2}\mu - \left[2(e-1)c + (9+4)\alpha_0' + 2\alpha_1' + \beta' + \frac{4.3}{2}\gamma_0'\right]. \qquad (26)$$

Dette Tal maa være Nul, naar $n = 4$. — Til X og Y tages Punkter, hvori en Kurve i Systemet og Forbindelseslinien mellem to af dens Spidser skjære en ret Linie.

Hvis man paa lignende Maade søger Antallene af Kurver, paa hvilke tre særegne Punkter ligge ud i en ret Linie, ville disse være Nul, naar $n = 5$, hvorved man ogsaa i dette Tilfælde finder Ligninger mellem de 40 Tal.

Om end de Ligninger, man ad denne Vei finder for $n = 3$ og $n = 4$, ogsaa kunne udledes af Ligningerne i 24, naar man tager Hensyn til, at i disse Tilfælde en Del af Størrelserne $(p', v' \ldots (2d'e') \ldots)$ ere Nul, ville de dog blive os nyttige, dels fordi de tildels blive simplere end dem i 24, dels fordi de føre os til nye vigtige Formler. I de Systemer, hvor de i (22)—(26) udtrykte Tal blive Nul, vil man nemlig let kunne finde Udtryk for Antallet af de Kurver i Systemet, som have et Dobbeltpunkt eller en Spids i et givet Punkt, hvorigjennem Systemets Kurver skulle gaa. De p, q, x, y, z Tangenter i eller Forbindelseslinier mellem særegne Punkter, som gaa gjennem et saadant givet Punkt P, maa nemlig enten høre til Kurver, der have et særeget Punkt i P, eller til Kurver, hvoraf en retliniet Gren gaar igjennem P, idet man ellers vilde faa rette Linier, der skar en Kurve af tredie eller fjerde Orden i mere end 3 eller 4 Punkter. De Koefficienter, hvormed disse forskjellige Slags Kurver forekomme i Udtrykkene for p, q, x, y, z, ville fremdeles være de samme som dem, de tilsvarende Led have i (22)—(26). Heraf skulle vi gjøre Brug i 35—39 og i næste Afsnit.

Det er klart, at man kan anvende Dualitetsprincipet paa de her udviklede Sætninger.

34. Anvendelse paa Systemer, hvor $d = e = 0$. — De i det foregaaende udviklede Resultater ere anvendelige paa Systemer, som ikke indeholde andre Kurver med Mangefoldsgrene end Kurverne α og α'. De ville da kunne anvendes paa alle Systemer af Kurver af n'te Orden, som gaa gjennem mere end $\frac{n^2-n+2}{2}$ givne Punkter, og hvor blot Kurverne α ere de eneste særegne Kurver, som have dobbelt Toppunkt uden samtidig at have dobbelte retliniede eller krumliniede Grene. En Kurve sammensat af en dobbelt ret Linie og en Restkurve af Ordenen $n-2$ kan nemlig højst bringes til at gaa gjennem $\frac{(n-2)(n+1)}{2} + 2 = \frac{n^2-n+2}{2}$ givne Punkter, og en Kurve med en krum Dobbeltgren vil kun kunne bringes til at gaa gjennem et endnu mindre Antal Punkter.

Indenfor den anførte Grænse kan man da anvende de af Formlerne i 24, som ikke udtrykkelig forudsætte Tilstedeværelsen af særegne Punkter, paa Systemer af Kurver af n'te Orden uden Dobbeltpunkter og Spidser. For disse Systemers Vedkommende maa man, naar $n > 2$, have

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = (2d) = (de) = (2e) = (3d) = (2de) = (d2e) = 0,$$
$$p = q = u = v = x = y = z = 0,$$

dels umiddelbart paa Grund af disse Tals Betydning dels paa Grund af 8. Man finder da ([1]), idet $n' = n(n-1)$, $d' = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$, $e' = 3n(n-2)$:

$$\begin{aligned}
b' &= 2n(n-2)(n-3)\,.\,\mu \\
c' &= 3n(n-2)\,.\,\mu \\
\alpha &= \alpha_0 = 3(n-1)^2\,.\,\mu \\
p' &= (n-3)(2n^2+5n-6)\,.\,\mu \\
q' &= 6(n-1)\,.\,\mu \\
u' &= \tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)(5n^2+5n-6)\,.\,\mu \\
v' &= 3(n-3)(n^2+2n-2)\,.\,\mu \\
x' &= \tfrac{1}{2}(n-3)(2n^6-8n^5-16n^4+96n^3-40n^2-199n+90)\,.\,\mu \\
y' &= \tfrac{3}{2}(n-3)(n^5+3n^4-28n^3+20n^2+76n-40)\,.\,\mu \\
z' &= 3(3n^4-12n^3+39n-20)\,.\,\mu \\
(3d') &= (n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)\,.\,\mu \\
(2d'e') &= 3(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)\,.\,\mu \\
(d'2e') &= 6(n-3)(3n-2)\,.\,\mu
\end{aligned}$$

([1]) Nogle af disse Udtryk ere fundne af de Jonquières, som ogsaa har angivet den ovenfor nævnte Grænse for deres Anvendelighed. Se Crelle Borchardt Journal 66de Bd. og tidligere Afhandlinger.

35. Systemerne $n=3$, $d=0$, $e=1$. — Det vil i tredie Afsnit vise sig, at naar en Kurve er sammensat af en dobbelt ret Linie og en Restkurve, er et Skjæringspunkt mellem den dobbelte Gren og Restkurven mindst et dobbelt Toppunkt, hvis der ikke falder to Dobbeltpunkter sammen i dette Punkt. En Kurve af tredie Orden og Klasse, sammensat af en enkelt og dobbelt retliniet Gren, vilde da foruden disse Grenes Skjæringspunkt kun have ét Toppunkt. Den kunde da kun underkastes 5 elementære Betingelser (gaa gjennem givne Punkter og røre givne Linier), medens Systemer af Kurver af tredie Orden og Klasse underkastes 6 Betingelser. Kurver med en dobbelt retliniet Gren høre altsaa ikke til disse Systemers sædvanlige særegne Kurver (se 4). Det samme ses om tredobbelte rette Linier med tre Toppunkter. Naar derimod én af de elementære Betingelser ombyttes f. Ex. med den at skulle have Spidsen paa en given Kurve, træffer man disse to Slags særegne Kurver. — Paa samme Maade ser man, at Kurver sammensatte af tre rette Linier gjennem samme Punkt ikke høre til de sædvanlige særegne Kurver. [Se forøvrigt 58].

Kurverne γ_1 ($=\gamma_1'$) ville være sammensatte af et Keglesnit og en Tangent til samme. Derimod bliver

$$\alpha=\beta=\gamma_0=\alpha'=\beta'=\gamma_0'=(2d)=(de)=(2e)=(3d)=(2de)=(d2e)=(3d')=(2d'e')$$
$$=(d'2e')=0,$$
$$p=p'=u=u'=v=v'=x=x'=y=y'=z=z'=0.$$

Naar man da holder sig til Systemer med sædvanlige særegne Kurver, faar man af Formlerne i 24 — eller saadanne, som kunne træde i Stedet for disse, se 31 og 33 —

$$2\gamma_1=\mu+\mu',$$
$$3c=4\mu-\mu', \qquad 3c'=4\mu'-\mu,$$
$$6q=7\mu-\mu', \qquad 6q'=7\mu'-\mu.$$

Hvis man ved $[c]$ betegner Antallet af Kurver, der have et givet Punkt, hvorigjennem Systemets Kurver skulle gaa, til Spids, ved $[\gamma_1]$ Antallet af Kurver γ_1, hvis retliniede Gren gaar gjennem et saadant givet Punkt — og ved $[c']'$ Antallet af de Kurver, der have en given ret Linie, som Systemets Kurver skulle røre, til Vendetangent, ved $[\gamma_1]'$ Antallet af de Kurver γ_1, hvis Toppunkt ligger paa en saadan Linie —, finder man desuden ved (23) [se desuden Slutning af 33], at

$$3[c]=q-[\gamma_1], \qquad 3[c']'=q'-[\gamma_1]'.$$

γ_1, $[\gamma_1]$ og $[\gamma_1]'$ bero kun paa Bestemmelse af Keglesnit. Tallene μ, μ', c, c', q, q', $[c]$, $[c']$ kunne da findes, naar man kjender ét af dem eller en Relation mellem dem. I et System ($3\,P$, $3\,L$), som gaar gjennem 3 givne Punkter og rører 3 givne rette Linier, er saaledes $\mu=\mu'$, idet de her omtalte Kurver ligesom Keglesnittene svare dualistisk til sig selv. Dette Systems Karakteristiker kunne da bestemmes. Derefter vil man kjende en af Karakteristikerne i de nærmeste Systemer ($4\,P$, $2\,L$) og ($2\,P$, $4\,L$), og saaledes kan

man efterhaanden bestemme Karakteristikerne i alle de elementære Systemer. Ved Udtrykket for $[c]$ undgaar man særskilt at skulle undersøge Systemer af Kurver med Spidsen i et givet Punkt, hvilke indeholde usædvanlige særegne Kurver.

I det følgende skulle vi ved $[b]$ og $[c]$ betegne de Kurver, som have et Dobbeltpunkt eller en Spids i et givet Punkt, hvorigjennem Systemets Kurver skulle gaa, og ved $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, $[\alpha']$, $[\beta']$, $[\gamma']$, de Kurver α_1, α_2, α', β', γ', hvis enkelte eller dobbelte retliniede Grene gaa igjennem et saadant Punkt. I tredie Afsnit ville $[\xi]$, $[\eta]$ ... have en tilsvarende Betydning, — $[b']'$ $[c']'$ $[\beta]'$, $[\gamma]'$ o. s. v. have de Betydninger, som svare dualistisk til $[b]$, $[c]$, $[\beta']$, $[\gamma']$ o. s. v.

36. Systemerne $n = 3$, $d = 1$, $e = 0$. — Heller ikke her vil der sædvanligvis være andre Kurver med Mangefoldsgrene end Kurverne α_1. (Se Exempel til 13). Man har

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = (2d) = (de) = (2e) = (3d) = (2de) = (d2e) = (3d') = (2d'e') = (d'2e') = 0,$$

$$q = u = v = x = y = z = p' = u' = v' = x' = y' = 0.$$

Man finder da ved Formlerne i 24, samt ved (22) og (26)

$$\beta = 2\mu, \quad 2\alpha_1 = 3\mu' - 2\mu,$$
$$2b = 4\mu - \mu', \quad 2p = 6\mu - \mu',$$
$$2c' = 3\mu', \quad 2q' = 2\mu + 3\mu', \quad 2z' = 3\mu',$$
$$6[b] = p - [\alpha_1], \quad 4[c']' = z' - 2[\alpha_1]' - [\beta]',$$

hvoraf man, naar α_1 og β samt $[\alpha_1]$, $[\alpha_1]'$ og $[\beta]'$ forud ere bestemte ved Læren om Keglesnit og 35, kan finde de øvrige Tal. — Chasles's Hypothese, at Antallet af Kurver, som tilfredsstille en given Betingelse, som er uafhængig af dem, der bestemme Systemet, skal være en lineær og homogen Funktion af μ og μ', bekræftes for de her og i 35 omtalte Systemers Vedkommende, saalænge de kun indeholde sædvanlige særegne Kurrver.

37. Systemer $n = 4$, $d = 1$, $e = 2$. — I Systemer af fjerde Orden med tre særegne Punkter vil man «sædvanligvis» heller ikke træffe andre Kurver med Mangefoldsgrene end Kurverne α og α'. Blandt disse Systemer behøve vi ikke at omtale dem med 3 Spidser — altsaa af tredie Klasse — da deres Egenskaber faas ved Anvendelse af Dualitetsprincipet paa dem, der ere omtalte i 36.

I Systemer af Kurver af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt og to Spidser er

$$\alpha = \alpha' = \gamma_0 = \gamma_0' = (2d) = (3d) = (3d') = (2de) = (2d'e') = 0,$$

medens Kurverne $(2e)$ ere sammensatte af to Keglesnit, som have Trepunktsrøring, og Restkurverne γ_1, β' og β henholdsvis ere dem, der ere omtalte i 35 og 36, og de nysnævnte

af tredie Klasse. Man har desuden $x = x' = u = u' = 0$. Man finder nu

$$9\beta = -2\mu + 5\mu' + 4(b-b'), \qquad 9\beta' = -2\mu' + 5\mu + 4(b'-b),$$
$$3\gamma_1 = \mu + \mu',$$
$$3(2e) = \mu + \mu' - (b + b'),$$
$$3c = 6\mu - \mu' - 2b, \qquad 3c' = 6\mu' - \mu - 2b',$$
$$9p = \mu + 2\mu' + 16b + 2b', \qquad 9p' = \mu' + 2\mu + 16b' + 2b,$$
$$9q = 19\mu - \mu' - 8b + 2b', \qquad 9q' = 19\mu' - \mu - 8b' + 2b,$$
$$3v = 4\mu + 2\mu' - 2b', \qquad 3v' = 4\mu' + 2\mu - 2b,$$
$$3y = 2\mu + 2b, \qquad 3y' = 2\mu' + 2b',$$
$$9z = 8\mu - 2\mu' - 4b + b', \qquad 9z' = 8\mu' - 2\mu - 4b' + b,$$
$$3(de) = b + b',$$
$$9(d2e) = 4\mu - \mu' + b - b', \qquad 9(d'2e') = 4\mu' - \mu + b' - b,$$

og ved (25) og (26)

$$4[b] + 2[c] = y - 2[\gamma_1], \qquad 4[b']' + 2[c']' = y' - 2[\gamma_1]',$$
$$2[c] = z - [\beta'], \qquad 2[c']' = z' - [\beta]'.$$

Idet man ved Hjælp af det foregaaende kan bestemme β, β', γ_1 samt $[\beta]'$, $[\beta']$, $[\gamma_1]$ og $\gamma_1]'$, kan man finde alle de her anførte Tal for elementære Systemers Vedkommende paa samme Maade som i 35, idet ogsaa de her betragtede Kurver af fjerde Orden og Klasse ere «dualistiske». $(2e)$ kan ogsaa bestemmes direkte ved Hjælp af den Sætning, at der i et Keglesnitsystem (μ, μ') er $3(\mu\mu_1 + \mu'\mu_1')$ Keglesnit, som have Trepunktsrøring med Keglesnit i et andet System $(\mu_1\ \mu_1')$.

Antallet af Kurver, der tilfredsstille en given Betingelse, udtrykkes her ved fire Tal (μ, μ', b, b'), saalænge Systemet kun indeholder sædvanlige særegne Kurver.

38. Systemer $n = 4$, $d = 2$, $e = 1$. — I disse Systemer er

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha' = \beta' = \gamma_0' = (2e) = (3d) = (d2e) = (3d') = (2d'e') = 0.$$

Kurverne γ_0 ere sammensatte af to Keglesnit. Restkurverne α_1, γ_1 og β ere de, der ere omtalte i 35, 36 og 37. Idet tillige $z = u' = 0$, finder man blandt andet

$$\mu' = 6\mu - 2b - 3c,$$
$$\alpha_1 = \mu - 2b + 4x,$$
$$\beta = 4\mu + b - 2x - 3y,$$
$$2\gamma_0 = 3\mu + b + c - 3x - 3y,$$
$$\gamma_1 = \mu - b - 2c + 2y.$$

Disse Formler kunne benyttes til Bestemmelse af Tallene μ, μ', b, c, x og y i de elementære Systemer, naar man blot først kjender én Karakteristik i ét af disse Systemer, hvorefter man ved de øvrige Formler i 24 kan finde de øvrige Tal p, q ...

Man finder saaledes

$$(2\,de) = b + c - x - y.$$

Denne sidste Formel kan ogsaa benyttes ved Karakteristikbestemmelsen, naar man forud har undersøgt de i flere Henseender simplere Systemer, hvor de tre særegne Punkter falde sammen [se Slutningsbemærkning i 57]. Antallet af Kurver, der tilfredsstille en given Betingelse, udtrykkes i Almindelighed ved 5 Tal (μ, b, c, x, y). — Formlerne (24) og (25) give

$$2\,[b] = x - [\alpha_1], \qquad 2\,[b] + 4\,[c] = y - 2\,[\gamma_1].$$

39. Systemer $n = 4$, $d = 3$, $e = 0$. — I disse Systemer er

$$\alpha_2 = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = (de) = (2e) = (2\,de) = (d\,2\,e) = (3\,d') = (2\,d'e') = 0.$$

Kurverne α_0 ere sammensatte af 2 Keglesnit; Restkurverne α_1 og β ere de, som ere omtalte i 36 og 38. Desuden er $q = v = y = z = u' = 0$. De Formler, som vi skulle benytte ved Karakteristikbestemmelsen i de elementære Systemer, ere

$$\mu' = 6\mu - 2\,b,$$
$$\alpha_0 = 3\mu + b - 3\,x,$$
$$\alpha_1 = 3\mu - 4\,b + 4\,x,$$
$$(3\,d) = b - x,$$

idet vi da først maa bestemme Karakteristikerne i de elementære Systemer af Kurver med et tredobbelt Punkt (se 57). Man kunde forøvrigt ogsaa i Stedet for den sidste Formel have benyttet Formlen

$$\beta = 6\mu - 2\,x,$$

naar man forud havde bestemt Karakteristikerne i de i 38 omtalte Systemer. — Antallet af Kurver, der tilfredsstille en given Betingelse, afhænger af 3 Tal μ, b, x. Saaledes er:

$$(2\,d) = 4\,x - 2\,b.$$

Formlen 24 giver

$$4\,[b] = x - [\alpha_1].$$

40. Projektioner af plane Snit i en algebraisk Flade. — Vi skulle endnu her ved et Exempel vise, hvad vi angav i 24, at de der udviklede Formler ved Tilføjelse af supplementære Led ogsaa kunne gjøres anvendelige paa Systemer, som indeholde Kurver med Mangefoldsgrene, og at disse supplementære Led ikke ere vanskelige at bestemme, naar man blot fuldstændig kjender Egenskaberne ved de anførte særegne Kurver.

Et saadant Exempel faar man i det Kurvesystem, som dannes af Centralprojektionerne paa en Plan af en algebraisk Flades Skjæringslinier med Planerne i et Bundt. Vi indskrænke ikke Undersøgelsens Almindelighed ved at antage, at Projektionsplanen er en

Plan i Bundtet, medens Projektionscentret er vilkaarligt. Henføres Fladen til et Koordinattetraeder, som har et Hjørne i Projektionscentret P, og hvori Projektionsplanen samt den Plan, der projicerer Planbundtets Axe, ere Sideflader $u=0$, $z=0$, vil Systemet fremstilles ved selve Fladens Ligning, idet $\frac{u}{z}=k$ er den foranderlige Parameter. Som specielt Tilfælde haves parallele Snit og Parallelprojektion.

Vi tillægge her Fladen de samme Særegenheder som i mine Afhandlinger i *Mathematische Annalen* (¹) med Undtagelse af de der omtalte koniske Punkter og de tilsvarende særegne Planer — altsaa ogsaa de vigtigste af dem, til hvilke Cayley tager Hensyn i sin Afhandling *On reciprocal surfaces* (²). (De i Parenthes tilføjede Betegnelser ere de, som jeg bruger paa det anførte Sted, og som omtrent falde sammen med Cayley's). Da er for det første

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha'=\beta'=\gamma'=0;$$

$n=\mu$ Fladens Orden (n);
$d=b$ Dobbeltkurvens Orden (b);
$e=c$ Spidskurvens Orden (c);
$n'=\mu'$ Klassen af et plant Snit $(a=a')$;
b' Antallet af Dobbelttangenter, som skjære to givne rette Linier $(\delta+\delta')$;
c' Antallet af Hovedtangenter, som skjære to givne rette Linier $(\varkappa+\varkappa)$;
α_0 Fladens Klasse (n');
β Antallet af «Tangpunkter» (*pinch-points*; j);
γ Antallet af «*close-points* (χ);
$(2d)$ Dobbeltkurvens Klasse (q)
+ det dobbelte af Antallet af Røringspunkter mellem to Net (f);
(de) Antallet af saadanne Skjæringspunkter mellem Dobbeltkurven og Spidskurven, som ikke have nogen yderligere Særegenhed (i);
$(2e)$ Spidskurvens Klasse (r);
$(3d)$ Antallet af Dobbeltkurvens tredobbelte Punkter (t);
$(2de)$ Antallet af Dobbeltkurvens Spidser (γ);
$(d2e)$ Antallet af Spidskurvens Spidser (β).

Endvidere blive $(3d')$, $(2d'e')$, $(d'2e')$ Ordenen og Klassen af de vindskjæve Flader, som ere geometriske Steder for Linier, der have enten tre Røringer eller en Trepunktsrøring og en Topunktsrøring eller Firpunktsrøring med den givne Flade. — Betydningen af d' (δ'), e' $(\varkappa')$, p', q', u', v', x', y', z' forstaas af sig selv.

(¹) 4de Bd. S. 1 og 633.
(²) *Philosophical Transactions* 1869.S. 201.

Kurvesystemet vil indeholde en Kurve, hvis Punkter falde sammen i en n'dobbelt ret Linie i Planbundtets Axe; men det ses i dette Tilfælde, at, idet en Kurve nærmer sig til denne Grænsestilling, blive alle dens Punkters og Liniers Afvigelser fra deres Grænsestillinger samtidig uendelig smaa af første Orden, nemlig naar den Plan, hvis Snit projiceres, danner en uendelig lille Vinkel af første Orden med den Plan i Bundtet, som gaar gjennem Projektionscentret (¹). Paa Grund heraf faar man for det første en simpel Angivelse af Betydningen af p, q ... ved at lade de Linier, hvis Antal betegnes saaledes, udgaa fra et Punkt af den særegne Kurve. Saaledes bliver

$p - 2d$ Klassen af den udfoldelige Flade, der rører den givne langs Dobbeltkurven (ϱ);

$q - e$ Klassen af den udfoldelige Flade, der rører den givne langs Spidskurven (σ);

$x - \frac{d(d-1)}{2}$ Antallet af tilsyneladende Dobbeltpunkter paa Dobbeltkurven ($k - f - 3t$; hos Cayley k);

$y - de$ Antallet af tilsyneladende Skjæringspunkter mellem Dobbeltkurven og Spidskurven;

$z - \frac{e(e-1)}{2}$ Antallet af tilsyneladende Dobbeltpunkter paa Spidskurven (h).

Man ser fremdeles, at den særegne Kurve ikke vil fremkalde nogen Ændring af Formlerne (3'), (4), (5), (6), (7), (8), men at den vil bevirke, at man i de øvrige Formler i 24 maa tilføje supplementære Led, nemlig

i (3), (4'), (5'), (6'), (7'), (8'), (9), (9'),
$n(n-1)$, nd', ne', $d'(d'-1)$, $d'e'$, $e'(e'-1)$, $n'(n-2)$, $n(n'-2)$,

(10), (10'), (11), (11'), (12), (12'), (13)
$d(n-2)$, $d'(n'-2)$, $e(n-2)$, $e'(n'-2)$, $n'(n-2)(n-3)$, $n(n'-2)(n'-3)$, $d(n-2)(n-3)$

(13'), (14), (14')
$d'(n'-2)(n'-3)$, $e(n-2)(n-3)$, $e'(n'-2)(n'-3)$.

De saaledes omformede Ligninger og de reciproke Ligninger — som man faar ved den tilsvarende Undersøgelse af det System, som dannes af en Plans Skjæringskurver med omskrevne Keglefiader med Toppunkter paa en ret Linie — ville blandt andet indbefatte Salmon's og Cayley's Relationer mellem Antallene af en Flades Særegenheder, paa én Relation nær (²). Idet man ligeledes kan undersøge Systemet af Projektioner af

(¹) Skal den her omtalte særegne Kurve svare til $k = 0$, maa man i Fladens før omtalte Ligning sætte $\frac{u}{z} = \frac{1}{k}$.

(²) Hvorledes ogsaa denne kan bevises ved Korrespondanceprincipet, har jeg vist i min Note i *Mathematische Annalen* 4. Bd. 633.

Snit dannede af Dobbeltkurvens eller Spidskurvens oskulerende Planer o. s. v., og idet man paa disse og de ovenfor nævnte Systemer ogsaa kan anvende Undersøgelserne i 33, ses det, at Læren om Systemer af Kurver faar stor Betydning for en algebraisk Flades Undersøgelse. Resultaterne kunne specielt anvendes paa en udfoldelig Flade og en Kurve, og man vil da kunne komme til de Resultater, som jeg har fundet i min Afhandling om en Rumkurves og en udfoldelig Flades sædvanlige Særegenheder (1). Her at gaa nøjere ind paa disse stereometriske Anvendelser vilde føre os for vidt.

---

(1) *Annali di Matematica,* 2 Række 3die Bd. S. 175. Ogsaa dér benyttes Korrespondanceprincipet.

Tredie Afsnit.

Kurver med Mangefoldsgrene navnlig saadanne, som forekomme i Systemer af Kurver af tredie og fjerde Orden.

---

41. Første Art Kurver med en dobbelt retliniet Gren. — Idet vi først skulle undersøge saadanne Kurver, hvoraf en Del er en dobbelt ret Linie (i 47 en r-dobbelt ret Linie), ville vi lade denne falde i Linien $y = 0$. Vi ville ved de store Bogstaver A, B, C ... betegne Funktioner af x og y, og ved de tilsvarende smaa a, b, c ... de Funktioner af x, som man faar for $y = 0$. Ved tilføjede Mærketal angives den højeste Grad, hvortil disse Funktioner hæve sig med Hensyn til x og y. Ved ψ betegne vi som tidligere en Funktion af x, y og k, der ikke bliver uendelig for $k = 0$, idet k som forhen betegner Systemets Parameter.

Ligningen for et System, hvori $k = 0$ skal give en Kurve med dobbelt retliniet Gren, maa altid være af Formen

$$A_{n-2}y^2 + B_n k + \psi k^2 = 0. \tag{I}$$

Naar vi heraf for en vilkaarlig Værdi af x, der blot ikke gjør $a_{n-2} = 0$, ville finde de Værdier af y, som for $k = 0$ blive Nul, faa vi, saafremt blot y ikke er Faktor i B_n, første Led i Rækkeudviklingen efter Potenser af k bestemt ved

$$a_{n-2}y^2 + b_n k = 0 \text{ eller } y = \sqrt{-\frac{b_n}{a_{n-2}}}\, k^{\frac{1}{2}},$$

medens de andre Led derefter bestemmes ad rational Vej. Afstanden mellem de Grene, der nærme sig til $y = 0$, og deres Afstande fra denne deres Grænsestilling blive saaledes for lim. $k = 0$ proportionale med $k^{\frac{1}{2}}$, og eftersom $k \gtrless 0$ ville de Værdier af x, som gjøre $\frac{b_n}{a_{n-2}} \lessgtr 0$ give reelle Værdier af y, medens de, som gjøre $\frac{b_n}{a_{n-2}} \gtrless 0$, give imaginære Værdier. Overgangen sker gjennem de Værdier af x, som gjøre $b_n = 0$ eller $a_{n-2} = 0$. I disse Punkter maa — forsaavidt ikke flere af dem falde sammen og danne særegne Punkter — Grænsekurven ($k = 0$) røre Linierne $x =$ Konstant. Da nu en Ændring af Koordinatsystemet ($x = x' + \beta y'$, $y = y'$), hvorved Linien $y = 0$ bliver uforandret, medens Linien $x = 0$ drejes, ikke har Indflydelse paa $b_n = 0$ og $a_{n-2} = 0$, ses det, at Grænsekurven maa røre enhver Linie gjennem de herved bestemte Punkter. De ere altsaa i Almindelighed Toppunkter.

De ved $b_n = 0$ bestemte Toppunkter ere aabenbart enkelte. For at finde Beskaffenheden af dem, som bestemmes ved $a_{n-2} = 0$, ville vi antage, at Kurverne i Systemet og A_{n-2} ikke have særegne Punkter. Dette er her, hvor vi fremstille Kurverne ved Punkt-

koordinater, den mest almindelige Antagelse, til hvilken alle andre kunne henføres som specielle Tilfælde. De $n(n-1)$ Tangenter fra et Punkt til den særegne Kurve blive da 1) de $(n-2)(n-3)$ Tangenter til A_{n-2}, 2) de n Linier gjennem de ved $b_n = 0$ bestemte enkelte Toppunkter, 3) Linierne gjennem de ved $a_{n-2} = 0$ bestemte $n-2$ Skjæringspunkter mellem A_{n-2} og $y = 0$. Da nu

$$n(n-1) - (n-2)(n-3) - n = 3(n-2),$$

ses det, at disse sidste Toppunkter ere tredobbelte.

Dette ser man ad analytisk Vej derved, at disse Skjæringspunkters Afstande fra de nærmeste Punkter af den ved en uendelig lille Værdi af k bestemte Kurve, og derved ogsaa fra Tangenter i disse Punkter, i Almindelighed blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{3}$. Det ses da ogsaa, at blandt de tre Tangenter, der udgaa fra et givet Punkt og falde sammen i en Linie gjennem et af de tredobbelte Toppunkter, er kun den ene reel. (Se Fig. 23).

Man vil, som for Kurverne α_1' og α_2', finde, at Systemets Indhyllingskurve i Almindelighed har Dobbeltpunkter i de n enkelte Toppunkter (Punktet a paa Fig. 23). Derimod vil den ikke gaa gjennem de tredobbelte Toppunkter og ikke røre Linien $y = 0$.

Hvis Kurverne i Systemet og derfor ogsaa Grænsekurven $k = 0$ skulle have Dobbeltpunkter eller Spidser, opnaas dette for Grænsekurvens Vedkommende, dels derved at Restkurven A_{n-2} har saadanne, dels derved at Toppunkter falde sammen. Vi have allerede i det foregaaende havt Exempler herpaa i Kurverne α'. Skal (I) fremstille en Kurve α_2', maa $n-2$ af de ved $b_n = 0$ bestemte enkelte Toppunkter stykkevis falde sammen med de tredobbelte Toppunkter og danne to Dobbeltpunkter (Skjæringspunkter mellem de sammenfaldende Grene og Restkurven), hvorved der kun bliver to virkelige Toppunkter. Skal den fremstille en Kurve α_1' eller α_0', maa A_{n-2} røre $y = 0$ én eller to Gange, og i Røringspunktet maa desuden falde tre af Toppunkterne $b_n = 0$ for i Forening med de to sammenfaldende tredobbelte Toppunkter at danne tre Spidser. Idet der desuden som før skal falde et enkelt Toppunkt sammen med hvert af Skjæringspunkterne mellem A_{n-2} og y, bliver der kun ét eller intet virkeligt Toppunkt tilbage.

Man ser, at de her undersøgte Kurver ikke for $n > 2$ henhøre til de sædvanlige særegne Kurver i et System af Kurver af n'te Orden uden særegne Punkter. De Bestemmelser, ved Hjælp af hvilke man kan bringe dem til at gaa igjennem givne Punkter eller til at røre givne rette Linier, ere nemlig Bestemmelsen af Restkurven, af Dobbeltlinien og af de enkelte Toppunkter. Men disse Bestemmelsers Antal er kun

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} + 2 + n = \frac{n^2 + n + 2}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - 1 - (n-2).$$

For $n = 2$ faar man Kurverne α_2'.

42. Anden Art Kurver med en dobbelt retliniet Gren. — Den i 41 anvendte Bestemmelse af y vil blive ubrugelig, naar B_n indeholder Faktoren y. Ligning (I) omskrives da helst til

$$A_{n-2}\,y^2 + 2\,B_{n-1}\,y\,.\,k + C_n\,.\,k^2 + \psi\,.\,k^3 = 0. \tag{II}$$

Første Led i Rækkeudviklingen for y efter Potenser af k bestemmes da for Værdier af x, der gjøre $a_{n-2} \gtrless 0$, ved Ligningen

$$a_{n-2}\,y^2 + 2\,b_{n-1}\,y\,k + c_n\,k^2 = 0, \tag{III}$$

saa de Grene, der nærme sig til at falde sammen, for lim. $k = 0$ faa Afstande fra deres Grænsestilling og indbyrdes, som ere uendelig smaa af første Orden. Disse Grene ere, uafhængigt af k's Fortegn, reelle eller imaginære, eftersom $b_{n-1}^2 - a_{n-2}\,c_n \gtrless 0$. Ligningen

$$b_{n-1}^2 - a_{n-2}\,.\,c_n = 0, \tag{IV}$$

vil bestemme $2(n-1)$ enkelte Toppunkter.

Vi kunne ved de Plücker'ske Formler bestemme, hvorvidt der i Almindelighed ogsaa falder Toppunkter i de ved $a_{n-2} = 0$ bestemte Skjæringspunkter mellem Restkurven $A_{n-2} = 0$ og Linien $y = 0$, idet vi forudsætte, at Systemets Kurver og Restkurven ikke have særegne Punkter. Det ses da, at de $n-2$ Linier fra et fast Punkt til disse Skjæringspunkter maa tælles som

$$n\,(n-1) - (n-2)\,(n-3) - 2\,(n-1) = 2\,(n-2)$$

Tangenter, saa hvert af de $n-2$ Skjæringspunkter mellem A_{n-2} og y maa være et dobbelt Toppunkt.

Det samme ses ad analytisk Vej. I et saadant Punkt er $a_{n-2} = 0$, medens vi forudsætte, at $b_{n-1} \gtrless 0$, da i modsat Fald et af de $2(n-1)$ enkelte Toppunkter bestemte ved (IV) faldt i samme Punkt. Ligning (III) giver da én Rod, som bestemmer første Led i en af de til dette Punkts Abscisse svarende Værdier af y. Denne bliver for lim. $k = 0$ uendelig lille af første Orden, og da den, naar x varierer, følger kontinuert paa andre uendelig smaa Værdier af y af samme Orden, faas herved en Gren som ikke danner noget Toppunkt. De andre Grene af den ved k bestemte Kurve, som nærme sig til dette Punkt for $k = 0$, maa, da den anden Rod i (III) bliver uendelig, bestemmes ved Værdier af y, hvis Rækker begynde med Potenser af k med lavere Exponent. For at bestemme dem tage vi dette Punkt til Begyndelsespunkt og Tangenten til Kurven A_{n-2} til Axe $x = 0$. Derved bliver

$$A_{n-2} = x + A_2 + A_3 + \ldots.$$

Ligning (II) kan da omskrives til

$$y\,(x + A_2 + A_3 + \ldots) + 2\,B_{n-1}\,k + \frac{k^2}{y}\,\psi = 0, \tag{V}$$

hvor ψ er en ny Funktion af x, y og k. Denne Ligning vil, saalænge y er uendelig lille af lavere Orden end k (altsaa ikke for den allerede undersøgte Gren), give en Rækkeudvikling for de Værdier af x, der ogsaa nærme sig til Nul, som begynder med samme Led, som om Ligningen havde været

$$y(x + A_2 + A_3 + ..) + 2B'.k = 0,$$

hvor B' er en Funktion af x og y med samme konstante Led som B_{n-1}, men som ellers er vilkaarlig. Den kan da bestemmes saaledes, at Ligningen ifølge 13 fremstiller et System, hvori $k = 0$ giver en Kurve α_1 (eller α_2). Vi kunne altsaa paa de Grene af Kurver i Systemet (V), som vi her undersøge, overføre, hvad der i 13 er bevist om de Stykker af Nabokurver til en Kurve α_1, som bestemmes ved Værdier af y, som ere uendelig smaa af lavere Orden end første. Vi se saaledes, at ogsaa her to Grene, foruden den før nævnte, nærme sig til Begyndelsespunktet, som bliver et dobbelt Toppunkt paa Grænsekurven, at Afstandene fra Begyndelsespunktet til de to Grene og til Tangenterne fra et vilkaarligt Punkt blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$, og at de, naar Restkurven ikke er en ret Linie, (tilsammen) have tre Vendetangenter, som med Linien $x = 0$ danne Vinkler af Ordenen $\frac{1}{3}$, medens deres Røringspunkter bestemmes ved Værdier af x og y, som ere uendelig smaa af Ordenerne $\frac{2}{3}$ og $\frac{1}{3}$, samt at Kurverne (c') og (q') røre Linien $x = 0$ i Begyndelsespunktet. — Fremdeles vil — idet vi have forudsat, at $x = 0$ ikke gjør $b_{n-1} = 0$ — ingen Gren af Systemets Indhyllingskurve gaa gjennem dette dobbelte Toppunkt. Derimod vil Indhyllingskurven gaa gjennem de ved (IV) bestemte enkelte Toppunkter og røre Dobbeltlinien $y = 0$ i de ved $c_n = 0$ bestemte n Punkter.

Da man ved at disponere over Restkurven A_{n-2}, over Dobbeltlinien og de $2(n-1)$ enkelte Toppunkter kan bringe denne Kurve til at tilfredsstille

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} + 2 + 2(n-1) = \frac{n(n+3)}{2} - 1$$

elementære Betingelser, hører den ved Ligning (II) fremstillede anden Art af Kurver med en dobbelt retliniet Gren med til de sædvanlige særegne Kurver i Systemer af Kurver uden særegne Punkter, men af en hvilkensomhelst Grad. Deres Antal ville vi betegne ved ξ. — For $n = 2$ ere disse Kurver dog kun en ny Fremstilling af Kurver α_2' og behøve derfor ikke noget nyt Navn.

For $n = 3$ faas en Grænsekurve sammensat af en enkelt ret Linie og en Dobbeltlinie med 4 enkelte Toppunkter. I denne falde alle 8 Vendetangenter sammen. — For $n = 4$ bliver Restkurven et Keglesnit, og Dobbeltlinien faar 6 enkelte Toppunkter. Af Vendetangenterne falde, som sagt, 3 sammen i Restkurvens Tangenter i hvert af de dobbelte Toppunkter, medens de 18 andre falde i Dobbeltlinien. Af Dobbelttangenterne ere de 12 Tangenter fra Toppunkter til Restkurven; de 16 andre falde i Dobbeltlinien.

I Fig. 24 og 25 fremstiller 2 en Kurve ξ sammensat af et Keglesnit og en Dobbeltlinie, der danner Overgangen mellem to Kurver 1 og 3 af fjerde Orden. Bogstaverne a betegne de enkelte Toppunkter paa 2. Det ses, at 1 og 3, naar Overgangskurven er den samme, kunne have to væsentlig forskjellige Former, eftersom Grenene paa en af dem i Nærheden af de to dobbelte Toppunkter ere beliggende paa samme Maade (Fig. 25) eller paa modsat Maade (Fig. 24) i Forhold til Grænsekurven. Havde Kurverne i Systemet været af n'te Orden, havde man faaet 2^{n-3} forskjellige Former.

Naar som paa vore Figurer baade de dobbelte og de enkelte Toppunkter alle ere reelle, og intet af de enkelte Toppunkter skiller de dobbelte, maa Kurven 1 (og 3) bestaa dels af to adskilte Dele, hvoraf Buer nærme sig til Keglesnittet, dels af to flade Ovaler. Figurerne vise, at enten den ene af de førstnævnte Dele har mindst to Dobbelttangenter (Fig. 24), eller at de hver have én (Fig. 25). Disse ville tilsammen med de $\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 24$ Fællestangenter til de fire adskilte Dele give 26 reelle Dobbelttangenter. I saa Fald véd man[1], at de to andre ogsaa maa være reelle, om de end ikke have reelle Røringspunkter. Paa Fig. 24 er dette kun Tilfældet med den ene, idet den Del af Kurven, som har to indadgaaende Buer, har faaet en tredie svagt indadgaaende Bue langs Dobbeltlinien. Paa Fig. 25 have alle 28 Dobbelttangenter reelle Røringspunkter, idet Ovalerne have faaet svagt indadgaaende Buer. Idet alle de fire Dele, hvoraf Kurven 1 eller 3 paa Fig. 25 ere sammensatte, have indadgaaende Buer, ere disse Dele væsentligt de samme som de, hvoraf den Kurve er sammensat, som Plücker[2] benytter til at vise, at alle 28 Dobbelttangenter kunne være reelle. — Af Vendetangenterne ere paa Fig. 24 kun 6 og paa Fig. 25 kun 8 reelle.

Det ses let ved Tegning, at der altid maa ligge et lige Antal enkelte Toppunkter paa hvert af de to Stykker, hvori de dobbelte Toppunkter dele den uendelige Dobbeltlinie. Hvis man i Stedet for som her at have 6 paa det ene, intet paa det andet, havde havt 4 paa det ene, 2 paa det andet[3], kunde kun 8 Dobbelttangenter have reelle Røringspunkter, idet Kurven vilde bestaa af to Dele, hvoraf den ene med fire indadgaaende Buer vilde have 4, den anden, en Oval, ingen Dobbelttangenter. Disse Antydninger vise, hvilken Brug man kan gjøre af Grænsekurverne ved Studiet af Udseendet af Kurver af fjerde Orden.

Medens der paa en Kurve ξ, som skal henhøre til de sædvanlige særegne Kurver i et System af Kurver uden særegne Punkter, ikke falder Toppunkter sammen, kan dette selvfølgelig være Tilfældet, naar enten Kurverne i Systemet skulle have særegne Punkter, eller naar den særegne Kurve ikke skal høre til de «sædvanlige». Vi skulle, hvad angaar det første Tilfælde, senere enkeltvis angive specielle Former af Kuverne ξ, som henhøre til elementære Systemer af fjerde Orden med Dobbeltpunkter. Her skulle vi angaaende det sidste Tilfælde kun bemærke, at naar $n - 2$ af de enkelte Toppunkter stykkevis falde sammen med de $n - 2$ dobbelte Toppunkter, vil Ligning (II), hvor da a_{n-2} maa gaa op i b_{n-1}, kun give en ny Fremstilling af den i 41 omtalte første Art af Kurver med en dobbelt retliniet Gren, eller rettere sagt fremstille et System, hvis Kurver for lim. $k = 0$ paa en ny Maade nærme sig til denne Art Grænsekurver. Denne Fremstillingsmaade maa benyttes, naar Dobbeltlinien skal røre Systemets Indhyllingskurve (specielt gaa gjennem et givet Punkt). De Grene, der nærme sig til et af de tredobbelte Toppunkter,

(1) Plücker; *Theorie der algebraischen Curven* II 122.

(2) *Theorie der algebraischen Curven* II 115.

(3) Man bedes selv at danne sig en Figur.

faa for lim. $k = 0$ Afstande derfra, som ere proportionale med $k^{\frac{2}{3}}$, og Indhyllingskurven vil ikke gaa gjennem disse. Den gaar derimod igjennem hvert af de enkelte Toppunkter. (Smlgn. 14 for Kurverne α''s Vedkommende).

43. Nye Fremstillinger af første og anden Art af Kurver med en dobbelt retliniet Gren. — Udviklingerne i 42 blive ubrugelige, naar Ligning (IV), der skulde bestemme de enkelte Toppunkter, er identisk. Dette kan i Almindelighed finde Sted paa flere forskjellige Maader, blandt disse ogsaa derved, at

$$b_{n-1} = a_{n-2} \,.\, b_1\,;\; c_n = a_{n-2} \,.\, b_1{}^2, \qquad \text{(VI)}$$

og dette er, naar $n = 2$ eller $n = 3$, den eneste Maade[1]. Ligning (II) reduceres derved til Formen

$$A'_{n-2}\, y'^2 + 2B'_{n-1}\, y'k^2 + C'_n k^3 = 0, \qquad \text{(VII)}$$

hvor

$$y' = y + b_1 k, \qquad \text{(VIII)}$$

og hvor A', B' og C' betegne Funktioner af x og y' samt k, men som ikke ere delelige med k, og blandt hvilke i alt Fald A'_{n-2} ikke bliver Nul for $y' = 0$, $k = 0$. Ved A, B og C betegne vi saa nu de Funktioner af x og y, som dannes ved i A', B' og C' at sætte $k = 0$. a, b og c dannes som før af A, B og C ved at sætte $y = 0$. Paa Grund af, at C' indeholder k, behøve vi ikke her som før at tilføje et Restled ψ. Første Led i Rækkeudviklingen for y' bestemmes ved

$$a_{n-2}\, y'^2 + c_n k^3 = 0 \text{ eller } y' = \pm \sqrt{-\frac{c_n}{a_{n-2}}}\, k^{\frac{3}{2}}.$$

Det ses da, at Grænsekurven $A_{n-2}\, y^2 = 0$ har n enkelte Toppunkter bestemte ved $c_n = 0$ og tredobbelte Toppunkter i Skjæringspunkterne mellem A_{n-2} og $y = 0$, saa denne Kurve hører til første Art, saafremt blot y ikke er Faktor i C_n.

Er y Faktor i C_n, kan Ligningen (VII), idet da alle Led i C'_n blive delelige enten med y' eller med k, omkrives til Formen

$$A'_{n-2}\, y'^2 + 2B'_{n-1}\, y'k^2 + C'_n k^4 = 0, \qquad \text{(IX)}$$

som i Almindelighed giver en ny Fremstilling af anden Art Kurver med en dobbelt retliniet Gren (i specielle Tilfælde af første), idet de enkelte Toppunkter bestemmes ved

$$b_{n-1}^2 - a_{n-2}\, c_n = 0.$$

Kun naar denne Ligning bliver identisk, vil dette ikke mere være Tilfældet. Hvis Identiteten som i (VI) hidrører fra, at

$$b_{n-1} = a_{n-2} \,.\, b_1{}'\,;\; c_n = a_{n-2} \,.\, b_1{}'^2,$$

---

[1] Var $a_{n-2} = 0$, vilde nemlig $y = 0$ være en tredobbelt Gren.

hvor b_1' blot betegner en ny Funktion af første Grad af x, kan Ligningen paany omskrives til Formen

$$A''_{n-2}\,y''^2 + 2\,B''_{n-1}y''\,k^3 + C''_n\,k^5 = 0, \tag{X}$$

idet

$$y'' = y' + b_1'\,k^2 = y + b_1\,k + b_1'\,k^2, \tag{XI}$$

og idet A'', B'' og C'' betegne Funktioner af x, y'' og k, som ikke ere delelige med k. (X) behandles som (VII) og fremstiller en Kurve af første Art.

Ved Fortsættelse af samme Fremgangsmaade vil man, naar Grunden til, at Ligningerne $b_{n-1}^2 - a_{n-2}\,c_n = 0$ blive identiske, stadigt er den i (VI) antagne, afvexlende finde Ligninger af følgende to Former:

$$A^{(r)}_{n-2}\,y^{(r)2} + 2\,B^{(r)}_{n-1}\,y^{(r)}\,k^{r+1} + C^{(r)}_n\,k^{2r+1} = 0 \tag{XII}$$

og

$$A^{(r)}_{n-2}\,y^{(r)2} + 2\,B^{(r)}_{n-1}\,y^{(r)}\,k^{r+1} + C^{(r)}_n\,k^{2r+2} = 0, \tag{XIII}$$

hvor

$$y^{(r)} = y + b_1\,k + b'_1\,k^2 + \ldots .\,b_1{}^{(r-1)}\,k^r, \tag{XIV}$$

og hvor $A^{(r)}$, $B^{(r)}$ og $C^{(r)}$ betegne Funktioner af x, $y^{(r)}$ og k, som ikke ere delelige med k. Ligning (XII) fremstiller Kurver, der for lim. $k = 0$ nærme sig til en Kurve med dobbelt retliniet Gren af første Art, og hvori de Grene, der nærme sig til at falde sammen, have Afstande indbyrdes og fra den rette Linie $y^{(r)} = 0$, som ere proportionale med $k^{\frac{2r+1}{2}}$, medens deres Afstande fra Grænsestillingen $y = 0$ ere proportionale med k. Ligning (XIII) fremstiller Kurver, der for lim. $k = 0$ nærme sig til Kurver med en dobbelt retliniet Gren af anden Art (eller hvis a_{n-2} gaar op i b_{n-1}, af første Art), og hvori de Grene, der nærme sig til at falde sammen, have Afstande indbyrdes og fra Linien $y^{(r)} = 0$, som ere proportionale med k^{r+1}, medens deres Afstande fra Grænsestillingen $y = 0$ ere proportionale med k. Slutningerne af disse Regler ville dog ofte undergaa Modifikationer, idet Koefficienter i Udtrykket (XIV) for $y^{(r)}$ forsvinde. Dette vil saaledes finde Sted i (XIII), naar Systemets Kurver skulle gaa gjennem to Punkter af Linien $y = 0$ — altsaa endog i elementære Systemer — eller mere almindeligt, naar Systemets Indhyllingskurve skal røre denne i to Punkter: i saa Fald maa man identisk have $b_1 = 0$, $b_1' = 0$, $\ldots b_1{}^{(r-1)} = 0$; thi ellers vilde det første af disse Udtryk af første Grad, som ikke var Nul, bestemme det eneste Røringspunkt mellem $y = 0$ og Indhyllingskurven (idet vi bortse fra, at, naar $b_1 = 0$, Linien $y = 0$ selv vil udgjøre en Del af Indhyllingskurven). Ere derimod disse Betingelser opfyldte, ville Røringspunkterne mellem $y = 0$ og Indhyllingskurven bestemmes ved $C_n{}^{(r)} = 0$ og have Antallet n. I saa Fald bliver y af Ordenen $r + 1$.

Vi skulle med Hensyn til Undersøgelsen af de tredobbelte og dobbelte Toppunkter nøjes med at betragte Kurver af første Art fremstillede ved (VII) og Kurver af anden Art fremstillede ved (IX). I begge Tilfælde ville vi antage, at vedkommende Toppunkt ligger i

Begyndelsespunktet, og at $x = 0$ er Tangent til Restkurven A_{n-2}, altsaa at $A_{n-2} = x + A_2 + \ldots$, medens

$$A'_{n-2} = x + A'_2 + \ldots + k(a + \ldots).$$

Ligningen for en ret Linie gjennem Begyndelsespunktet bliver

$$x = \alpha y = \alpha(y' - b_1 k).$$

Idet vi nu ved b_0 betegne det konstante Led i b_1, og ved b og c de konstante Led i B_{n-1} og C_n, findes første Led i de Rækkeudviklinger, der give de Værdier af y, som svare til de Skjæringspunkter mellem $x = \alpha y$ og Kurven (VII), som for $k = 0$ falde i Begyndelsespunktet, ved en Ligning af Formen

$$\alpha y'^3 + (-\alpha b_0 + a) k y'^2 + 2 b k^2 y' + c k^3 = 0. \qquad \text{(XV)}$$

Disse Værdier af y' og dermed de tilsvarende af x og y og altsaa Afstandene fra Begyndelsespunktet til de tre Grene, som nærme sig dertil for lim. $k = 0$, blive saaledes uendelig smaa af første Orden.

Ligning (XV) faar lige Rødder, naar enten $\alpha = \infty$ eller

$$\begin{vmatrix} 3\alpha, & 2(-\alpha b_0 + a), & 2b, & 0 \\ 0, & 3\alpha, & 2(-\alpha b_0 + a), & 2b \\ -\alpha b_0 + a, & 4b, & 3c, & 0 \\ 0, & -\alpha b_0 + a, & 4b, & 3c \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(XVI)}$$

Den sidste Ligning, som bliver af tredie Grad med Hensyn til α, bestemmer Tangenterne til tre Grene af Systemets Indhyllingskurve, som gaa gjennem det tredobbelte Toppunkt (smlgn. 11), medens $\alpha = \infty$ kun bestemmer Linien $y = 0$, af hvis Skjæringspunkter med Kurven i Almindelighed kun ét Punkt for $k = 0$ falder i Begyndelsespunktet. Kun naar $b_0 = 0$, bliver $y = 0$ Tangent i Begyndelsespunktet til Indhyllingskurven (eller Gren af denne); men da bliver ogsaa en af de tre Rødder i (XVI) uendelig. Fremstillingsformen (VII) for Kurver af første Art kan saaledes benyttes, naar Systemets Indhyllingskurve skal gaa igjennem det tredobbelte Toppunkt, hvilket ikke var Tilfældet med de tidligere Fremstillingsformer (I) og (II). Kjender man Tangenten til en af Indhyllingskurvens Grene, og er altsaa en Rod α i (XVI) bekjendt, kunne Koefficienterne a, b og c udtrykkes under rational Form ved α og b_0 samt to ubekjendte Konstanter β og γ, idet man har

$$\alpha(y' - \beta k)^2 (y' - \gamma k) = \alpha y'^3 + (-\alpha b_0 + a) k y'^2 + 2 b k^2 y' + c k^3.$$

(Smlgn. 12) [1]).

([1]) Andre Exempler paa Tilfælde, hvor (VII) eller andre under (XII) og (XIII) henhørende Ligninger maa anvendes, frembyder min Afhandling: *Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit*, idet de til Keglesnittene henhørende Dobbeltlinier med to Toppunkter (λ kaldes deres Antal i den anførte Afhandling) som Kurver α_2' høre med til de ved disse Ligninger fremstillede Kurver af første Art. Naar saaledes en Dobbeltlinie, der rører en given Kurve og har et Toppunkt beliggende i

Naar man vil benytte den samme Fremgangsmaade til Undersøgelse af et dobbelt Toppunkt paa en Kurve af anden Art fremstillet ved (IX), maa man ombytte Ligning (XV) med følgende

$$\alpha y'^3 + (-\alpha b_0 + a) k y'^2 + 2 b k^2 y' + c k^4 = 0,$$

som dels giver $y' = -\frac{c}{2b} k^2$, der blot svarer til den Gren, som ikke medvirker til Dannelsen af Toppunktet, dels

$$\alpha y'^2 + (-\alpha b_0 + a) k y' + 2 b k^2 = 0.$$

Denne Ligning faar lige Rødder, naar

$$8 b \alpha = (\alpha b_0 - a)^2,$$

som bestemmer to Værdier af α. To Grene af Indhyllingskurven gaa altsaa gjennem det dobbelte Toppunkt. Man kan saaledes benytte Fremstillingen (IX) af Kurverne af anden Art, naar Systemets Indhyllingskurve skal gaa igjennem et dobbelt Toppunkt. En Kurve fremstillet ved Ligning (IX) tælles to Gange med i Tallet ξ. (Smlgn. 11—13 og Bemærkningen i 42 om Ensartetheden af de dobbelte Toppunkter paa Kurverne ξ og paa Kurverne α_1 eller α_2).

44. Tredie Art Kurver af fjerde Orden med en dobbelt retliniet Gren. — Ligning (II) i 42

$$A_{n-2} y^2 + 2 B_{n-1} y k + C^n k^2 + \psi k^3 = 0$$

fremstillede, som vi saa i 42, Kurver med dobbelt retliniet Gren af anden Art (specielt første), naar Ligning (IV)

$$b_{n-1}^2 - a_{n-2} \cdot c_n = 0,$$

der bestemte dens enkelte Toppunkter, ikke var identisk. At denne Ligning bliver identisk, kan, naar $n > 3$, opnaas paa andre Maade end antaget i (VI). Det vil saaledes, naar Kurverne ere af fjerde Orden ($n = 4$), et Tilfælde, hvortil vi her udelukkende skulle holde os, endnu opnaas paa én Maade, nemlig ved at

$$a_2 = a_1{}^2, \; b_3 = a_1 b_2, \; c_4 = b_2{}^2. \qquad \text{(XVII)}$$

Ligning (II) bliver derved til

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + C_1 y^3 + C_2 y^2 k + C_3 y k^2 + C_4 k^3 + \psi \cdot k^4 = 0. \qquad \text{(XVIII)}$$

Denne Ligning giver som første Led i Rækkeudviklingen for de Værdier af y, der

---

Røringspunktet (se 61 i den nævnte Afh.), skal høre med til et System af Keglesnit, som have Røring af anden Orden med denne Kurve, maa Systemet fremstilles ved Ligning (VII), hvilket staar i nøje Forbindelse med, at denne særegne Kurve tælles 3 Gange med i λ, en Omstændighed, jeg paa det anførte Sted har fundet ad mere indirekte Vej. Systemets andre Betingelser kunne selvfølgelig medføre, at man maa benytte en endnu senere Ligning (XII) eller (XIII), samt at den særegne Kurve tælles flere Gange med i λ.

blive Nul for $k=0$, $y=-\frac{b_2}{a_1}k$. For at bestemme andet Led maa man medtage de Led i Ligningen, som ere af tredie Grad med Hensyn til y og k, og i dem for y indsætte det fundne første Led. Man finder da det andet Led bestemt ved

$$a_1 y + b_2 k = \frac{1}{a_1}\sqrt{\frac{b_2{}^3 c_1 - a_1 b_2{}^2 c_2 + a_1{}^2 b_2 c_3 - a_1{}^3 c_4}{a_1}}\, k^{\frac{3}{2}}.$$

Det ses nu, at den ved $k=0$ bestemte Kurve i Systemet (XVIII)

$$y^2 (a_1{}^2 + y C_1) = 0$$

er sammensat af en dobbelt ret Linie $y=0$ og af et Keglesnit $a_1{}^2 + y C_1 = 0$, der rører Dobbeltlinien i Punktet $y=0$, $a_1=0$; at de Grene af en nærliggende Kurve bestemt ved lim. $k=0$, som nærme sig til Linien $y=0$, have Afstande fra denne Linie, som ere uendelig smaa af første Orden, men Afstande indbyrdes og fra Hyperblen

$$a_1 y + b_2 k = 0,$$

som ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{3}{2}$; og endelig at Grænsekurvens Dobbeltlinie har 7 enkelte Toppunkter bestemte ved

$$b_2{}^3 c_1 - a_1 b_2{}^2 c_2 + a_1{}^2 b_2 c_3 - a_1{}^3 c_4 = 0, \qquad \text{(XIX)}$$

samt et tredobbelt Toppunkt i Dobbeltliniens Røringspunkt med Restkurven. At dette sidste Toppunkt bliver tredobbelt, følger af, at Tangenter fra et Punkt til Restkurven og Linier til de 7 enkelte Toppunkter kun give 9 af de 12 Tangenter til Kurven.

Naar k skifter Fortegn, idet det passerer Nul, ville de Grene, der nærme sig til $y=0$, blive reelle langs de Strækninger af denne Linie, hvor de før vare imaginære, og omvendt. Saavel det tredobbelte som de enkelte Toppunkter danne Overgangen mellem disse Strækninger.

De Grene af Kurven (XVIII), som for lim. $k=0$ nærme sig til at gaa gjennem det tredobbelte Toppunkt $a_1=0$, $y=0$, ville skjære Linien $a_1=0$ i tre Punkter, hvis Afstande fra Toppunktet ere proportionale med $k^{\frac{2}{3}}$, og $a_1=0$ kan være en vilkaarlig fra $y=0$ forskjellig ret Linie gjennem dette Punkt, idet Ombytning af a_1 med $a_1+\alpha y$, hvor α er en Konstant, ikke vil forandre Ligningens Form. Idet vi fremdeles kunne antage, at der er anvendt Trekantkoordinater, kan Punktet $a_1=0$, $y=\infty$ være et vilkaarligt Punkt udenfor Linien $y=0$. Koordinaterne til Røringspunkter for Tangenter fra dette Punkt, ville bestemmes ved (XVIII) og den Ligning, som dannes ved Differentiation med Hensyn til y. Første Led i Koordinaterne til de Røringspunkter, som for $k=0$ falde sammen i det tredobbelte Toppunkt, bestemmes altsaa ved

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + c_1 y^3 = 0,$$

og

$$2(a_1 y + b_2 k) a_1 + 3 c_1 y^2 = 0,$$

hvor c_1 og b_2 have de Værdier, som de faa for $a_1 = 0$. Man finder

$$a_1 = 3\sqrt[3]{\frac{b_2 c_1}{4}} . k^{\frac{1}{3}}, \quad y = -\frac{4}{9}\frac{a_1^2}{c_1},$$

som blive proportionale med $k^{\frac{1}{3}}$ og $k^{\frac{2}{3}}$. Det viser sig saaledes, at de tre Tangenter fra et vilkaarligt Punkt, som nærme sig til at falde sammen i Punktets Forbindelseslinie med det tredobbelte Toppunkt, danne Vinler med denne Grænsestilling, som for lim. $k = 0$ blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{3}$. Der vil altsaa kun være én af dem, som er reel.

Paa Grund af Kurvens Beliggenhed mod Hyperblen $a_1 y + b_2 k = 0$ samt Restkurvens Form blive Grænsestillingerne for alle Vendetangenters Røringspunkter det tredobbelte og de enkelte Toppunkter. I hvert af disse vil der falde tre saadanne Røringspunkter sammen, hvoraf ét er reelt, naar Toppunktet er det. [Se 51]. Af Dobbelttangenterne ville de 7 være Tangenter fra de enkelte Toppunkter til Restkurven. De 21 andre falde sammen med Dobbeltlinien og have Toppunkterne til Røringspunkter.

Et Keglesnit, en Tangent til samme og 7 Punkter paa denne afhænge af 13 Betingelser. Da disse kunne være elementære, vil den her beskrevne tredie Art af Kurver med en dobbelt retliniet Gren være sædvanlige særegne Kurver i et System af Kurver af fjerde Orden uden særegne Punkter. Vi ville betegne Antallet af saadanne Kurver i et System ved η.

Paa Fig. 26 er 2 en saadan Overgangskurve mellem 1 og 3. Kurven h er Hyperblen $a_1 y + b_2 k = 0$. Vi have antaget, at alle 7 enkelte Toppunkter a ere reelle, hvorved ogsaa alle Dobbelttangenterne til Kurver 1 og 3, der ligge tilstrækkelig nær ved Grænsekurven, maa være reelle. Idet de flade Ovaler faa indadgaaende Buer, bestaa Kurverne væsentligt af samme Dele som paa Fig. 25.

45. Fjerde Art Kurver af fjerde Orden med en dobbelt retliniet Gren. — Den i 44 anvendte Diskussion af Ligning (XVIII) bliver ubrugelig, naar Ligning (XIX), der bestemmer dens enkelte Toppunkter, bliver identisk. Da man finder denne Ligning ved for y og k at sætte b_2 og $-a_1$ i Ligning

$$c_1 y^3 + c_2 y^2 k + c_3 y k^2 + c_4 k^3 = 0,$$

maa $a_1 y + b_2 k$ være Faktor i denne Lignings venstre Side (da man kan forudsætte, at a_1 ikke gaar op i b_2, idet Ligning (XVIII) i saa Fald vilde være indbefattet i (VII)). Ligning (XVIII) maa saaledes kunne omskrives til

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + 2(c_0 y^2 + c_1 y k + c_2 k^2)(a_1 y + b_2 k) + d_0 y^4 + D_1 y^3 k + D_2 y^2 k^2 + D_3 y k^3 + D_4 k^4 + \psi . k^5 = 0. \quad \text{(XX)}$$

Udvikles her de Værdier af y, som forsvinde for $k = 0$, i Række, finder man, at de to første Led ere følgende

$$a_1 y = -b_2 k - \frac{1}{a_1^2}(b_2^2 c_0 - a_1 b_2 c_1 + a_1^2 c_2 \pm \sqrt{R})\, k^2,$$

hvor

$$R = (b_2{}^2c_0 - a_1 b_2 c_1 + a_1{}^2 c_2)^2 - (b_2{}^4 d_0 - a_1 b_2{}^3 d_1 + a_1{}^2 b_2{}^2 d_2 - a_1{}^3 b_2 d_3 + a_1{}^4 d_4). \quad \text{(XXI)}$$

Den ved $k = 0$ bestemte Grænsekurve

$$y^2 (a_1{}^2 + 2c_0 a_1 y + d_0 y^2) = 0$$

er sammensat af en dobbelt ret Linie $y = 0$ og af to enkelte rette Linier, som begge skjære Dobbeltlinien i Punktet $y = 0$, $a_1 = 0$. Den har 8 enkelte Toppunkter bestemte ved $R = 0$ og et firdobbelt Toppunkt i Skjæringspunktet mellem de sammensættende rette Linier. De Grene af en nærliggende Kurve bestemt ved lim. $k = 0$, som nærme sig til Linien $y = 0$, have Afstande fra denne Linie, som ere uendelig smaa af første Orden, men Afstande indbyrdes og fra Hyperblen

$$a_1 y + b_2 k = 0,$$

som ere uendelig smaa af anden Orden. Naar k skifter Fortegn, ville disse Grene vedblive at være reelle eller imaginære langs de samme Strækninger af $y = 0$. Grænserne mellem disse Strækninger dannes her kun af de enkelte Toppunkter. — I hvert af de enkelte Toppunkter falde Røringspunkterne for tre Vendetangenter sammen (se 44 og 51). Alle 28 Dobbelttangenter falde sammen med den dobbelte retliniede Gren, dens Røringspunkter med de enkelte Toppunkter.

Det firdobbelte Toppunkt kunde undersøges paa samme Maade som det tredobbelte i 44; men dets Egenskaber fremtræde simplere, naar man lægger Mærke til, at de Led i (XX), der her komme i Betragtning, idet vi antage, at

$$a_1{}^2 + 2c_0 a_1 y + d_0 y^2 = (a_1 + a_0 y)(a_1 + b_0 y),$$

kunne omskrives til

$$[(a_1 + a_0 y) y + b_2 k] [(a_1 + b_0 y) y + b_2 k] = 0,$$

som fremstiller to Hyperbler, der for $k = 0$ gaa over til to rette Linier (Kurver α_2), og som for lim. $k = 0$ have Afstande af Ordenen $\frac{1}{2}$ fra disses Skjæringspunkt. Disse Hyperbler have begge samme Beliggenhed i Forhold til Linien $y = 0$. I Nærheden af det firdobbelte Toppunkt faar Kurven (XX) samme Egenskaber som disse Hyperbler, og det firdobbelte Toppunkt er altsaa sammensat af to dobbelte.

Det ses let, at ogsaa de her fremstillede Grænsekurver høre med til de sædvanlige særegne Kurver i et System af Kurver af fjerde Orden uden særegne Punkter. Vi ville kalde Antallet af saadanne Kurver i et System ζ.

Paa Fig. 27 er 2 en Overgangskurve af den her beskrevne Art mellem 1 og 3. Idet vi have forudsat, at alle de enkelte Toppunkter a, og derved alle Dobbelttangenter, ere reelle, ses det, at Kurverne 1 og 3 bestaa af de samme Dele som paa Fig. 26. Kun har, samtidig med at Keglesnittet i Grænsekurven er blevet

til to rette Linier, den Del af Kurven 1 eller 3, som nærmer sig dertil, faaet to flade Arme i Stedet for én, dog selvfølgelig uden at forandre Antallet af reelle Dobbelt- og Vendetangenter.

Den her anstillede Undersøgelse bliver ubrugelig, naar R (se (XXI)) identisk forsvinder. I dette Tilfælde omformes (XX) paa en lignende Maade, som (XX) er dannet af (XVIII). Den Art Grænsekurver, som man da faar, vil være sammensat af to rette Dobbeltlinier og have 8 enkelte Toppunkter paa den ene af disse, intet paa den anden. Da disse særegne Kurver kun kunne tilfredsstille $4 + 8 = 12$ elementære Betingelser, høre de ikke med til de sædvanlige særegne Kurver. Fortsættelse af den her anvendte Behandling giver kun nye Fremstillinger af disse samme Kurver.

Vi kunne ogsaa se, at vi hermed overhovedet have udtømt de forskjellige Arter af Kurver med en dobbelt retliniet Gren, som man kan træffe paa i Systemer af Kurver af fjerde Orden uden særegne Punkter. Den i 42 udførte Undersøgelse af Ligning (II) ophører nemlig kun da at være brugelig, naar enten Betingelserne (VI) eller (XVII) ere opfyldte. De Tilfælde, som Betingelserne (XVII) føre til, have vi nu udtømt i 44 og her i 45. (VI) førte, som vi have set, foruden til de mere specielle Kurver af første Art, til de nye Fremstillinger (IX) og derefter (XIII) af Kurverne af anden Art; men derved forudsatte vi rigtignok stadig, at $b_{n-1}{}^2 - a_{n-2}\, c_n = 0$ kun blev identisk derved, at $b_{n-1} = a_{n-2} \,.\, b_1$, $c_n = a_{n-2} \,.\, b_1{}^2$. Naar vi nu for Ligning (IX)'s og den mere almindelige Ligning (XIII)'s Vedkommende ogsaa forudsætte, at det finder Sted paa den anden Maade, som er mulig, naar $n = 4$, nemlig ved $a_2 = a_1{}^2$, $b_3 = a_1\, b_2$, $c_4 = b_2{}^2$ som i (XVII), er det at vente, at vi, da (IX) og (XIII) væsentlig ere af samme Form som (II), kun komme til saadanne nye Fremstillinger af Kurverne af tredie og fjerde Art, som blot medføre Forandringer i Ordenerne af uendelig smaa Afstande fra Grænsekurven. Dette vil ogsaa vise sig at være Tilfældet, naar man gjennemfører Undersøgelsen, idet man dog, førend man naar til nye Fremstillinger af de almindeligste Former af disse Kurver, støder paa mere specielle Tilfælde.

Det Middel, hvorved jeg fra først af har sikret mig at faa alle de sædvanlige Kurver med dobbelte retliniede Grene og overhovedet Kurver med Mangefoldsgrene i Systemer af Kurver af tredie og fjerde Orden med, er forøvrigt disse særegne Kurvers Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementære Systemer, ja det er gjennem denne Anvendelse, at jeg først har erfaret Existensen af Kurverne af tredie og fjerde Art. (Smlgn. Bemærkningerne i Slutningen af 31 (¹)).

46. Kurver af fjerde Orden med to dobbelte retliniede Grene. — Paa en Kurve af fjerde Orden med en dobbelt retliniet Gren, er Restkurven et Keglesnit. Naar

(¹) Se desuden *Comptes rendus* 23 Septbr. og 21 Oktbr. 1872.

dette reduceres til en Dobbeltlinie, faas en Kurve af fjerde Orden, som er sammensat af to Dobbeltlinier. Skal en saadan Kurve være en sædvanlig særegen Kurve i et System af Kurver uden særegne Punkter, maa der paa de to Dobbeltlinier ialt være 9 Toppunkter foruden dem, der falde sammen i Liniernes Skjæringspunkt. Denne Betingelse vil vise sig kun at være opfyldt (smlgn. 53) af de Kurver, som paa denne Maade dannes af Kurverne med dobbelt retliniet Gren af anden Art (eller for saa vidt ogsaa af saadanne, der dannes af Kurverne af første Art, som de Betingelser kunne være opfyldte, som ere nødvendige for, at den nye Gren skal være af anden Art). Naar vi i Ligning (II) sætte $n = 4$ og $A_2 = x^2$, idet Dobbeltlinien kan være Axen $x = 0$, faas

$$x^2 y^2 + 2 B_3 y k + C_4 k^2 + \psi k^3 = 0. \qquad \text{(XXII)}$$

I det herved fremstillede System giver $k = 0$ en Kurve, sammensat af to Dobbeltlinier, nemlig $y = 0$ med 6 enkelte Toppunkter bestemte ved $b_3{}^2 - x^2 c_4 = 0$, og $x = 0$ med 3 enkelte Toppunkter bestemte ved $B_3 = 0$. Den første er en dobbelt retliniet Gren af anden Art, hvorfra Grene af den ved lim. $k = 0$ bestemte Kurve have Afstande proportionale med k, medens $x = 0$ er en dobbelt retliniet Gren af første Art, hvorfra Nabokurvens Grene have Afstande proportionale med $k^{\frac{1}{2}}$.

Skjæringspunktet mellem Dobbeltlinierne bliver et tredobbelt Toppunkt. Til dettes Dannelse medvirker den ene af de derigjennem gaaende Grene ikke, nemlig en af dem, som falde henad $y = 0$, hvilken paa Nabokurven ogsaa i Nærheden af Begyndelsespunktet har en Afstand fra $y = 0$, som er proportional med k. Derimod ville to andre Grene danne et saadant tredobbelt Toppunkt som dem, der ere beskrevne i 41. Dette ses derved, at de Punkter af Nabokurven, for hvilke lim. $\frac{k}{y} = 0$, tilfredsstille Ligningen

$$x^2 y + 2 B_3 k = 0,$$

som giver en Kurve af første Art med $x = 0$ til Dobbeltlinie og $y = 0$ til enkelt Gren.

Af Vendetangenterne falde 8 sammen i Linien $x = 0$. Disses Røringspunkter bestemmes ved samme Ordinater y, som om Kurven havde været Trediegradskurven $x^2 y + 2 B_3{}' = 0$, hvor $B_3{}'$ betegner den Funktion af y, som dannes ved i B_3 at sætte $x = 0$. — De øvrige 16 Vendetangenter maa falde sammen i Linien $y = 0$.

Vi ville kalde Antallet af saadanne særegne Kurver i et System $\varkappa$ [1].

Paa Fig. 28 fremstiller 2 en Overgangskurve af den her beskrevne Art. 1 og 3 ere tegnede saaledes, at de med Hensyn til Dobbelttangenter og Vendetangenter netop bestaa af de samme Stykker som paa Fig. 24.

---

[1] Cayley har i *Compte rendu* for 11te Marts 1872 givet en analytisk Fremstilling af disse Kurver — som overhovedet af de Kurver af fjerde Orden med dobbelt retliniet Gren, som vi have kaldt Kurver af første og anden Art — og tildels angivet deres Form.

Ved i Stedet for Ligning (II) at gaa ud fra andre Fremstillinger af Kurverne af anden Art [(IX) eller (XIII)] vilde man faa andre Fremstillinger af de her beskrevne af to Dobbeltlinier sammensatte Kurver. Saaledes giver Ligning (IX) vel i Almindelighed, naar Restkurven bliver til $x^2 = 0$,

$$(x^2 + k A_2') y'^2 + 2 B_3' y' k^2 + C_4' k^4 = 0,$$

hvor Linien $x = 0$ kun indeholder to fra Begyndelsespunktet forskjellige Toppunkter bestemte ved $A_2 = 0$; men denne Ligning bliver, naar A_2' er delelig med x, til

$$(x^2 + 2k A_1' x) y'^2 + 2 B_3' y' k^2 + C_4' k^4 = 0,$$

hvor Toppunkterne paa $x = 0$ bestemmes ved

$$A_1^2 y - 2 B_3 = 0.$$

Toppunkterne paa $y = 0$ bestemmes paa sædvanlig Maade ved $b_3^2 - x^2 c_4 = 0$.

47. Kurver af n'te Orden med en r-dobbelt retliniet Gren. — Af Kurver med en r-dobbelt retliniet Gren, der fremstilles ganske som Kurver med en dobbelt retliniet Gren, skulle vi kun betragte dem, der for $r = 2$ blive af anden Art, hvilke — som man let finder — for $r > 2$ ere de eneste, som ere sædvanlige særegne Kurver i Systemer af tredie og fjerde Orden. Saadanne Kurver faas for $k = 0$ i Systemet

$$A_{n-r} y^r + A_{n-r+1} y^{r-1} . k + \dots + A_{n-1} y . k^{r-1} + A_n . k^r + \psi . k^{r+1} = 0. \quad \text{(XXIII)}$$

Første Led i Rækkeudviklingerne for de r Værdier af y, som svare til en vilkaarlig Værdi af x, og som forsvinde for $k = 0$, bestemmes ved Ligningen

$$a_{n-r} y^r + a_{n-r+1} y^{r-1} k + \dots + a_{n-1} y k^{r-1} + a_n k^r = 0.$$

Denne Lignings Diskriminant, som er af Graden $(r-1)(2n-r)$, bestemmer $(r-1)(2n-r)$ enkelte Toppunkter. De $n-r$ Skjæringspunkter med Restkurven maa være dobbelte Toppunkter dannede af to Grene, medens $r-1$ Grene gaa derigjennem uden at danne Toppunkter (smlgn 42). Tangenterne fra et Punkt til Grænsekurven $k = 0$ dannes af Tangenter til Restkurven A_{n-r} og Linier til Toppunkterne i Antal

$$(n-r)(n-r-1) + (r-1)(2n-r) + 2 . (n-r) = n(n-1).$$

At Antallet af Betingelser, som man kan underkaste Restkurven og Mangefoldslinien, lagt til Antallet af enkelte Toppunkter, for $n > 3$, $r > 2$ overskrider Antallet af Betingelser, som bestemme et System, idet

$$\frac{(n-r)(n-r+3)}{2} + 2 + (r-1)(2n-r) = \frac{n(n+3)}{2} - 1 + (r-2)\frac{2n-r-3}{2},$$

beror paa, at man, naar $n > 3$, ikke vilkaarligt kan vælge de $n(n-1)$ Tangenter, som skulle udgaa fra et givet Punkt og røre en given Kurve[1] og derfor heller ikke vilkaarligt vælge alle de enkelte Toppunkter. Da man for $n = 3$ kan

---

[1] Dette har jeg vist i *Tidsskrift for Mathematik* 1872 S. 67.

vælge alle 6 Tangenter vilkaarligt og for $n=4$ de 11, og da $n=4$, $r=3$ eller 4 netop giver $(r-2)\frac{2n-r-3}{2}=1$, viser det sig, at i alt Fald for de her angivne Tal Ligning (XXIII) vil give sædvanlige særegne Kurver. Vi kalde Antallet af Kurver med en tredobbelt retliniet Gren i Systemer af tredie og fjerde Orden λ, og Antallet af firdobbelte rette Linier i et System af fjerde Orden ν.

De i 40 omtalte n'dobbelte rette Linier ere saadanne, som for $n=r$ fremstilles ved Ligning (XXIII).

Naar man erindrer, at en Kurve af tredie Orden enten bestaar af en uendelig Gren med tre reelle Vendetangenter og en Oval (der selvfølgelig kan skjære den uendelig fjerne rette Linie), eller kun af den første af disse Bestanddele, faar man 16 forskjellige Former for Kurver af tredie Orden, der nærme sig til en tredobbelt ret Linie med 6 reelle Toppunkter. Hvis Ovalen nemlig er reel, kan den ligge paa hver af de 6 Strækninger, hvori Toppunkterne dele Linien; naar Ovalen er imaginær, kunne de Strækninger, hvor tre reelle Grene nærme sig til at falde sammen, fordeles paa 2 forskjellige Maader; endelig vil man efterat have dannet en Kurve af hver af disse Arter faa en ny ved at dreje Figuren om i den symmetriske Beliggenhed mod den tredobbelte rette Linie, hvortil Kurverne nærme sig. Disse 8 sidste Former ville, da Afstandene fra den tredobbelte Linie for lim. $k=0$ blive proportionale med k, kun være dem, som de 8 første Kurver antage, naar k skifter Fortegn. Der faas saaledes 8 øjensynligt forskjellige Former for Gjennemgangen gjennem en tredobbelt ret Linie (se Slutning af 49).

48. Dobbelte Keglesnit. — I Kurver af tilstrækkelig høj Orden kan man ogsaa træffe paa krumme Mangefoldsgrene, hvis Undersøgelse ikke vil være væsentligt forskjellig fra Undersøgelsen af de retliniede Grene. Vi skulle her kun omtale dem, som man træffer i Systemer af Kurver af fjerde Orden, nemlig dobbelte Keglesnit.

Ligningen

$$A_2{}^2+B_4\,k+\psi_4\,k^2=0 \qquad \text{(XXIV)}$$

vil fremstille et System, hvori $k=0$ giver en Kurve, hvis Punkter danne Keglesnittet $A_2=0$ to Gange. Den ved lim. $k=0$ bestemte Kurves Afstand fra dette Keglesnit er af Ordenen $\frac{1}{2}$. Selve Grænsekurven faar de 8 Punkter, som bestemmes ved

$$A_2=0,\ B_4=0$$

til Toppunkter. — I Tangenterne til $A_2=0$ i hvert af disse Punkter falde tre Vendetangenter sammen (se 44 og 51). Dobbelttangenterne ere Toppunkternes 28 Forbindelseslinier.

Idet Toppunkterne, som Skjæringspunkter mellem en Kurve af fjerde Orden og et Keglesnit, alle kunne vælges vilkaarligt paa dette sidste, kan den fremstillede Grænsekurve tilfredsstille $5+8$ elementære Betingelser og hører saaledes med til de sædvanlige særegne Kurver i et System uden Dobbeltpunkter og Spidser. Antallet af disse Kurver kalde vi ϑ.

Naar $B_4=2\,B_2\,A_2$, faar man blot nye Fremstillinger af de samme Kurver. Afstandene fra Grænsekurven blive da proportionale med k.

Hvis alle Toppunkter ere reelle, ville Grænsekurvens nærliggende Kurver aabenbart bestaa af Ovaler med indadgaaende Buer som paa 25, 26 og 27.

49. Regler for Tællingen af Kurver med Mangefoldsgrene. — Ifølge 42 og 47 vil et System af Kurver af tredie Orden uden særegne Punkter indeholde:

ξ Kurver sammensatte af en enkelt ret Linie og en dobbelt retliniet Gren af anden Art med 4 enkelte Toppunkter;

λ tredobbelte rette Linier med 6 Toppunkter.

Et System af Kurver af fjerde Orden uden særegne Punkter vil indeholde:

ξ Kurver med dobbelt retliniet Gren af anden Art (se 42);

η Kurver med dobbelt retliniet Gren af tredie Art (se 44);

ζ Kurver med dobbelt retliniet Gren af fjerde Art (se 45);

$\varkappa$ Kurver med to dobbelte retliniede Grene (se 46);

λ Kurver med en tredobbelt retliniet Gren (se 47);

ν firdobbelte rette Linier (se 47);

ϑ dobbelte Keglesnit (se 48).

I disse Tal er en Grænsekurve indbefattet én Gang, naar den én Gang forekommer i Systemet og da fremstilles paa den simpleste Maade, saaledes at de Grene, der nærme sig til Mangefoldsgrenene, for lim. $k=0$ virkelig faa de Afstande derfra som angivet i Beskrivelserne af de særegne Kurver. De Formler, som vi skulle angive, ville imidlertid ogsaa blive anvendelige, hvor der maa benyttes mere sammensatte Fremstillinger, idet vedkommende Kurve da blot tælles flere Gange med i Antallet af de særegne Kurver, hvortil den hører, rettende sig efter den højeste Potens, hvori k indgaar i de Led, som maatte benyttes ved Bestemmelsen af nærliggende Kurver, der tilfredsstille saadanne opgivne Betingelser, at deres Antal faa Betydning ved Dannelsen af vedkommende Formler. (Smlgn hvad der i 11 er sagt om Kurverne α). Saaledes maa den ved $k=0$ bestemte Grænsekurve i det System, der fremstilles ved Ligning (XIII), hvor man benytter Led, der indeholde $k^{2(r+1)}$, medens man i Ligning (II) kun gaar til Led, der indeholde k^2, tælles $r+1$ Gange med i Tallet ξ. For saa vidt en og samme særegne Kurve forekommer flere Gange i Systemet, maa man tage særligt Hensyn til hver enkelt Forekomst.

Man kommer herved til følgende Regel, ved hvilken man, naar de opgivne Betingelser bestaa i Røring med givne Kurver, undgaar i de enkelte Tilfælde at skulle undersøge, under hvilken Form Ligningerne for de særegne Kurver fremstille sig:

En særegen Kurve i et System, hvor en af de opgivne Betingelser bestaar i Røring med en given Kurve C, vil, naar en r-dobbelt Gren har denne Røring, tælles r Gange saa mange Gange med i Antallet af Systemets særegne Kurver af samme Art, som den vilde, hvis det var en enkelt Gren, der rørte C. Kurven C antages her ogsaa at kunne være en ret Linie eller et Punkt (hvori-

gjennem Kurverne skulle gaa), og de omtalte Grene af den særegne Kurve kunne ogsaa være rette Linier eller Toppunkter (der ligge paa C).

Naar nemlig allerede den simpleste Fremstilling for lim. $k=0$ gjør de r sammenfaldende Grenes indbyrdes Afstande proportionale med k^s, hvor s er hel, er der en væsentlig Forskjel paa de r Grene, saaledes at den samme særegne Kurve bliver Grænsestilling for r forskjellige Rækker af Kurver i Systemet, i hvilke hver Gang en forskjellig Gren rører C. Naar derimod de r Grenes indbyrdes Afstande i Tilfælde af den simpleste Fremstilling, der er forenelig med Systemets øvrige Betingelser, vilde blive proportionale med $k^{\frac{s}{r}}$, vilde denne Fremstilling ikke mere kunne bruges, idet man da ved at udtrykke, at én af Grenene skulde røre C, maatte udtrykke, at de alle gjorde det. Ved at udtrykke, at én af Grenene rører C, gjøres der altsaa en saadan Forskjel paa denne Gren og de øvrige, som vel ikke her som før vil bevirke, at Kurven er Grænsekurve for r forskjellige Rækker i Systemet, men som bevirker, at den Ligning, der fremstiller Systemet, bliver en saadan, i hvilken man ved Undersøgelse af den særegne Kurves Nabokurver maa gjøre Brug af Led, der ere af en r Gange saa høj Grad med Hensyn til k som i den første Fremstilling. Reglen gjælder da ogsaa i dette Tilfælde. Blive de $\frac{r(r-1)}{2}$ indbyrdes Afstande ikke af samme Orden, maa man særskilt tage Hensyn til dem, der blive det.

Hvorledes denne Bevisforelse videre gjennemføres, have vi i nogle Tilfælde eftervist i 43 og for Kurver α's og α''s Vedkommende i første Afsnit i 12 og 14, og det er ikke vanskeligt at se, at den ogsaa maa gjælde almindeligt. Hermed er ikke sagt, at der ikke kan indtræde Tilfælde, hvor de anstillede Betragtninger og dermed den opstillede Regel maa modificeres; men i saa Fald maa man udtrykkelig kunne paavise Grunden dertil. For Systemer af Kurver af tredie og fjerde Orden, som røre givne Kurver, eller specielt for elementære Systemer, intræder der ikke saadanne Undtagelsestilfælde.

Ved Hjælp af den anførte Regel kan man nu i Systemer af Kurver af tredie og fjerde Orden, der røre givne Kurver, paa en konstant Faktor nær finde de samlede Antal særegne Kurver af en vis Art, som enten indbefatter alle Kurverne ξ eller η eller .... ϑ eller dog en større Gruppe af disse. (Dette sidste kan indtræffe for Kurverne λ og ν.) Den konstante Faktor angiver, hvor ofte Kurverne forekomme i Systemet, naar alle Røringer falde paa enkelte Grene. Det er ifølge Figurbeskrivelserne i 47 og 42 at vente, at denne Koefficient bliver delelig med 8 for Kurverne λ i Systemer af tredie Orden (den bliver 40), og at den bliver delelig med 2 for Kurverne ξ i Systemer af fjerde Orden. Denne Faktors Bestemmelse foretages ved Undersøgelse af elementære Systemer gjennem forskjellig Udledelse af samme Tal. Man faar ad denne Vej meget let Bekræftelse paa, hvad vi derfor i det følgende ikke skulle opholde os ved, at vedkommende Koefficient er 1 for Kurverne η, ζ, $\varkappa$ og ϑ (samt de i det følgende omtalte Kurver ψ og χ) og for

Kurverne ξ af tredie Orden, men for Kurverne ξ af fjerde Orden i Almindelighed 2 [1]. Større Vanskelighed indtræder med Hensyn til Kurverne λ og ν navnlig i Systemer af fjerde Orden, hvor den Omstændighed, at et af Toppunkterne ikke kan vælges vilkaarligt, giver Anledning til forskjellige Tilfælde. Vi have dog ad den anførte indirekte Vej kunnet løse alle de herhen hørende Opgaver (se 4de Afsnit); men de Midler, vi have benyttet dertil, vilde ikke strække til ved den forøgede Mangfoldighed af forskjellige Tilfælde, som indtræde, naar $n > 4$. De Resultater, vi have fundet, naar $n = 4$, kunne maaske have Betydning ved Undersøgelser over Afhængigheden mellem de 12 Tangenter fra et Punkt til en Kurve af fjerde Orden.

50. Formler for Systemer $n = 3$, $d = e = 0$. — Naar man vil anvende Formlerne i 24 paa Systemer, hvori der findes Kurver med Mangefoldsgrene, maa man som allerede angivet tilføje supplementære Led, der, naar man kjender disse særegne Kurver, findes ganske som Formlernes andre Led. For et System af Kurver af tredie Orden uden særegne Punkter finder man [2]:

$$4\mu = \mu' + 2\xi + 6\lambda, \tag{3}$$

$$10\mu' = \mu + 3c' + \xi + \alpha, \tag{3'}$$

$$9\mu + 3c' = 3q' + 18\xi + 27\lambda, \tag{5'}$$

$$16c' = 2z' + 4\alpha + 72\xi + 72\lambda, \tag{8'}$$

$$\mu' + 5\mu = c' + \xi + 6\lambda, \tag{9}$$

$$4\mu + 5\mu' = 2q' + 8\xi + 12\lambda, \tag{9'}$$

$$4c' + 9\mu' = 2q' + 4\alpha + 36\xi + 36\lambda, \tag{11'}$$

$$12\mu + 6\mu' = 3\alpha + 24\xi + 36\lambda, \tag{12'}$$

$$12c' + 54\mu' = 6z' + 3\alpha + 108\xi + 108\lambda, \tag{14'}$$

hvor vi have givet alle Formler samme Nummer som de tilsvarende i 24. De øvrige Formler i 24 ere uanvendelige i dette Tilfælde. Formlerne kunne tjene til at udtrykke μ', α, c', q', z' ved μ, ξ og λ og give desuden 4 Prøveligninger. Specielt er

$$\alpha = 12\mu - 12\xi - 24\lambda,$$

en Formel, som ved Siden af (3) anvendes ved Bestemmelsen af Karakteristikerne.

51. Formler for Systemer $n = 4$, $d = e = 0$. — Man finder ligeledes for Systemer af fjerde Orden uden særegne Punkter, idet $u' = (3d') = (2d'e') = 0$:

---

(1) I saadanne Systemer, hvor den i Figurbeskrivelsen i 42 omtalte Grund til, at denne Koefficient skal blive 2 — saasom i de elementære Systemer med 2 Dobbeltpunkter, se 55 og 64 — bliver den selvfølgelig kun 1.

(2) Størstedelen af disse Resultater findes i Maillard's i Indledningen omtalte Afhandling; nogle af dem ogsaa i mine Meddelelser i *Comptes rendus* i Febr. og Marts 1872.

$$6\mu = \mu' + 2\xi + 3\eta + 4\zeta + (2+1)\varkappa + 6\lambda + 12\nu + 2\vartheta \qquad (3)\ [1]$$

$$22\mu' = \mu + 2b' + 3c' + \alpha + 2\xi + 2\eta + 6\zeta + 2\varkappa + \lambda + 2\vartheta \qquad (3')$$

$$2\mu' + 12\mu = c' + 2\xi + 2\eta + 2.2\zeta + 2\varkappa + (2+10)\lambda + 2.12\nu + 2\vartheta \qquad (9)$$

$$2\mu' + 20\mu = 2b' + 2.2\xi + 2.3\eta + 2.2\zeta + (2.3+6+2)\varkappa + 2.2\lambda + 2.12\nu + (8+2)\vartheta \qquad (12)$$

$$28\mu + 4b' = 2p' + 2.16\xi + 2.21\eta + 2.28\zeta + 2.10\varkappa + 3.28\lambda + 4.28\nu \qquad (4')$$

$$24\mu + 4c' = 3q' + v' + 2.18\xi + (2.21+2)\eta + 2.24\zeta + (2.16+8)\varkappa + 3.24\lambda + 4.24\nu \qquad (5')$$

$$54b' = 2x' + 6\alpha + 16.15\xi + 21.20\eta + 28.27\zeta + 10.9\varkappa + 28.27\lambda + 28.27\nu \qquad (6')$$

$$\left.\begin{aligned} 24b' + 28c' = y' + 3(d'2e') + 16.18\xi + 21\left(21 + \tfrac{1}{3}.3\right)\eta + 28.24\zeta + 10.16\varkappa \\ + 28.24\lambda + 28.24\nu \end{aligned}\right\} (7')$$

$$\left.\begin{aligned} 46c' = 2z' + 3(d'2e') + 4\alpha + (18.17 + 2.2)\xi + \left[21\left(18 + \tfrac{4}{3}.2 + \tfrac{1}{3}.3\right) + 1(21+2)\right]\eta \\ + 24\left(21 + \tfrac{5}{3}.2\right)\zeta + (16.15 + 4.7)\varkappa + 24.23\lambda + 24.23.\nu + 8.2\vartheta \end{aligned}\right\} (8')$$

$$\left.\begin{aligned} 10\mu + 12\mu' = p' + 2q' + 2.8\xi + \left(2.7 + 2.2.\tfrac{5}{4}\right)\eta + \left(2.8 + 2.2.\tfrac{3}{2} + 2\right)\zeta + (2.7+4)\varkappa \\ + 3.10\lambda + 4.10\nu + 2.2.\tfrac{1}{2}.\vartheta \end{aligned}\right\} (9')$$

$$\left.\begin{aligned} 10b' + 28\mu' = p' + 2(d'2e') + 6\alpha + 16.8\xi + 21.9\eta + 28.10\zeta + 10.7\varkappa \\ + 28.10\lambda + 28.10\nu \end{aligned}\right\} (10')$$

$$\left.\begin{aligned} 10c' + 24\mu' = 2q' + 4(d'2e') + 4\alpha + (18.8 + 2.2)\xi + \left[21\left(8 + \tfrac{5}{3}\right) + 1(7 + 2.2)\right]\eta \\ + 24\left(9 + \tfrac{7}{3}\right)\zeta + (16.7 + 4.4)\varkappa + 24.10\lambda + 24.10\nu + 8.2\vartheta \end{aligned}\right\} (11')$$

$$\left.\begin{aligned} 90\mu + 36\mu' = 3v' + 4\alpha + (2.8.7 + 2.2)\xi + \left[2.7(6+2) + 2.2\left(7 + \tfrac{5}{4}\right) + 2.2\right]\eta \\ + \left[2.8(7+2) + 2.2\left(8 + \tfrac{3}{2}\right) + 2\right]\zeta + (2.7.6 + 4.3)\varkappa + 3.10.9\lambda + 4.10.9\nu + 2.\vartheta \end{aligned}\right\} (12')$$

$$\left.\begin{aligned} 90b' + 504\mu' = 4x' + 3y' + 16\alpha + (16.8.7 + 12.2)\xi + \left[21.5.8 + 21.2.2\left(7 + \tfrac{3}{2}\right) + 7.2\right]\eta \\ + [28.6.9 + 28.2.2(8+2)]\zeta + (10.7.6 + 18.2)\varkappa + 28.10.9\lambda + 28.10.9\nu + 28.2\vartheta \end{aligned}\right\} (13')$$

$$\left.\begin{aligned} 90c' + 432\mu' = v' + 2y' + 6z' + 18\alpha + (18.8.7 + 2.3)\xi + \Big[21.6.8 + 21.2\left(7 + \tfrac{3}{2}\right) \\ + 21.8 + 7.8 + 2(7+2)\Big]\eta + [24.7.9 + 24.2(8+2) + 24.9]\zeta \\ + (16.7.6 + 8.2.3)\varkappa + 24.10.9.\lambda + 24.10.9.\nu + 24\vartheta \end{aligned}\right\} (14')$$

$$2p' = 2b' + (d'2e') \qquad (15')$$

$$\left.\begin{aligned} 6\mu + 2\mu' = q' + 2.2\xi + (2.2+1)\eta + (2.2+2+2)\zeta + (2.2+2)\varkappa + (3.3+1)\lambda + 4.4\nu \\ + 2\vartheta \end{aligned}\right\} (16')$$

Koefficienterne i de fire første af disse Formler findes ved Anvendelse af, hvad der allerede er sagt om de forskjellige særegne Kurver. Af disse Formler kunne (3), (9) og (12) tjene til at udtrykke μ', b' og c' ved μ og Antallene af særegne Kurver, hvorefter (3′) giver

$$\alpha = 27\mu - 20\xi - 32\eta - 46\zeta - 24\varkappa - 45\lambda - 72\nu - 14\vartheta,$$

der ved Siden af Formel (3) anvendes ved Bestemmelsen af Karakteristikerne i de elementære Systemer.

[1] Naar jeg i *Compte rendu* for 23de Septbr. angiver, at Koefficienten til den Størrelse, som jeg der kalder ν, er 4, beror det paa, at ν ikke betegner det samme som ξ her, men som $\frac{\xi}{2}$, paa Grund af den Faktor 2, som ifølge 49 indgaar i selve Tallet ξ.

I de øvrige ovenfor anførte Ligninger ere Koefficienterne fundne dels ved direkte Undersøgelser dels ved de Prøver, som opnaas derved, at sex af Ligningerne kunne udledes af de andre — nemlig tre paa Grund af de i 32 omtalte Afhængigheder og tre paa Grund af, at Udtrykkene for u', $(3\,d')$ og $(2\,d'e')$ skulle forsvinde identisk (smlgn Formlerne i 34). Skjøndt vi ved den Maade, hvorpaa Koefficienterne ere skrevne, have søgt at udtrykke deres Betydning og de Forhold, som de udtrykke, skulle vi ogsaa i Ord fremsætte nogle af disse Forhold, der altsaa ere beviste gjennem en Forening af de anførte to Veje:

Naar et Punkt P er beliggende paa en Gren af en Kurve i Systemet, som, idet $\lim. k = 0$, falder sammen med den dobbelte Gren af en Kurve η, ζ eller ϑ — der antages fremstillede paa den simpleste Maade — ville, de to Tangenter, hvis Røringspunkter med den anden Gren nærme sig til P, danne Vinkler med Tangenten i P, som ere proportionale henholdsvis med $k^{\frac{5}{4}}$, $k^{\frac{3}{2}}$, $k^{\frac{1}{4}}$; de Vendetangenter, hvis Røringspunkter falde sammen i et af disse Kurvers enkelte Toppunkter, danne Vinkler med hinanden proportionale med $k^{\frac{1}{4}}$, $k^{\frac{5}{3}}$, $k^{\frac{1}{3}}$; den Tangent fra et Punkt af en af disse Vendetangenter, hvis Røringspunkt falder sammen med Vendetangentens, danner en Vinkel med Vendetangenten proportional med $k^{\frac{5}{3}}$, $k^{\frac{7}{3}}$, $k^{\frac{2}{3}}$. — De tre Vendetangenter til en Kurve, som nærmer sig til en Kurve η, hvis Røringspunkter falde sammen i dennes tredobbelte Toppunkt, ville indbyrdes danne Vinkler proportionale med $k^{\frac{1}{3}}$, og enhver af dem vil med de to Tangenter fra et af dens Punkter, hvis Røringspunkter ogsaa have det tredobbelte Toppunkt til Grænsestilling, danne Vinkler proportionale med $k^{\frac{2}{3}}$.

De fundne Ligninger kunne tjene til Bestemmelse af p', q', x', y', z', v', $(d'\,2\,e')$.

52. Ny Art Kurver med en dobbelt retliniet Gren i Systemerne $n = 4$, $d = 1$, $e = 0$. — De Kurver med Mangefoldsgrene, som man træffer i et System af Kurver af fjerde Orden med ét Dobbeltpunkt, ere dels specielle Tilfælde af dem, man træffer i et System uden særegne Punkter, dels nogle mere modificerede Former, som skulle beskrives her i 52 og 53.

De to dobbelte Toppunkter paa anden Art Kurver af fjerde Orden med en dobbelt retliniet Gren (se 42 med Fig. 24 og 25) kunne falde sammen og danne et Dobbeltpunkt og et dobbelt Toppunkt. Man faar da en Kurve sammensat af et Keglesnit og en Dobbeltlinie, der rører dette, og som foruden et Dobbeltpunkt har et dobbelt Toppunkt i Røringspunktet, samt 6 enkelte Toppunkter.

En saadan Kurve vil ikke kunne fremstilles ved Liguing (II). Dette viser sig derved, at naar de dobbelte Toppunkter paa de ved denne Ligning fremstillede Kurver skulle falde sammen og danne et Dobbeltpunkt, ville af sig selv nogle af de enkelte Toppunkter falde i samme Punkt. Vi kunne da prøve at anvende Ligning (IX) i 43, som, idet A'_{n-2}, B'_{n-1}, C'_n indeholde k, for $n = 4$ kan omskrives til Formen

$$A'_2 y'^2 + B'_2 y'^2 k + C'_3 y' k^2 + D'_3 y' k^3 + E'_4 k^4 + \psi k^5 = 0,$$

hvor A', B', C', D' og E' betegne Funktioner alene af x og y' $(= y + b_1 k)$. Man kan nu foreløbig søge de Betingelser, som disse Funktioner maa tilfredsstille, naar Systemets Kurver skulle have et (fra de enkelte Toppunkter adskilt) Dobbeltpunkt, der ligger fast i Begyndelsespunktet. Man finder da først, at a_2 maa være delelig med x^2, og dernæst en Række andre Betingelser, som ikke medføre, at x bliver Faktor i c_3 og derved $x = 0$ Rod i Ligningen $c_3{}^2 - a_2 e_4 = 0$, der bestemmer de enkelte Toppunkter. Denne Fremstillingsform kan altsaa endog anvendes, naar Dobbeltpunktet ligger fast, og da end mere, naar Systemet ikke er underkastet denne yderligere Betingelse. Derimod maa man ty til en mere sammensat Fremstillingsform, (indbefattet i (XIII)), naar Systemets Kurver skulle røre en Kurve, der gaar gjennem det dobbelte Toppunkt paa den fremstillede Grænsekurve, idet for den anførte simpleste Fremstillingsform de Grene, der danne dette, faa Afstande, som for lim. $k = 0$ ere proportionale med $k^{\frac{1}{2}}$. Tangenterne i Dobbeltpunktet danne ligeledes Vinkler proportionale med $k^{\frac{1}{2}}$, medens Afstanden mellem de Grene, der falde sammen i Dobbeltlinien, bliver proportional med k^2.

Antallet af disse Grænsekurver beregnet i Overensstemmelse med 49 ville vi betegne med ψ.

Paa Fig. 29 er 2 en Overgangskurve ψ mellem 1 og 3. For Tydeligheds Skyld have vi ladet Dobbeltpunktet, der har imaginære Grene paa 1, reelle paa 3, ligge fast. Det dobbelte Toppunkt er reelt paa 1, imaginært paa 3.

Vi kunne ved samme Lejlighed vise en yderligere Modifikation af de her fremstillede særegne Kurver, som foruden Kurver med tredobbelt og firdobbelt retliniet Gren og Kurver α vil være den eneste Art Kurver med Mangefoldsgrene, som man sædvanligvis finder i Systemerne $n = 4$, $d = 0$, $e = 1$. Det ses nemlig, at Dobbeltpunktet (med reelle Grene) paa Kurven 3 gaar over til en Spids, naar Sløifen svinder ind til et Punkt, i hvilket Tilfælde Keglesnittet paa Kurven 2 maa være sammensat af to imaginære rette Linier. Er derimod Keglesnittet i 2 sammensat af to reelle rette Linier, smelter det isolerede Punkt paa 1 sammen med et nyt Toppunkt og danner en Spids. Vi træffe saaledes i Systemer af fjerde Orden med en Spids saadanne Kurver, som ere sammensatte af to enkelte rette Linier og en Dobbeltlinie gjennem deres Skjæringspunkt, og som foruden en Spids have et tredobbelt Toppunkt i dette Skjæringspunkt, samt 6 enkelte Toppunkter. Disse særegne Kurver maa fremstilles ved en Ligning indbefattet i (XIII) for $r = 2$, saa de Grene, der nærme sig til Dobbeltlinien faa en indbyrdes Afstand, som for lim. $k = 0$ bliver proportional med k^3. Tangenter fra et vilkaarligt Punkt, der nærme sig til at gaa gjennem det tredobbelte Toppunkt, danne Vinkler proportionale med k.

Paa Fig. 30 ere Kurverne 1 og 3 Modifikationer af 3 paa Fig. 29. Paa Fig. 31 ere de Modifikationer af 1 paa Fig. 29 (1).

---

(1) Ovalerne paa Kurverne i Fig. 29 burde være beliggende ovenfor de to reelle Vendetangenter til de flade Grene, der udgaa fra den midterste Del af Kurven. Den samme Fejl have Fig. 30 og 31; men den er uvæsentlig med Hensyn til de Forhold, som her skulle oplyses.

53. Ny Art Kurver med to dobbelte retliniede Grene i Systemerne $n = 4$, $d = 1$, $e = 0$. — I Systemer af Kurver med to dobbelte retliniede Grene træffer man «sædvanligvis» ogsaa paa Kurver sammensatte af to Dobbeltlinier med et Dobbeltpunkt og et dobbelt Toppunkt i Dobbeltliniernes Skjæringspunkt, samt fire enkelte Toppunkter paa hver af disse to Linier. Dobbeltgrenene ere begge af anden Art.

Disse Kurver fremstilles ved en Ligning af Formen

$$x^2 y^2 + 2 A_2 xyk + B_4 k^2 + \psi k^3 = 0. \qquad \text{(XXV)}$$

Denne Ligning vil i Almindelighed for $k = 0$ give en Kurve sammensat af Dobbeltlinierne $x = 0$, $y = 0$ med et firdobbelt Toppunkt i Punktet $x = 0$, $y = 0$ og med enkelte Toppunkter i de 8 Punkter, hvori Kurven

$$A_2{}^2 - B_4 = 0$$

skjærer de to Dobbeltlinier. Naar disse Kurver ikke ere omtalte i 46, er det, fordi de ikke høre til de sædvanlige særegne Kurver i et System uden særegne Punkter. Naar derimod B_4 og ψ ikke indeholde Led af under anden Grad med Hensyn til x og y, faa Kurverne i Systemet et fast Dobbeltpunkt i Begyndelsespunktet, og dette vil ombyttes med et bevægeligt Dobbeltpunkt, naar x og y ombyttes med $x + f_1 k + \ldots$, $y + g_1 k + \ldots$, hvorved Formen (XXV) for Ligningen ikke forandres. B_4 vil heller ikke efter denne Indsættelse indeholde noget konstant Led. I et saadant System vil den ved $k = 0$ bestemte Kurve, der kan underkastes 12 elementære Betingelser, være sædvanlig. Da de Grene, der danne det dobbelte Toppunkt, i Nærheden af dette bestemmes ved $xy + 2ak = 0$, hvor a er det konstante Led i A_2, har dette Toppunkt samme Egenskaber som paa Kurverne α_2. — Antallet af de her omtalte særegne Kurver ville vi kalde χ.

At paa Fig. 32 to af Kurven 2's Skjæringspunkter med 1 og 3 falde sammen med Toppunkter, er uvæsentligt.

54. Formler for Systemerne $n = 4$, $d = 1$, $e = 0$. — Sædvanlige særegne Kurver med Mangefoldsgrene i disse Systemer ere nu foruden de i 52 og 53 omtalte Kurver ψ og χ:

Kurver ξ[1], hvis Keglesnit har et Dobbeltpunkt og altsaa er sammensat af to rette Linier;

Kurver λ og ν, hvor to af de enkelte Toppunkter falde sammen og danne et Dobbeltpunkt — hvis Beliggenhed kan bestemmes ved den Afhængighed, der finder Sted mellem de 10 eller 12 enkelte Toppunkters Beliggenhed.

Vi skulle imidlertid ogsaa undersøge Systemer, der tillige indeholde usædvanlige særegne Kurver nemlig saadanne Systemer, der foruden elementære Betingelser ere under-

(1) Se 49, hvor der findes en samlet Angivelse af Betegnelsernes Betydning.

kastede den, at Dobbeltpunktet skal falde i et givet Punkt eller paa en given Linie. Disse Systemer ville ogsaa indeholde:

Kurver ξ, η, ζ, $\varkappa$ og ϑ, hvor to enkelte Toppunkter falde sammen og danne Dobbeltpunktet.

I disse Systemer faas saaledes to Slags Kurver ξ nemlig de sædvanlige, hvor Dobbeltpunktet findes paa Keglesnittet, og de usædvanlige, hvor det findes paa Dobbeltlinien. Vi kalde de førstes Antal ξ_1, de sidstes ξ_2, saa $\xi = \xi_1 + \xi_2$. — Ligeledes faas to Slags Kurver $\varkappa$, nemlig $\varkappa_1$, hvor Dobbeltpunktet dannes af to Toppunkter paa den Dobbeltlinie, som indeholder 3 enkelte Toppunkter, og $\varkappa_2$, hvor det dannes af to Toppunkter blandt de 6, som findes paa den anden Dobbeltlinie ($\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$).

Ved i Formlerne i 24 ogsaa at tage Hensyn til de her omtalte særegne Kurver finder man blandt andet følgende Formler, hvor de Led, som skyldes usædvanlige særegne Kurver, ere satte mellem Klammer:

$$\mu' = 6\mu - 2b - 2\xi_1 - 6\lambda - 12\nu - 4\psi - 4\chi - [2\xi_2 + 3\eta + 4\zeta + 3\varkappa + 2\vartheta],$$
$$\alpha = 20\mu - 10b - 20\xi_1 - 30\lambda - 50\nu - 30\psi - 22\chi - [12\xi_2 + 20\eta + 30\zeta + 20\varkappa_1 + 16\varkappa_2 + 10\vartheta],$$
$$\beta = 2\mu + 2b - 4\lambda - 6\nu - 3\psi - 2\chi - [2\xi_2 + 3\eta + 4\zeta + \varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \vartheta].$$

55. Formler for Systemerne $n = 4$, $d = 2$, $e = 0$. — Disse Systemer indeholde sædvanligvis ikke andre Kurver med Mangefoldsgrene end Kurver [α og] ξ, hvor to enkelte Toppunkter ere faldne sammen med et af de dobbelte Toppunkter og have dannet to Dobbeltpunkter. I disse skjærer Restkurven altsaa begge Dobbeltliniens Grene. Da vi imidlertid ogsaa her skulle undersøge Systemer, hvor et af Dobbeltpunkterne falder i et givet Punkt eller paa en given ret Linie, maa vi ogsaa tage Hensyn til de usædvanlige særegne Kurver, som man træffer paa i disse Systemer. Disse ere de selvsamme som de, man sædvanligvis træffer i et System med ét Dobbeltpunkt, nemlig ξ_1, λ, ν, ψ, χ, idet to Toppunkter falde sammen og danne det Dobbeltpunkt, hvis Beliggenhed helt eller tildels er given. Idet vi saaledes ogsaa her træffe to Slags Kurver ξ, nemlig Kurverne ξ_1 og dem, man sædvanligvis finder, kalde vi de «sædvanliges» Antal ξ_0. ($\xi = \xi_0 + \xi_1$).

Man finder nu ved at tilføje supplementære Led i Ligningerne i 24 — eller ved i Stedet for disse at benytte Ligning (24) i 33 til Bestemmelse af α_1 —

$$\mu' = 6\mu - 2b - 2\xi_0 - [2\xi_1 + 6\lambda + 12\nu + 4\psi + 4\chi],$$
$$\alpha_0 = 12\mu - 12x - 12\xi_0 - [12\xi_1 + 12\lambda + 24\nu + 12\psi + 12\chi],$$
$$\alpha_1 = \mu - 2b + 4x - [3\lambda + 4\nu + 2\psi + 2\chi],$$
$$(2d) = 2b - 2x - 2\xi_0.$$

Ved desuden at søge de x forskjellige Linier, som gaa gjennem et givet Punkt P, hvorigjennem Systemets Kurver skulle gaa, og som forbinde Dobbeltpunkterne paa en Kurve

i Systemet, finder man, idet Koefficienterne blive de samme som i Ligning (24) (se Slutning af 33):

$$2[b] = x - [\alpha_1] - [3[\lambda] + 4[\nu] + 2[\psi] + 2[\chi]],$$

idet $[b]$ er Antallet af de Kurver i Systemet, som have et Dobbeltpunkt i P, $[\alpha_1]$, $[\nu]$ o.s.v. Antallene af de Kurver α_1, ν.., hvoraf en retliniet Gren (enkelt eller Mangefolds-) gaar gjennem P. $[\lambda]$ er her og i det følgende Antallet af de Kurver λ, hvis tredobbelte Gren gaar gjennem P.

Ved Hjælp af denne sidste Formel samt det Udtryk for b, som faas af de ovenfor anførte, finder man Antallene af de Kurver, som have begge deres Dobbeltpunkter fuldstændigt eller delvist bestemte samt tilfredsstille elementære Betingelser, uden at man særligt behøver at undersøge Systemer af saadanne Kurver. Saadanne Systemer vilde forøvrigt foruden de her nævnte særegne Kurver endnu indeholde Kurver η, ζ, $\varkappa$ og ϑ, samt endnu en Slags Kurver ξ.

56. Systemer af Kurver af 4de Orden, hvor der er Røring mellem to Grene. — Disse Systemer henhøre for saa vidt under de foregaaende, som de dannes deraf ved blot at lade en af de opgivne Betingelser være den, at to Dobbeltpunkter skulle falde sammen. Denne Betingelse vil imidlertid give Anledning til andre særegne Kurver end dem, hvortil der er taget Hensyn i 55. De særegne Kurver blive foruden Kurverne α_0, Kurverne α_1, hvis retliniede Gren maa røre Restkurven, og Kurverne β, der falde sammen to og to i Kurver med et Tilbagegangspunkt af anden Art:

τ Kurver, hvori Røringspunktet mellem to Grene er omdannet til et tredobbelt Punkt, som tillige er et dobbelt Toppunkt;

ξ Kurver med en dobbelt retliniet Gren af anden Art, i hvis ene Skjæringspunkt med Restkurven 3 af de 6 enkelte Toppunkter ere faldne sammen med det dobbelte Toppunkt og danne Systemets særegne Punkt samt et enkelt Toppunkt;

Kurver λ og ν, hvis særegne Punkt er dannet ved Sammenfalden af 4 enkelte Toppunkter.

I disse Systemer er endvidere $b = 2b_1$, hvor b_1 er Ordenen af det geometriske Sted for det særegne Punkt, og $p = 4x$, idet x er Klassen af Indhyllingskurven for den særegne Tangent. Man finder da ved Tilføjelse af supplementære Led i (3) og (10) i 24 samt (24) i 33.

$$\mu' = 6\mu - 4b_1 - 2\xi - 6\lambda - 12\nu,$$
$$3\tau = \mu + 2b_1 - 2x - 2\xi - \lambda - 2\nu,$$
$$\alpha_1 = \mu - 4b_1 + 4x - 3\lambda - 4\nu,$$
$$4[b_1] = x - [\alpha_1] - 3[\lambda] - 4[\nu].$$

Flere af de andre Formler navnlig de, hvori $(2d)$ forekommer, blive ubrugelige.

57. Systemer af Kurver af 4de Orden med et 3dobbelt Punkt. — Disse Systemer henhøre specielt under dem med tre Dobbeltpunkter (se 39), idet blot en af de opgivne Betingelser gaar ud paa, at disse skulle danne et tredobbelt Punkt. I et saadant System er $\alpha_0 = 0$, og det indeholder foruden de sædvanlige Kurver α_1 og β:

ξ Kurver med en dobbelt retliniet Gren af anden Art, hvor 4 af de 6 enkelte Toppunkter falde sammen med et af de to dobbelte Toppunkter for at danne det tredobbelte Punkt.

Desuden er $b = 3b_1$, $u = 2x$, hvor b_1 er Ordenen af det geometriske Sted for det særegne Punkt, x Klassen af Indhyllingskurven for Tangenterne i samme. Dernæst maa man sætte $p = 2x + \beta$, hvor Leddet β hidrører fra at, idet et af de tre sammenfaldende Dobbeltpunkter bliver en Spids, den for de to andre Dobbeltpunkter fælles Tangent bliver ubestemt. Endelig bliver $(2d) = \beta$.

Man finder da ved at tilføje de supplementære Led, som hidrøre fra Kurverne ξ, i Formlerne (3), (13) og (4) i 24 samt (24) i 33:

$$\mu' = 6\mu - 6b_1 - 2\xi,$$
$$x = \mu + b_1,$$
$$\beta = \mu' + 6b_1 - 2x = 4\mu - 2b_1 - 2\xi,$$
$$\alpha_1 = 4x + 3\mu - 12b_1 - 4\xi = 7\mu - 8b_1 - 4\xi,$$
$$12[b_1] = x - [\alpha_1] - 4[\xi].$$

De Formler, hvori $(3d)$ forekommer, blive derimod ubrugelige.

Vi have her i 56 og 57 udtrykkelig villet paavise, hvorledes de Formler, vi finde, paa de supplementære Led nær ere indbefattede i de almindelige Formler for Kurver med 2 eller 3 Dobbeltpunkter. Men lettere er det direkte at udlede de Formler, som skulle anvendes i disse specielle Tilfælde, idet man blot dertil anvender de samme Fremgangsmaader, som i andet Afsnit benyttedes til at finde de almindeligere Formler. Ovenstaaende Udtryk for x findes da ved samme Fremgangsmaade som Formel (10) og Udtrykket for β ved samme Fremgangsmaade som (4).

Paa lignende Maade kan man finde de Formler, som maa benyttes ved Undersøgelser af andre Systemer med sammensatte særegne Punkter.

58. Exempel paa reciproke Kurver til ξ og λ. — Hvis man i de Ligninger, der fremstille Kurverne ξ, η o. s. v., ombytter Punktkoordinater med Liniekoordinater, faar man Fremstillinger af særegne Kurver, hvor den dobbelte eller flerdobbelte rette Linie er ombyttet med et dobbelt eller flerdobbelt Toppunkt, og de enkelte eller (fler-) dobbelte Toppunkter med retliniede Grene. Ved denne Ombytning faar man af de sædvanlige Kurver med Mangefoldsgrene i et System af fjerde Orden de sædvanlige Kurver med Mangefoldsgrene i et System af fjerde Klasse o. s. v.

For at faa et Exempel paa nogle af disse Kurver kunne vi betragte visse Systemer, hvor $n = 3$, $d = 0$, $e = 1$. I disse have vi i 35 sagt, at der sædvanligvis ikke forekommer Kurver med Mangefoldsgrene. Saadanne træffer man derimod, naar Spidsen enten skal ligge i et givet Punkt eller dog paa en given Linie, nemlig Kurver ξ og λ, i hvilke Spidsen, der falder paa den dobbelte eller tredobbelte Gren, dannes ved, at tre enkelte Toppunkter falde sammen. Ligeledes vil der ifølge Dualitetsprincipet, naar Vendetangenten enten skal være en given ret Linie eller dog røre en given Kurve (gaa gjennem et givet Punkt), findes:

ξ' Kurver med et dobbelt Toppunkt, hvori tillige Spidsen falder, og hvorigjennem Vendetangenten gaar, og et enkelt Toppunkt, og som betragtede som Punktfrembringelser ere sammensatte af en Dobbeltlinie gjennem de to Toppunkter og en enkelt ret Linie gjennem det dobbelte Toppunkt;

λ' Kurver med et tredobbelt Toppunkt, hvori Spidsen falder, og hvorigjennem Vendetangenten gaar, og som betragtede som Punktfrembringelser ere sammensatte af tre rette Linier gjennem dette Punkt.

Afstanden mellem de Grene af en Nabokurve til en Kurve ξ', som nærme sig til det dobbelte Toppunkt, er — naar den simpleste Fremstilling anvendes — af første Orden, medens Afstanden mellem de Grene, der nærme sig til Dobbeltlinien, er af Ordenen $\frac{1}{2}$. Naar en Kurve ξ' fremstilles ved Punktkoordinater, maa den saaledes henregnes til den i 41 omtalte første Art af Kurver med en dobbelt retliniet Gren. De Grene af en Nabokurve til en Kurve λ', som nærme sig til det tredobbelte Toppunkt, have Afstande af første Orden.

Naar man nu ogsaa vil tage Hensyn til Systemer, der indeholde disse særegne Kurver ξ, λ, ξ', λ', maa Formlerne i 35 ombyttes med følgende:

$$2\gamma_1 = \mu + \mu' - 2\xi - 3\lambda - 2\xi' - 3\lambda',$$

$$3c = 4\mu - \mu' - 2\xi - 6\lambda - \xi', \qquad 3c' = 4\mu' - \mu - 2\xi' - 6\lambda' - \xi,$$

$$6q = 7\mu - \mu' - 2\xi - 9\lambda - 4\xi' - 3\lambda', \quad 6q' = 7\mu' - \mu - 2\xi' - 9\lambda' - 4\xi - 3\lambda,$$

$$3[c] = q - [\gamma_1] - 2[\xi] - 3[\lambda], \qquad 3[c']' = q' - [\gamma_1]' - 2[\xi']' - 3[\lambda']',$$

hvor $[\xi']'$ og $[\lambda']'$ ere de Kurver ξ' og λ', der have det dobbelte eller tredobbelte Toppunkt paa en given ret Linie, som Systemets Kurver skulle røre.

Fjerde Afsnit.

Bestemmelse af Karakteristikerne i elementære Systemer af fjerde Orden.

---

59. Systemer $n = 3$, $d = 0$, $e = 1$. — Karakteristikerne i elementære Systemer af tredie Orden bestemmes ved Formlerne i 35, 36 og 50. Da Systemer, hvor de opgivne Betingelser bestaa i Røring i et givet Punkt med en given Linie samt opgivne Punkter af Kurven og Tangenter til Kurven, kun have sædvanlige Særegenheder, kunne ogsaa saadanne Systemers Karakteristiker let findes. Da de anførte Bestemmelser ere foretagne dels i Maillard's dels i mine i Indledningen omtalte Afhandlinger, skal jeg her nøjes med for det følgendes Skyld at angive Resultaterne. Ved $s P t L$ betegner jeg et System af Kurver, som gaa gjennem s givne Punkter, og som røre t givne rette Linier, ved $[P]$ Antallet af de Kurver i et System, der have en given Tangent i et af Systemets givne Punkter, og ved $[L]$ Antallet af dem, der røre en af Systemets givne Tangenter i et givet Punkt. Man finder da for $n = 3$, $d = 0$, $e = 1$ (ifølge 35)

System.	μ	μ'	c	c'	q	q'	$[c]$	$[c']'$	$[L]$	
$6P$	24	60	12	72	18	66	2			$(6L)$
$5PL$	60	114	42	132	51	123	8	32	18	$(P\ 5L)$
$4P\ 2L$	114	168	96	186	105	177	20	44	36	$(2P\ 4L)$
$3P\ 3L$	168	168	168	168	168	168	38	38	54	$(3P\ 3L)$
	μ'	μ	c'	c	q'	q	$[c']'$	$[c]$	$[P]$	System.

60. Systemer $n = 3$, $d = 1$, $e = 0$. — Man finder ved 36

System.	μ	μ'	b	p	$c' = z'$	q'	$[b]$	$[c']'$	$[L]$
$7P$	12	36	6	18	54	66	1		
$6PL$	36	100	22	58	150	186	4	21	10
$5P\ 2L$	100	240	80	180	360	460	16	54	28
$4P\ 3L$	240	480	240	480	720	960	52	108	68
$3P\ 4L$	480	712	604	1084	1068	1548	142	156	136
$2P\ 5L$	712	756	1046	1758	1134	1846	256	162	196
$P\ 6L$	756	600	1212	1968	900	1656	304	126	200
$7L$	600	400	1000	1600	600	1200		84	148

61. Systemer $n = 3$, $d = e = 0$. — Man finder ved 50

System.	μ	μ'	c'	q'	z'	$[L]$
$(8-t)\,PtL;\ t < 4$	4^t	4^{t+1}	9.4^t	3.4^{t+1}	3.4^{t+2}	4^{t-1}
$4\,P\,4\,L$	256	976	2232	2856	11424	64
$3\,P\,5\,L$	976	3424	8064	9552	38208	244
$2\,P\,6\,L$	3424	9766	23841	25563	102252	856
$P\,7\,L$	9766	21004	53244	51042	204168	2344
$8\,L$	21004	33616	88236	75648	302592	4726

62. Systemer af Kurver af 4de Orden med et 3dobbelt Punkt. — Vi ville først behandle Systemer, ved hvis Undersøgelse vi føres hen mod Løsningen af den Hovedopgave: at finde Karakteristikerne i de elementære Systemer af Kurver af fjerde Orden uden særegne Punkter. Naar denne Opgave, der volder størst Vanskelighed, først er løst, vil man derved være kommen i Besiddelse af saa mange Midler til Bestemmelsen af de andre Karakteristiker i Systemer af fjerde Orden, at de vel kunne volde Arbejde, men ikke alvorlige Vanskeligheder.

Vi begynde med at bestemme Karakteristikerne i Systemer af Kurver med et tredobbelt Punkt, hvortil vi benytte Formlerne i 57. I Systemet $9\,P$ finder man ved Hjælp af de i 60 angivne Resultater [b og μ i System $7\,P$]

$$\alpha_1 = \frac{9\,.\,8}{2}\,.\,6 + 9\,.\,12 = 324, \qquad [\alpha_1] = 8\,.\,6 + 12 = 60.$$

Desuden er aabenbart $\xi = [\xi] = 0$, og da en Kurve er fuldkommen bestemt, naar dens tredobbelte Punkt og 8 andre af dens Punkter ere givne, er $[b_1] = 1$. Formlerne give dernæst

$$x = 72,\ \mu = 60,\ b_1 = 12,\ \mu' = 288,\ \beta = 216.$$

Naar man derpaa efterhaanden undersøger Systemerne $(8\,PL)$, $(7\,P\,2\,L)$ . . ., kjender man forud μ; man kan bestemme α_1, $[\alpha_1]$, ξ og $[\xi_1]$ og derpaa finde μ', b_1, x, $[b_1]$ og β. Ved Bestemmelsen af α_1 benytter man sig af, at i et System af tredie Orden med Dobbeltpunkt Antallet af de Kurver, der have dette særegne Punkt beliggende paa en given ret Linie gjennem et af Systemets givne Punkter P, men ikke i selve Punket P, er $b - 2\,[b]$, samt af den tredie Sætning i 29. Man finder da f. Ex. i Systemet $3\,P\,6\,L$ [1]:

---

(1) Vi ordne her og i det følgende Leddene efter Antallene af givne Tangenter, som gaa igjennem de særegne Kurvers Toppunkter, saaledes at de Faktorer, som staa udenfor { }, svare til de enkelte Toppunkter, som ligge paa en Mangefoldsgren, og de Faktorer, som staa udenfor [ ] svare til Toppunkter, som ligge i nye særegne Punkter eller i Skjæringspunkter mellem Grænsekurvernes forskjellige Dele. For større Tydeligheds Skyld have vi enkelte Steder — her i ξ — betegnet Antal af givne Tangenter eller af givne Punkter ved at sætte en Prik eller en Akcent ved vedkommende

$$\alpha_1 = \frac{3.2}{2}.1212 + 3.756 + 2.6\left[\frac{3.2}{2}(1046 - 2.256) + 3(1046 + 712) + 712.3\right]$$
$$+ 4.\frac{6.5}{2}[3(604 - 2.142) + 480] = \mathbf{200448},$$

$$[\alpha_1] = 2.1212 + 756 + 2.6[2.534 + 1758] + 4.\frac{6.5}{2}320 = \mathbf{56292},$$

$$\xi = \frac{6'.5'}{2}\left\{4.\frac{3^{\cdot}.2^{\cdot}}{2}.2.2 + 2.4'[4.\frac{3^{\cdot}.2^{\cdot}}{2}.4 + 2.3^{\cdot}.4.2] + 4.\frac{4'.3'}{2}.2.3^{\cdot}.4\right\}$$
$$+ \frac{6'.5'}{2}.4'\left\{2.3^{\cdot}.4.2 + 2.3'[2.3^{\cdot}.4 + 4.2] + 4.\frac{3'.2'}{2}.2\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{6'.5'}{2}\frac{4'.3'}{2}\left\{4.2 + 2.2'.2\right\} = \frac{6.5}{2}.1392 + \frac{6.5}{2}.4.264 + \frac{1}{2}\frac{6.5}{2}\frac{4.3}{2}16$$
$$= \mathbf{37440},$$

$$[\xi] = \frac{6'.5'}{2}\left\{2.2^{\cdot}.2.2 + 2.4'[2.2^{\cdot}.4 + 4.2] + 4.\frac{4'.3'}{2}.4\right\} + \frac{6'.5'}{2}.4'\left\{4.2 + 2.3'.4\right\}$$
$$= \frac{6.5}{2}.304 + \frac{6.5}{2}.4.32 = \mathbf{6480}.$$

Idet man behandler de andre Systemer paa samme Maade, kan man danne følgende Tavle, hvor den tykkere Streg adskiller de Tal, som man i hvert System forud kjender eller forud maa bestemme, og dem, som man finder ved Formlerne:

System.	α_1	$[\alpha_1]$	ξ	$[\xi]$	μ	μ'	b_1	x	$[b_1]$	β
$9P$	324	60	0	0	60	288	12	72	1	216
$8PL$	1488	282	0	0	288	1332	66	354	6	1020
$7P2L$	5772	1164	168	24	1332	5496	360	1692	36	4272
$6P3L$	19080	4128	1296	198	5496	19728	1776	7272	196	15840
$5P4L$	52440	12240	5814	960	19728	59940	7800	27528	954	51684
$4P5L$	117444	29730	17970	3120	59940	151008	28782	88722	3876	146256
$3P6L$	200448	56292	37440	6480	151008	301032	88356	239364	13096	352440
$2P7L$	247032	82464	53928	8904	301032	464976	205560	506592	32376	685152
$P8L$	207120	93648	56616	7728	464976	560688	352656	817632	57756	1041360
$9L$	108000		44604		560688	546120	454800	1015488		1243944

De ved saa vidtløftige Bestemmelser vigtige Prøver faar man ved strax at anvende de fundne Resultater for hvert enkelt System til de Bestemmelser, som nu skulle omtales i 63.

Tal. De foran disse staaende Tal ere de Koefficienter, som hidrøre fra den i 49 (og i 12) opstillede Regel.

Den anvendte Ordning sætter os ofte i Stand til at benytte samme Sammentælling i forskjellige Systemer. Saaledes faar man i 64 Brug for de enkelte Led i ξ. Havde man ordnet efter Antallene af givne Punkter, som befinde sig paa retliniede Grene, havde man faaet

$$\alpha_1 = \frac{3.2}{2}.7620 + 3.41052 + 54432,$$
$$[\alpha_1] = 2.7620 + 41052$$

og den tilsvarende Lettelse i Bestemmelsen af ξ og $[\xi]$.

63. Systemer $n=4$, $d=3$, $e=0$. — Ved Bestemmelsen af Karakteristiker i disse Systemer benytter man de i 39 udviklede Formler, idet man forud maa bestemme Antallet α_0 af Kurver sammensatte af Keglesnit og α_1 og $[\alpha_1]$ [ved 60], og idet man ifølge 62 kjender $(3d)$. Da Formlerne derefter for hvert enkelt System give saavel μ som μ', faar man Lejlighed til Prøver derved, at Karakteristiken μ' i et System er den samme som μ i det følgende.

Man har f. Ex. i Systemet $3P7L$: $(3d)=301032$, og man finder:

$$\alpha_0 = \frac{7'.6'}{1.2}.4.4 + \frac{7'.6'.5'}{1.2.3}.3^{\cdot}.4.2.4 + 2.7'\left[\frac{6'.5'}{1.2}.4.2.2 + \frac{6'.5'.4'}{1.2.3}.3^{\cdot}.4.2.4 + \frac{6'.5'}{1.2}.3^{\cdot}.2.2.4 + 6'.2.2\right]$$
$$+ 4.\frac{7'.6'}{2}\left[5'.2.2 + \frac{5'.4'}{2}.3^{\cdot}.4.4\right] = \mathbf{86352},$$

$$\alpha_1 = \frac{3.2}{2}.600.3 + 2.7\left[\frac{3.2}{2}.756 + 3.756.3\right] + 4.\frac{7.6}{2}.3.712 = \mathbf{311832},$$

$$[\alpha_1] = 2.600.3 + 2.7\,[2.756 + 756.3] + 4.\frac{7.6}{2}.712 = \mathbf{116328}.$$

Man finder saaledes:

Syst.	α_0	α_1	$[\alpha_1]$	$(3d)$	μ	μ'	b	x	$[b]$	β	$(2d)$
$10P$	504	1620	324	60	620	2184	768	708	96	2304	1296
$9PL$	1512	5400	1128	288	2184	7200	2952	2664	384	7776	4752
$8P2L$	3948	16272	3588	1332	7200	21776	10712	9380	1448	24440	16096
$7P3L$	10584	43344	10152	5496	21776	59424	35616	30120	4992	70416	49248
$6P4L$	23952	99360	24960	19728	59424	143040	106752	87024	15516	182496	134592
$5P5L$	46244	189360	51744	59940	143040	295544	281348	221408	42416	415424	322936
$4P6L$	71712	282600	86868	151008	295544	505320	633972	482964	99024	807336	663912
$3P7L$	86352	311832	116328	301032	505320	699216	1166352	865320	187248	1301280	1128576
$2P8L$	80864	237744	124272	464976	699216	783584	1705856	1240880	279152	1713536	1551808
$P9L$	59472	108000	108000	560688	783584	728160	1986672	1425984	329496	1849536	1730592
$10L$	35784	0		546120	728160	581904	1893528	1347408		1674144	1602576

64. Elementære Systemer $n=4$, $d=2$, $e=0$. — Bestemmelsen af disses Karakteristiker og Bestemmelsen af Karakteristikerne i Systemer af Kurver, der have et Røringspunkt mellem to Grene — hvilken sidste skal foretages i 65 — gribe saaledes ind i hinanden, at vi for at opstille dem adskilte allerede her maa benytte os af, at Karakteristiken μ i Systemet $10P$ i 65, som bliver Tallet $(2d)$ i det her betragtede System $11P$, er 200. I de følgende Systemer vil man derimod forud kjende μ, hvorfor det ifølge Formlerne i 55, hvor $\xi_1=\lambda=\nu=\psi=\chi=0$, vil være tilstrækkeligt at bestemme α_0, α_1 og ξ (ↄ: ξ_0) samt $[\alpha_1]$. Idet $(2d)$ hører med til de Tal, man derefter kan finde, kunne de Værdier, det

faar i disse andre Systemer, benyttes i 65. For Prøvernes Skyld er det lettest at foretage de to Rækker Bestemmelser samtidigt.

Vi finde f. Ex. i Systemet $3P8L$ ved Hjælp af 63, 61 og for ξ's Vedkommende Keglesnitslæren (se desuden Noten til 62):

$$\alpha_0 = 699216 \,.\, 3 + 2 \,.\, 8 \,.\, 1166352 + 4 \,.\, \frac{8 \,.\, 7}{2} \,.\, 99024 = \mathbf{31849968},$$

$$\alpha_1 = \frac{3 \,.\, 2}{2} \,.\, 21004 \,.\, 3 + 2 \,.\, 8 \left[\frac{3 \,.\, 2}{2} \,.\, 9766 + 3 \,.\, 9766 \,.\, 3\right] + 4 \,.\, \frac{8 \,.\, 7}{2} \,.\, 3 \,.\, 3424 = \mathbf{3214572},$$

$$[\alpha_1] = 2 \,.\, 21004 \,.\, 3 + 2 \,.\, 8 [2 \,.\, 9766 + 9766 \,.\, 3] + 4 \,.\, \frac{8 \,.\, 7}{2} \,.\, 3424 = \mathbf{1290792},$$

$$\xi_0 = \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.\, 1392 + \frac{8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2} \cdot \frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 264 + \frac{1}{2}\, \frac{8 \,.\, 7}{2}\, \frac{6 \,.\, 5}{2} \cdot \frac{4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2} \,.\, 16 = \mathbf{265440}.$$

Man kan da danne følgende Tavle, hvori vi ikke medtage nogen Pille μ', idet μ' kan aflæses nedenfor μ.

Syst.	α_0	α_1	$[\alpha_1]$	ξ_0	μ	b	x	$[b]$	$(2d)$
$11P$	1860	165	30	0	225	170	70	20	200
$10PL$	8088	690	132	0	1010	832	336	102	992
$9P2L$	33792	2772	564	0	4396	3972	1580	508	4784
$8P3L$	134208	10752	2352	0	18432	18336	7248	2448	22176
$7P4L$	497952	40320	9600	168	73920	81312	32256	11328	97776
$6P5L$	1696320	143760	37680	2280	280560	342240	136920	49620	406080
$5P6L$	5193768	472320	138432	16530	994320	1350952	544976	203272	1578892
$4P7L$	13954512	1366572	457494	80010	3230956	4908332	1988070	765288	5680504
$3P8L$	31849968	3214572	1290792	265440	9409052	16076136	6489448	2599328	18642496
$2P9L$	60019872	5559960	3019440	615888	23771160	45412832	18153616	7567088	53286656
$P10L$	92165280	5797680	5797680	1015560	50569520	106132960	41873520	18037920	126487760
$11L$	115892448	0		1122660	89120080	201239472	78339716		243554192
					129996216				

65. Systemer af Kurver af 4de Orden med Røring mellem to Grene. — Man benytter Formlerne i 56. Af den anden og tredie blandt disse udleder man

$$3\mu = 6\iota + \alpha_1 + 4\xi + 5\lambda + 8\nu.$$

Denne Formel maa i hvert Fald benyttes til Bestemmelse af Karakteristiken μ i System $10P$, hvor $\xi = \lambda = \nu = 0$; thi denne Karakteristik benyttes i 64. I de øvrige Systemer vil μ derimod være bekjendt fra 64, og den anførte Ligning kan tjene dels til Prøve dels til Bestemmelse af de ubekjendte Koefficienter i λ og ν [se Slutningen af 49].

Man har saaledes ifølge 64, at i System $4P6L$ $\mu = 1578892$, og idet τ bestemmes ved 62, α_1 og $[\alpha_1]$ ved 61, ξ ved Sætninger om Keglesnit, finder man[1]

$$\tau = 151008 + 2.6.28782 + 4.\frac{6.5}{2}.954 = \mathbf{553632},$$

$$\alpha_1 = \frac{4.3}{2}.9766 + 4.3424.6 + 2.6\left[\frac{4.3}{2}(3424 - 2.856) + 4(3424 + 976.4) + 976.3.4\right]$$
$$+ 4.\frac{6.5}{2}[4.488 + 256.4] = \mathbf{934884},$$

$$[\alpha_1] = 3.9766 + 3424.6 + 2.6[3.1712 + 7328] + 4.\frac{6.5}{2}.488 = \mathbf{228690},$$

$$\xi = \frac{6'.5'.4'}{1.2.3}\left\{4.\frac{4^{\cdot}.3^{\cdot}}{2}.4.2 + (2+1)3'\left[4.\frac{4^{\cdot}.3^{\cdot}}{2}.4 + 2.4^{\cdot}.4.2\right] + (4+1)\frac{3'.2'}{2}.2.4^{\cdot}.2\right.$$
$$\left. + 2.3'.2'\left[4.\frac{4^{\cdot}.3^{\cdot}}{2}.2 + 2.4^{\cdot}.6 + 2.2^2\right] + (4+2)\frac{3'.2'}{2}.1'[2.4^{\cdot} + 2]\right\}$$
$$+ \frac{6'.5'}{1.2}\cdot\frac{4'.3'}{1.2}\left\{2.4^{\cdot}.4.2 + (2+1)2'[2.4^{\cdot}.2 + 2.2] + (4+1)\frac{2'.1'}{2} + 2.2'.1'[2.4^{\cdot} + 3]\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{6'.5'}{2}\frac{4'.3'}{2}.2'\{2.2 + (2+1)\} = \mathbf{87600},$$

$$\lambda = 9.\frac{4.3}{2}.A = \mathbf{54}A, \quad [\lambda] = 3.3A = \mathbf{9}A. \quad \lambda = 0.$$

Man finder da ved Indsættelse i ovenstaaende Formel, at $A = 480$, eller at Bestemmelsen af en Kurve λ med Røring mellem to af de Grene, der falde sammen i den tredobbelte rette Linie, ved Beliggenheden af de retliniede Grene og de 6 enkelte Toppunkter, giver 480 Opløsninger.

Idet denne Koefficient A er bestemt, kan man i de følgende Systemer finde λ og $[\lambda]$. Den anførte Formel kan da paany i Systemet $2P8L$ benyttes til Bestemmelse af den Koefficient, som indgaar i ν. Man finder da, at Bestemmelsen af en Kurve ν med Røring mellem to af de Grene, der falde sammen i den firdobbelte rette Linie, ved Beliggenheden af denne Linie og af de 8 Toppunkter, giver 43680 Opløsninger.

De herhen hørende Bestemmelser, ved hvilke ogsaa μ' er forud bekjendt, indeholdes forøvrigt i følgende Tavle, hvor μ' aflæses nedenfor μ, og hvor $A = 480$, $B = 43680$.

---

(1) Ved Bestemmelsen af α_1 benytter man, at der i et System af Kurver uden særegne Punkter vil være $\mu - 2[L]$ Kurver, som gaa gjennem et Punkt af en given Tangent L uden at høre til de $[L]$, der have dette Punkt til Røringspunkt. Desuden benyttes anden Sætning i 29. — Ved Bestemmelsen af ξ benytter man blandt andet, at Indhyllingskurven for de rette Linier, som forbinde to faste rette Liniers Skjæringspunkter med Kurver i et System, er af Klassen $(2n-1)\mu$. Se forøvrigt Noten til 62.

Syst.	τ	α_1	$[\alpha_1]$	ξ	$\frac{\lambda}{A}$	$\frac{[\lambda]}{A}$	$\frac{\nu}{B} = 4\frac{[\nu]}{B}$	μ	b_1	$[b_1]$
$10P$	60	240	42	0	0	0	0	200	52	5
$9PL$	312	1104	200	0	0	0	0	992	292	30
$8P2L$	1600	4752	904	0	0	0	0	4784	1632	180
$7P3L$	7728	19488	3936	168	0	0	0	22176	8736	1032
$6P4L$	34800	76080	16400	2112	0	0	0	97776	44088	5566
$5P5L$	145780	278880	64192	16170	0	0	0	406080	206312	27580
$4P6L$	553632	934884	228690	87600	54	9	0	1578892	865532	120580
$3P7L$	1863600	2772072	715064	356160	693	119	0	5680504	3183092	454760
$2P8L$	5220688	6939168	1874296	1077888	3234	448	16	18642496	9678016	1349252
$P9L$	11570640	14144640	3982560	2410632	6804	0	144	53286656	23334088	3003866
$10L$	20038200	23190720		3974040	0		630	126487760	44300872	
								243554192		

66. Systemer af fjerde Orden med et fast og et frit Dobbeltpunkt. — Ligningerne i 55 give

$$7\mu = \mu' + \alpha_1 + 2(2d) + 6\xi_0 + 2\xi_1 + 9\lambda + 16\nu + 6\psi + 6\chi.$$

Idet man fra 64 kjender μ og μ', og man kan bestemme α_1 ved 61, $(2d)$ ved 65, og idet ξ_0, ξ_1, ψ og χ og — paa nogle Koefficienter nær — λ og ν kun bero paa Bestemmelser af Keglesnit og rette Linier, kan denne Ligning dels tjene til Prøve paa disse Bestemmelser, dels benyttes til Bestemmelsen af de ubekjendte Koefficienter i λ og ν, ganske som i 65. Man vil da finde, at Bestemmelsen af en Kurve λ eller ν, hvis sammenfaldende Grene skulle danne to Dobbeltpunkter, ved Beliggenheden af de retliniede Grene, af de enkelte Toppunkter og et af Dobbeltpunkterne henholdsvis giver 360 og 32760 Opløsninger. I efterstaaende Tavle ere disse Koefficienter betegnede ved A og B.

Formlerne i 55 kunne derefter tjene til Bestemmelse af b og $[b]$, der betegne Antallene af Kurver, hvis frie Dobbeltpunkt falder paa en given ret Linie eller i et af Systemets givne Punkter.

Ved Bestemmelsen af de særegne Kurvers Antal maa det iagttages, at enhver Kurve $(2d)$, ξ_0 og ξ_1, som tilfredsstiller Systemets Betingelser, skal medtages to Gange i Tallet $(2d)$, ξ_0 eller ξ_1. Det sidste er allerede anført i Slutningen af 49, og da i Kurverne $(2d)$ og ξ_0 det frie Dobbeltpunkt falder sammen med det faste, kommer man til dette Resultat gjennem den selvsamme Betragtning, som har ført til Hovedregelen i 49 (om Kurver med en Mangefoldsgren, som rører en Kurve, som Systemets Kurver skulle røre). Som Exempel paa Bestemmelsen kunne vi tage Systemet $2P7L$, hvor $\mu = 765288$, $\mu' = 2599328$:

$$\alpha_1 = 2.9766.2 + 2.7[2.3424 + 3424.3] + 4.\frac{7.6}{2}.976 = \mathbf{360728},$$

$$[\alpha_1] = 9766.2 + 2.7.3424 = \mathbf{67468},$$

$$\frac{1}{2}(2d) = \mathbf{454760},$$

$$\frac{1}{2}\xi_0 = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\left\{2.2.4 + 2.3[2.2.4 + 4.2] + 4.\frac{3.2}{2}.2\right\} + \frac{7.6}{2}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3}\left\{4 + 2.2.2\right\}$$
$$= \mathbf{8960}.$$

$$\frac{1}{2}\xi_1 = 8.\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\cdot\frac{3.2}{2}.2 + 4.\frac{7.6}{2}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3}.2 = \mathbf{3360},$$

$$\frac{1}{A}\lambda = \frac{7.6}{2} + 2.7[3.2 + 1] = \mathbf{119}, \quad \frac{1}{A}[\lambda] = 2.7 = \mathbf{14}, \quad \nu = [\nu] = 0,$$

$$\psi = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\left\{2.2.2 + 4.2 + 2.3[2.2.2 + 8] + 4.\frac{3.2}{2}.2\right\}$$
$$+ \frac{7.6}{2}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3}\left\{4 + 2.2.2\right\} = \mathbf{7280},$$

$$[\psi] = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\left\{2 + 2.3.2\right\} = \mathbf{490},$$

$$\chi = 4\left(\frac{7'.6'}{2}\left(2'.\frac{5'.4'}{2} + 5'\right) + 2.7'\left[2'.\frac{6'.5'}{2} + \frac{6'.5'}{2}\right]\right) = \mathbf{4620},$$

$$[\chi] = 2\left(\frac{7.6}{2}\cdot\frac{5.4}{2} + 2.7.\frac{6.5}{2}\right) = \mathbf{840}.$$

Bestemmelserne indeholdes forøvrigt i efterfølgende Tavle:

Syst.	α_1	$[\alpha_1]$	$\frac{(2d)}{2}$	$\frac{\xi_0}{2}$	$\frac{\xi_1}{2}$	$\frac{\lambda}{A}$	$\frac{[\lambda]}{A}$	$\frac{\nu}{B}$	ψ	$[\psi]$	χ	$[\chi]$	μ	b	$[b]$
$9P$	18	2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	9	1
$8PL$	86	10	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	102	52	6
$7P2L$	388	48	180	0	0	0	0	0	0	0	0	0	508	300	36
$6P3L$	1680	224	1032	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2448	1680	212
$5P4L$	7040	1024	5566	10	30	0	0	0	22	2	0	0	11328	9050	1218
$4P5L$	28288	4512	27580	190	330	0	0	0	310	30	0	0	49620	45564	6516
$3P6L$	106176	18560	120580	1620	1620	9	1	0	1980	180	360	60	203272	206292	31176
$2P7L$	360728	67468	454760	8960	3360	119	14	0	7280	490	4620	840	765288	819240	130656
$P8L$	1050520	198264	1349252	31640	0	448	0	4	16100	630	26040	4620	2599328	2596800	422232
$9L$	2540520		3003866	68040	0	0		36	20412		94500		7567088	6240240	
													18037920		

μ' aflæses ogsaa her nedenfor μ, og i System $P8L$ er $[\nu] = \frac{1}{4}\nu = B$. Ellers er $[\nu] = 0$.

67. Systemer af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt paa en given ret Linie samt et frit Dobbeltpunkt. — Man benytter de samme Ligninger som i 66. Idet ogsaa Koefficienterne λ og ν ere de samme, tjener den Ligning, som benyttedes ved disses Bestemmelse, kun til Prøve. Det geometriske Sted for Dobbeltpunkter er sammensat af det geometriske Sted for det frie Dobbeltpunkt af Ordenen b_0 og af den givne rette Linie taget b_1 Gange, idet b_1 er Antallet af Kurver, der have Dobbeltpunktet beliggende i et fast Punkt af Linien, og altsaa er bekjendt fra 66. Vi maa have $b = b_0 + b_1$. — Om Bestemmelsen af $(2d)$, ξ_0 og ξ_1 gjælde samme Bemærkninger som i 66. Tallene $[b]$ behøve vi ikke at tage Hensyn til, da de ville være de samme som Tallene b i de i 66 undersøgte Systemer. Deres Bestemmelse kan dog give en ny Prøve.

Som Exempel kunne vi tage Systemet $3P7L$; mellem de herhen hørende Bestemmelser og dem, der ere foretagne i Exemplet i 66, vil man let opdage nogen Sammenhæng[1]. Man finder

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left(\frac{3^{\cdot}.\,2^{\cdot}}{2} + 3^{\cdot}.\,3\right)9766\,.\,2 + 2\,.\,7'\left[\frac{3^{\cdot}.\,2^{\cdot}}{2} + 3^{\cdot}.\,5 + 3^2\right]3424 + 4\,.\,\frac{7'.\,6'}{2}[3^{\cdot} + 3]\,976 \\
&= \mathbf{2020560},
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(2d) = \mathbf{3183092},$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\xi_0 &= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\left\{4.\frac{3.2}{2}.4 + 2.3.4.2 + 2.3\left[4.\frac{3.2}{2}.4 + 2.3.3.4 + 4.2^2\right] + 4.\frac{3.2}{2}\left[2.3.2 + 2.2\right]\right\} \\
&\quad + \frac{7\,.\,6}{2}\cdot\frac{5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}\left\{2\,.\,3\,.\,4 + 4\,.\,2 + 2\,.\,2\,[2\,.\,3\,.\,2 + 3\,.\,2] + 4\,.\,\frac{2\,.\,1}{2}\,.\,1\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\frac{7\,.\,6}{2}\,\frac{5\,.\,4}{2}\cdot\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}\left\{2 + 2\,.\,1\right\} = \mathbf{62580},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\xi_1 &= 8\,.\,\frac{7'.\,6'.\,5'.\,4'}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left\{2\,.\,3^{\cdot}.\,\frac{3'.\,2'}{2}\,.\,2^{\cdot} + \frac{3'.\,2'}{2}\cdot\frac{3^{\cdot}.\,2^{\cdot}}{2}\right\} \\
&\quad + 4\,.\,\frac{7'.\,6'}{2}\cdot\frac{5'.\,4'.\,3'}{1\,.\,2\,.\,3}\left\{2\,.\,3^{\cdot}.\,2^{\cdot} + \frac{3^{\cdot}.\,2^{\cdot}}{2}\,.\,2' + \frac{2'.\,1'}{2}\,.\,3^{\cdot}\right\} + 2\,.\,\frac{1}{2}\,\frac{7\,.\,6}{2}\,\frac{5\,.\,4}{2}\cdot\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}\,.\,3 \\
&= 8\,.\,\frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,45 + 4\,.\,\frac{7\,.\,6}{2}\cdot\frac{5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,21 + \frac{7\,.\,6}{2}\cdot\frac{5\,.\,4}{2}\cdot\frac{3\,.\,2}{2}\,.\,3 = \mathbf{32130},
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{A}\lambda = \frac{7'.\,6'}{2}\,.\,3\,.\,3^{\cdot} + 2\,.\,7'\left[9\,.\,\frac{3^{\cdot}.\,2^{\cdot}}{2} + 3\,.\,3^{\cdot}\right] = \mathbf{693}, \qquad \nu = 0,$$

---

[1] Angaaende α_1 og ξ_0 se sidste Del af Noten til 65. De delvise Sammentælninger af ξ_1 og ψ have Hensyn til det følgende. I Ordningen af de forskjellige Led i χ (ligesom senere i $\varkappa$) tages navnlig Hensyn til de dobbelte (tredobbelte) Toppunkter.

$$\psi = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\left\{4.\frac{3.2}{2}.2 + 2.3.4.2 + 2.3\left[4.\frac{3.2}{2}.2 + 2.3.8 + 4.2\right] + 4.\frac{3.2}{2}[2.3.2+2]\right\}$$

$$+ \frac{7.6}{2}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3}\left\{2.3.4 + 4.2 + 2.2[2.3.2+6] + 4.\frac{2.1}{2}.1\right\} + \frac{1}{2}\,\frac{7.6}{2}\,\frac{5.4}{2}\cdot\frac{3.2}{1.2}\left\{4 + 2.1\right\}$$

$$= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}.720 + \frac{7.6}{2}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3}.108 + \frac{1}{2}\,\frac{7.6}{2}\,\frac{5.4}{2}\cdot\frac{3.2}{2}.6 = \mathbf{49770},$$

$$\chi = 8\left(\frac{7'.6'}{2}.3'\left(\frac{5'.4'}{2} + 5'\right) + 2.7'.2.\frac{3'.2'}{2}\cdot\frac{6'.5'}{2}\right) = \mathbf{17640}.$$

Resultaterne ere forøvrigt sammenfattede i følgende Tavle, hvor μ' aflæses nedenfor μ, og hvor $A = 360$, $B = 32760$:

Syst.	α_1	$\frac{2d}{2}$	$\frac{\xi_0}{2}$	$\frac{\xi_1}{2}$	$\frac{\lambda}{A}$	$\frac{\nu}{B}$	ψ	χ	μ	b_1	b_0
$10P$	150	52	0	0	0	0	0	0	170	20	74
$9PL$	684	292	0	0	0	0	0	0	832	102	408
$8P2L$	2940	1632	0	0	0	0	0	0	3972	508	2240
$7P3L$	12096	8736	0	0	0	0	0	0	18336	2448	11904
$6P4L$	48000	44088	84	180	0	0	144	0	81312	11328	60672
$5P5L$	181920	206312	1460	2100	0	0	1940	0	342240	49620	290624
$4P6L$	640704	865532	11805	11295	54	0	12510	1440	1350952	203272	1262998
$3P7L$	2020560	3183092	62580	32150	693	0	49770	17640	4908332	765288	4848960
$2P8L$	5336616	9678016	222880	43680	3234	16	133000	93240	16076136	2599328	15299384
$P9L$	11119920	23334088	544824	0	6804	144	244944	294840	45412832	7567088	37782752
$10L$	17393040	44300872	941220	0	0	630	296730	633150	106132960	18037920	72166224
									201239472		

68. Systemer af 4de Orden med et fast Dobbeltpunkt eller et Dobbeltpunkt paa en given ret Linie. — Bestemmelsen af Karakteristikerne i disse Systemer, hvortil man benytter Ligningerne i 54, maa foretages samtidig paa Grund af, at de dertil hørende Tal λ og ν indeholde flere ubekjendte Koefficienter, end man kan finde alene ved den ene Række Systemers Prøveligninger. Disse Koefficienter ere følgende:

A er Antallet af Kurver λ med et Dobbeltpunkt, som bestemmes ved Beliggenheden af de to retliniede Grene og af de 8 enkelte Toppunkter, medens Dobbeltpunktet er et ubekjendt Punkt af den tredobbelte retliniede Gren.

B er Antallet af Kurver λ' med et Dobbeltpunkt, som bestemmes ved Beliggenheden af de to retliniede Grene, af Dobbeltpunktet og 7 af de enkelte Toppunkter.

C er Antallet af Kurver λ med Dobbeltpunkt, som bestemmes ved Beliggenheden af den 3-dobbelte rette Linie, af de enkelte Toppunkter og Dobbeltpunktet samt et Punkt af den enkelte retliniede Gren.

D er Ordenen af det geometriske Sted for et enkelt Toppunkt, Dobbeltpunktet eller det dobbelte Toppunkt paa en Kurve λ med Dobbeltpunkt, hvis 3-dobbelte Gren drejer sig om et fast Punkt, medens de øvrige af de anførte Punkter bevæge sig paa rette Linier. Hvis en af disse rette Linier gaar gjennem det faste Punkt, eller, med andre Ord, hvis det faste Punkt er Dobbeltpunktet, et enkelt Toppunkt eller det dobbelte Toppunkt, maa man ombytte D med $D-A$, $D-B$ eller $D-C$.

E er Antallet af Kurver ν med et Dobbeltpunkt, som bestemmes ved Beliggenheden af den 4-dobbelte rette Linie samt af de 10 Toppunkter.

F er Antallet af Kurver ν med et Dobbeltpunkt, som bestemmes ved Beliggenheden af den rette Linie, 9 af Toppunkterne samt Dobbeltpunktet.

G er Ordenen af det geometriske Sted for et Toppunkt eller Dobbeltpunktet paa en Kurve ν med Dobbeltpunkt, naar den rette Linie drejer sig om et fast Punkt, medens de øvrige af disse Punkter gjennemløbe rette Linier. Er det faste Punkt selv Dobbeltpunktet eller et enkelt Toppunkt, maa G ombyttes med $G-E$ eller $G-F$.

Ved Bestemmelsen af Karakteristikerne og disse Koefficienter benyttes nu følgende to Ligninger i 54:

$$\alpha = 20\mu - 10b - 20\xi_1 - 30\lambda - 50\nu - 30\psi - 22\chi - 12\xi_2 - 20\eta - 30\zeta - 20\varkappa_1 - 16\varkappa_2 - 10\theta,$$
$$\mu' = 6\mu - 2b - 2\xi_1 - 6\lambda - 12\nu - 4\psi - 4\chi - 2\xi_2 - 3\eta - 4\zeta - 3\varkappa_1 - 3\varkappa_2 - 2\theta.$$

Heri kan man direkte bestemme α (ved 64, 66 og 67) samt, paa de anførte Koefficienter i λ og ν nær, ξ_1, λ, ν, ψ, χ, ξ_2, η, ζ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, θ, som kun bero paa Bestemmelse af rette Linier og Keglesnit. I Systemer af Kurver med givet Dobbeltpunkt er desuden $b=0$, hvorved μ og μ' kunne bestemmes, dog i de Systemer, hvor ikke $\lambda=0$, $\nu=0$, foreløbig kun som lineære Funktioner af Koefficienter A, B, C.... I Systemerne af Kurver med Dobbeltpunkt paa en given ret Linie vil man opnaa det samme, idet i ethvert af disse Systemer Størrelsen b er Antallet af Kurver med Dobbeltpunkt i et fast Punkt af den givne rette Linie, altsaa en Karakteristik i Rækken af Systemer med givet Dobbeltpunkt.

Nu er tillige i begge Rækker Systemer Karakteristiken μ i et System ligestor med Karakteristiken μ' i det foregaaende, hvilket dels giver de fornødne Ligninger til Bestemmelsen af Koefficienterne A, B, C...., dels giver Prøveligninger. Idet nedenstaaende Tavle viser, at Koefficienterne indføres efterhaanden og lige tidligt i de to Rækker Systemer,

vil det være bekvemt at lade Undersøgelserne af de to Rækker Systemer følges ad for saa snart som muligt at faa de indførte Koefficienter bestemte, saaledes at man ikke kommer til at regne med Ligninger med mange ubekjendte. Af denne Grund bliver det allermest bekvemt — hvad jeg ogsaa har gjort ved den virkelige Bestemmelse — ogsaa at lade Undersøgelsen af de Systemer, som skulle omtales i 69, følge med Undersøgelsen af de Rækker Systemer, som her beskjæftige os.

Hvad der volder mest Arbejde, er her som overalt Bestemmelsen af Tallene ξ_1, λ o. s. v. Som Exempel skulle vi vise denne **Bestemmelse for Systemet** $2P\ 9L$ i **Rækken af Systemer af Kurver med Dobbeltpunktet paa en given ret Linie:**

$$\alpha = 45412832 + 2.9.15299384 + 4.\frac{9.8}{2}.819240 = \mathbf{438772304},$$

$$\frac{\xi_1}{2} = 8.\frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}\left\{\frac{3.2}{2}[2.2(1+1)+2+1]\right\} + 4.\frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\left\{2.2.2+2.2+2+2+1\right\}$$
$$+ 2.\frac{1}{2}.\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}\left\{2+1\right\} = \mathbf{84924},$$

$$\lambda = B\left(\frac{1}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7.6}{2} + 2.9[3.2.\frac{8.7}{2} + \frac{8.7}{2}] + 4.\frac{9.8}{2}.3.2\right) + C.3.2.\frac{9.8}{2} + D.3.2.2.9$$
$$+ (D-B)\frac{9.8}{2} + (D-C)\,2.9 = \mathbf{4734}\,B + \mathbf{198}\,C + \mathbf{162}\,D,$$

$$\nu = \mathbf{16}.F,$$

$$\psi = \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}\left\{4.\frac{2.1}{2}.1 + 2.2.6 + 4.2 + 2.3[2.2.2+4]\right\}$$
$$+ \frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\left\{2.2.2+8+2.2.2\right\} + \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2 = \mathbf{30996}$$

$$\chi = 4\left(\frac{9.8}{2}(\frac{2.1}{2}+2)\frac{7.6.5}{1.2.3} + 2.9.\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\right) = \mathbf{20160},$$

$$\frac{\xi_2}{2} = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}\left\{4.\frac{2.1}{2}.1 + 2.5[4.\frac{2.1}{2}.2 + 2.2.2.2] + 4.\frac{5.4}{2}[2.2.4 + 4.\frac{2.1}{2}.4 + 2.2.3.4 + 4.2^2]\right.$$
$$\left. + 8.\frac{5.4}{2}.3[2.2.4+4.2] + 16.\frac{1}{2}\frac{5.4}{2}\frac{3.2}{2}.2\right\}$$
$$+ \frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5}{1.2.3}\left\{2.2.2 + 2.4[2.2.4+4.2] + 4.\frac{4.3}{2}[4+2.2.4+3.4] + 8.\frac{4.3}{2}.2.2\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4}{1.2}\left\{4+2.3.4+4.\frac{3.2}{2}.2\right\} = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}.10324 + \frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5}{1.2.3}.1160$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4}{2}.52 = \mathbf{2958984},$$

$$\eta = \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}\left\{4.\frac{2.1}{2}.1 + 2.2.2.2 + 3.4\left[4.\frac{2.1}{2}1 + 2.2.6 + 4.2\right] + 9.\frac{4.3}{2}[2.2.2+4]\right\}$$
$$+ \frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\left\{2.2.2 + 4.2 + 3.3\,[2.2.2+8] + 9.\frac{3.2}{2}.2\right\} + \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4.3}{1.2.3}\left\{4+3.2.2\right\}$$
$$= \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}1100 + \frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5}{1.2.3}.214 + \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4}{2}.16 = \mathbf{468720},$$

$$\zeta = 16.\frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}.\frac{2.1}{2} + 4.\frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.1 = \mathbf{19656},$$

$$\varkappa_1 = 4\left(\frac{2^{\cdot}.1^{\cdot}}{2}.\frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.5 + 2^{\cdot}.\frac{9.8}{2}.\frac{7.6}{2} + 0 + 3.9\left[\frac{2^{\cdot}.1^{\cdot}}{2}.\frac{8.7}{2}.6 + 2^{\cdot}\left(\frac{8.7}{2} + \frac{8.7}{2}.6\right) + \frac{8.7}{2}\right]\right.$$
$$\left. + 9.\frac{9.8}{2}.2^{\cdot}.7\right) = \mathbf{95256}$$

$$\varkappa_2 = 4\left(\frac{2.1}{2}.\frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4.3}{1.2.3} + 2.\frac{9.8}{2}.\frac{7.6}{2}\frac{5.4}{2} + \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.5\right.$$
$$\left. + 3.9\left[\frac{2.1}{2}.\frac{8.7}{2}.\frac{6.5.4}{1.2.3} + 2\left(\frac{8.7}{2}.\frac{6.5}{2} + \frac{8.7}{2}.\frac{6.5.4}{1.2.3}\right) + \frac{8.7}{2}.\frac{6.5}{2}\right] + 9.\frac{9.8}{2}.2.\frac{7.6.5}{1.2.3}\right)$$
$$= \mathbf{491400},$$

$$\vartheta = 2\left(\frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}.2^6.2^5.4 + \frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}.2^5.2^4.4 + \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2^4.2^3.2\right.$$
$$\left. + \frac{1}{1.2.3}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}\frac{5.4}{2}.\frac{3.2.1}{1.2.3}.2^3.2^2.1\right) = \mathbf{5521152}.$$

I Systemer med fast Dobbeltpunkt foretages Bestemmelserne paa samme Maade, men ere gjennemsnitlig noget simplere, og flere Sammentællinger benyttes i begge Rækker Bestemmelser.

Man finder da for Systemer med fast Dobbeltpunkt, at

i Systemet $(10-t)\ PtL$ er for $t<4$, $\mu = 6^t$, $\mu' = 6^{t+1}$,

og dernæst:

Syst.	α	$\frac{\xi_1}{2}$	λ	ν	ψ	χ	$\frac{\xi_2}{2}$	η	ζ	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	ϑ	μ
$6P4L$	25632	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	1296
$5P5L$	148600	0	0	0	0	0	230	22	0	0	0	0	7728
$4P6L$	823120	24	0	0	9	0	2640	444	27	0	0	1024	45382
$3P7L$	4200720	462	$9B$	0	119	0	20160	3864	315	168	840	19712	258112
$2P8L$	19198880	4242	$-A$ $+140B$ $+6C$ $+D$	0	672	280	110320	1 704	1120	3472	15680	214144	1379412
$P9L$	73123952	24948	$-18A$ $+648B$ $+36C$ $+18D$	$4F$	2016	2520	416052	51660	0	29484	117180	1380288	6732832
$10L$	214988880	108360	0	$-E$ $+45F$ $+G$	2940	12600	965160	75474	0	156870	491400	5851860	27850500
													91446048

For Systemer med Dobbeltpunkt paa en given ret Linie finder man

Syst.	α	$\frac{\xi_1}{2}$	λ	ν	ψ	χ	$\frac{\xi_2}{2}$	η	ζ	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	ϑ	μ
$11P$	170	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
$10PL$	980	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	52
$9P2L$	5640	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	300
$8P3L$	32400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1728
$7P4L$	183744	0	0	0	0	0	84	0	0	0	0	0	9936
$6P5L$	1016160	0	0	0	0	0	1560	144	0	0	0	0	56688
$5P6L$	5381440	120	0	0	72	0	17325	2826	150	0	0	4096	318000
$4P7L$	26417680	2184	$54B$	0	1057	0	130620	25116	1911	672	3360	78848	1729898
$3P8L$	116764200	18102	$828B$ $+27C$ $+9D$	0	7378	1680	724080	133980	9366	12768	63840	856576	8888960
$2P9L$	438772304	84924	$4734B$ $+198C$ $+162D$	$16F$	30996	20160	2958984	468720	19656	95256	491400	5521152	41976108
$P10L$	1329212000	216720	$11880B$ $+450C$ $+900D$	$180F$ $+4G$	81480	119700	8803620	1088388	0	381780	2250200	23407440	172056352
$11L$	3161749200	0	0	$935F$ $+55G$	121044	485100	18399150	1541232	0	686070	7172550	71012172	580054968 1563293916

idet b aflæses paa den foregaaende Tavle som μ' i det System, hvor de givne Punkters Antal er det samme. I begge Tavler aflæses μ' nedenfor μ. Som Resultater faas foruden Værdierne af μ og μ':

$$A = C = \mathbf{1092}, \quad B = \mathbf{574}, \quad D = \mathbf{3388},$$
$$E = \mathbf{206640}, \quad F = \mathbf{97776}, \quad G = \mathbf{592200}.$$

69. Elementære Systemer $n = 4$, $d = 1$, $e = 0$. — Man benytter de samme Formler som i 68, idet Undersøgelsen dog lettes ved, at de usædvanlige særegne Kurver bortfalde. Af Koefficienter i λ og ν træffer man kun paa A og E, som vi allerede have bestemt i 68. Fra 68 kjender man desuden b, saa den Ligning, hvor α udtrykkes, blot vil tjene til Prøveligning undtagen i Systemet $12P$ — med mindre man foretager denne Række Bestemmelser samtidig med de to Rækker Bestemmelser i 68.

Ved Bestemmelsen af ξ_1 og ψ kan man benytte, hvad der i 67 er fundet ved de tilsvarende Bestemmelser med Hensyn til Systemer med to Dobbeltpunkter, hvoraf det ene paa en given ret Linie. α findes ved 64, 66 og 67. Man finder f. Ex. for Systemet $3P9L$, foruden $b = 41976108$ (se 68)

$$\alpha = 23771160.2 + 2.9.16076136 + 4.\frac{9.8}{2}.765288 = \mathbf{447114240},$$

$$\frac{\xi_1}{2} = 8 . \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6} . 45 + 4 . \frac{9.8}{2} . \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} . 21 + 2 . \frac{1}{2} \frac{9.8}{2} \frac{7.6}{2} . \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} . 3 = \mathbf{105084},$$

$$\frac{\lambda}{A} = \frac{9.8}{2} 3.3 + 2.9 \left[9 . \frac{3.2}{2} + 3.3\right] = \mathbf{972}, \quad \frac{\nu}{E} = 0,$$

$$\psi = \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6} . 720 + \frac{9.8}{2} . \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} . 108 + \frac{1}{2} \frac{9.8}{2} \frac{7.6}{2} . \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} . 6 = \mathbf{153468},$$

$$\chi = 8 \left(\frac{9.8}{2} . 3 . \frac{7.6.5}{1.2.3} + 2.9 . \frac{3.2}{2} . \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \right) = \mathbf{60480}.$$

Man kan da danne efterstaaende Tavle, hvor μ' som sædvanlig aflæses nedenfor μ:

System.	α	$\frac{\xi_1}{2}$	$\frac{\lambda}{1092}$	$\frac{\nu}{206640}$	ψ	χ	b	μ
$12P$	450	0	0	0	0	0	9	27
$11PL$	2360	0	0	0	0	0	52	144
$10P2L$	12200	0	0	0	0	0	300	760
$9P3L$	61920	0	0	0	0	0	1728	3960
$8P4L$	306720	0	0	0	0	0	9936	20304
$7P5L$	1472160	0	0	0	0	0	56688	101952
$6P6L$	6775200	180	0	0	144	0	318000	498336
$5P7L$	29543320	3150	0	0	2870	0	1729898	2352720
$4P8L$	120117880	24822	54	0	26852	3360	8888960	10632444
$3P9L$	447114240	105084	972	0	153468	60480	41976108	45442800
$2P10L$	1477274720	216720	6750	16	581280	491400	172056352	181059912
$P11L$	4177924640	0	21780	220	1461768	2494800	580054968	653188288
$12L$	9851750640	0	0	1485	2266110	9251550	1563293916	2054961360
								5474784888

70. Systemer $n = 4$, $d = e = 0$. — Ved Bestemmelsen af Karakteristikerne i elementære Systemer af almindelige Kurver af fjerde Orden bruges følgende Formler (se 51).

$$\mu' = 6\mu - 2\xi - 3\eta - 4\zeta - 3\varkappa - 6\lambda - 12\nu - 2\vartheta,$$
$$\alpha = 27\mu - 20\xi - 32\eta - 46\zeta - 24\varkappa - 45\lambda - 72\nu - 14\vartheta.$$

Idet disse give saavel μ som μ', naar man forud kjender α, ξ, $\eta \ldots$, faar man Prøveligninger ved at sætte μ' af et System ligestor med μ i det følgende. Men saasnart λ eller ν ophører at være Nul, hvilket sker for Systemet $4P9L$ og de følgende, træffer man i Udtrykkene for disse Tal paa ubekjendte Koefficienter — som vi skulle se, ialt 5 — og til disses Bestemmelse maa man da benytte de 5 sidste Prøveligninger (μ' i System

$5P8L$ lige stor med μ i System $4P9L$ o. s. v.). Ikke desmindre vil man ogsaa faa en Prøve paa de sidste vanskelige Bestemmelser, da Koefficienterne, der findes ved Divisioner med mangecifrede Tal, skulle være hele Tal.

De ubekjendte Koefficienter betegnes paa følgende Maade: ved

H Antallet af Kurver λ, som bestemmes ved Beliggenheden af de to retliniede Grene og af 9 af de enkelte Toppunkter; ved

I Antallet af Kurver λ, som bestemmes ved Beliggenheden af den tredobbelte rette Linie, af de enkelte Toppunkter og af et Punkt af den enkelte retliniede Gren; ved

K Ordenen af det geometriske Sted for et enkelt Toppunkt eller for det dobbelte Toppunkt paa en Kurve λ, hvis tredobbelte Gren drejer sig om et fast Punkt, medens de øvrige af de anførte Punkter bevæge sig paa rette Linier ($K—H$ eller $K—I$, hvis et enkelt Toppunkt eller det dobbelte Toppunkt skal falde i selve det faste Punkt); ved

L Antallet af Kurver ν, som bestemmes ved Beliggenheden af den firdobbelte rette Linie og 11 Toppunkter; ved

M Ordenen af det geometriske Sted for et Toppunkt paa en Kurve ν, naar den rette Linie drejer sig om et fast Punkt, medens de 11 andre Toppunkter gjennemløbe rette Linier ($M—L$, hvis et Toppunkt skal falde i selve det faste Punkt).

Bestemmelsen af α sker ved 68 og 69. Ved Bestemmelsen af ξ, η og ζ kommer Bestemmelsen af ξ_2, η og ζ i 68 os til Gode. Som Exempel kunne vi tage Systemet $2P11L$, hvor man finder

$$\alpha = 653188288 + 2.11.172056352 + 4.\frac{11.10}{2}.6732832 = \mathbf{5919651072},$$

$$\frac{\xi}{2} = \frac{11.10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5.6}.10324 + \frac{11.10}{2}.\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}.1160 + \frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}.52$$
$$= \mathbf{14610288},$$

$$\eta = \frac{11.10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6.7}.1100 + \frac{11.10}{2}.\frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}.214 + \frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}.16$$
$$= \mathbf{1684320},$$

$$\zeta = 16.\frac{11.10}{2}\ \frac{9.8.7..3}{1.2.3..7}.\frac{2.1}{2} + 4.\frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7.6..2}{1.2..6}.1 = \mathbf{59400},$$

$$\varkappa = 4\left(\frac{2.1}{2}.\frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5}{1.2.3} + 2\ \frac{11.10}{2}.\frac{9.8}{2}.\frac{7.6}{2} + \frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.7\right.$$
$$+ 3.11\left[\frac{2.1}{2}.\frac{10.9}{2}.\frac{8.7.6}{1.2.3} + 2\left(\frac{10.9}{2}.\frac{8.7}{2} + \frac{10.9}{2}.\frac{8.7.6}{1.2.3}\right) + \frac{10.9}{2}.\frac{8.7}{2}\right]$$
$$\left.+ 9.\frac{11.10}{2}.2.\frac{9.8.7}{1.2.3}\right) = \mathbf{2328480},$$

$$\lambda = H\left(\frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2} + 2.11\,[3.2.\frac{10.9}{2} + \frac{10.9}{2}] + 4.\frac{11.10}{2}.3.2\right) + I.3.2\frac{11.10}{2}$$

$$+ K.3.2.2.11 + (K-H)\frac{11.10}{2} + (K-I)\,2.11 = \mathbf{9185}\,H + \mathbf{308}\,I + \mathbf{209}\,K,$$

$$\nu = \mathbf{16}\,L,$$

$$\vartheta = \frac{11.10.9..4}{1.2.3..8}.2^8.2^5.4 + \frac{11.10}{2}.\frac{9.8..3}{1.2..7}.2^7.2^4.4 + \frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7..2}{1..6}.2^6.2^3.2$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5..1}{1..5}.2^5.2^2.1 = \mathbf{29610240}.$$

Man finder da, at

i Systemet $(13-t)\,PtL$ er for $t < 6$, $\mu = 6^t$, $\mu' = 6^{t+1}$,

og dernæst:

System.	α	$\frac{\xi}{2}$	η	ζ	$\varkappa$	λ	ν	ϑ	μ
$7P6L$	1256352	84	0	0	0	0	0	0	46656
$6P7L$	7453872	2268	144	0	0	0	0	0	279600
$5P8L$	43393596	34930	3944	150	0	0	0	8192	1668096
$4P9L$	242612208	358344	48420	2700	8064	$54H$	0	221184	9840040
$3P10L$	1268876232	2666160	354600	19170	211680	$1125H + 27I + 9K$	0	3271680	56481396
$2P11L$	5919651072	14610288	1684320	59400	2328480	$9185H + 308I + 209K$	$16L$	29610240	308389896
$P12L$	23328812592	57943116	5123448	0	15218250	$34320H + 1221I + 1584K$	$264L + 4M$	181098720	1530345504
$13L$	74651593680	154143990	8975538	0	67297230	0	$2067L + 78M$	807144624	6533946576
									23011191144

$$H = \mathbf{1552},\quad I = \mathbf{3280},\quad K = \mathbf{9400},$$
$$L = \mathbf{451440},\quad M = 6L = \mathbf{2708640}.$$

71. Andre elementære Systemer af fjerde Orden. — Paa Vejen til Bestemmelsen af Karakteristikerne i de elementære Systemer af almindelige Kurver af fjerde Orden have vi fundet Bestemmelsen af Karakteristikerne i flere af de andre elementære Systemer af fjerde Orden. Hvad de øvrige angaar, saa giver — som det er bemærket i 62 — det allerede fundne en større Rigdom af Midler til Bestemmelsen af deres Karakteristiker, end der ved de allerede undersøgte Systemer har staaet til vor Raadighed, og derved en større Lethed i Bestemmelsen. Vi skulle anføre et Par Exempler herpaa:

1) Pillen (2 d) i Tavlen 63 indeholder ligefrem Karakteristikerne μ og μ' i de Systemer af Kurver af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt og med Røring mellem to Grene, som forøvrigt kun ere underkastede elementære Betingelser.

2) 54 indeholder foruden de to Formler, som vi have benyttet i 68 og 69, et Udtryk for Tallet β. Dette giver os for Systemerne $(10-t)\, PtL$ af Kurver med et fast Dobbeltpunkt, $(11-t)\, PtL$ af Kurver med et Dobbeltpunkt paa en given ret Linie og for Systemerne $(12-t)\, PtL$ af Kurver med Dobbeltpunkt de i efterfølgende tre Rækker opførte Værdier af β:

$t =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fast Dbp.	2	12	72	432	2544	14470	77713	380151	1648568	5834264	15875508		
Dbp. p. r. L.	20	116	672	3888	22128	122160	644074	3157153	14037510	54048596	171350840	433455702	
frit Dbp.	72	392	2120	11376	60480	317280	1632240	8156626	38719660	170010756	654184448	2089211768	537004672[illegible]

Den første Række Tal er Antallene af de Kurver af fjerde Orden, der have en Spids i et givet Punkt og forresten ere underkastede elementære Betingelser; de ere da Tallene $[c]$ i de elementære Systemer $n = 4$, $d = 0$, $e = 1$. Et Tal i anden Række er sammensat af Antallet af saadanne Kurver, der have en Spids paa en given ret Linie og forresten ere underkastede Systemets Betingelser, og saadanne, som have en Spids i den rette Linies Skjæringspunkt med en af de t givne Tangenter. Disse sidstes Antal have vi nu allerede fundet, hvorved man kan finde de førstes eller Tallene c i de elementære Systemer $n = 4$, $d = 0$, $e = 1$. Paa lignende Maade vil et Tal i sidste Række være sammensat af Antallet af Kurver med en Spids, som blot ere underkastede elementære Betingelser, og saadanne Tal, som vi nu have fundet, multiplicerede med t og $\frac{t\,(t-1)}{2}$, og vi finde saaledes selve Karakteristikerne i de elementære Systemer $n = 4$, $d = 0$, $e = 1$. Vi finde da, idet vi kalde et vilkaarligt blandt disse Systemer $(11-t)\, PtL$, og aflæse Karakteristiken μ' tilhøjre for μ:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$[c]$	2	12	72	432	2544	14470	77713	380151	1648568	5834264	15875508		
c	20	114	648	3672	20400	109440	557254	2613162	10996302	39211484	113008200	258825114	
μ	72	372	1890	9396	45360	210960	937440	3951978	15638400	57358602	187884048	525237048	1216361826

3) Systemerne $n = 4$, $d = 1$, $e = 2$. — Karakteristikerne beregnes ved Hjælp af 37 ([1]) uden Anvendelse af de her i fjerde Afsnit opnaaede Resultater. Man finder de

([1]) Se efterstaaende Rettelse.

Resultater, som indeholdes i efterstaaende Tavle, hvor det ses, at de Tal, som høre til et System, maa aflæses i to forskjellige Rækker:

System.	β	$[\beta]'$	γ_1	$[\gamma_1]$	$(2e)$	μ	b	c	$[b]$	$[c]$	(de)	$(d2e)$	
$8P$	1200		2256	492	861	2052	1008	1860	144	240	1395	147	$8L$
$7PL$	2400	600	4692	1056	1722	4716	2484	4656	360	624	2970	618	$P7L$
$6P2L$	4152	984	8232	1908	3012	9360	5256	10104	774	1416	5220	1884	$2P6L$
$5P3L$	5916	1386	11796	2778	4326	15336	9162	17880	1386	2616	7470	4134	$3P5L$
$4P4L$	6684	1554	13368	3162	4908	20052	12690	24960	1980	3792	8460	6684	$4P4L$
$3P5L$	5880	1344	11796	2772	4326	20052	13248	26160	2124	4080	7470	7662	$5P3L$
$2P6L$	4080	900	8232	1896	3012	15336	10404	20616	1710	3264	5220	6348	$6P2L$
$P7L$	2292	474	4692	1038	1722	9360	6426	12864	1089	2046	2970	4074	$7PL$
$8L$	1056	201	2256		861	4716	3177	6650			1395	2109	$8P$
	β'	$[\beta']$	γ_1	$[\gamma_1]'$	$(2e)$	μ'	b'	c'	$[b']'$	$[c']'$	$(d'e')$	$(d'2e')$	System.

Pillerne (de) og $(2\,de)$ indeholde her Karakteristikerne i de elementære Systemer med et Dobbeltpunkt og et Tilbagegangspunkt af anden Art, og i dem med et (uegentligt) tredobbelt Punkt med tre sammenfaldne Grene.

De fundne Resultater tjene endvidere til Bestemmelse af Tallene β i de i 38 omtalte elementære Systemer. Værdierne af β i Tavlen i 63 give endvidere Relationer mellem de Tal μ' og c, som høre til et saadant System, hvorved ogsaa disse Systemers Karakteristiker bestemmes o. s. v.

Rettelser og Tilføjelser.

S. 322 (38) L. 11: en ret Linie, læs Diameteren.

S. 343 (59): I 37 angives, at man for at finde μ, μ', b og b' maa søge β, β' og γ. Da imidlertid $\gamma = \beta + \beta'$, er det nødvendigt tillige at søge (2e).

S. 372 (88): I 55 betegner $[\chi]$ Antallet af de Kurver χ, paa hvilke den Gren, der gaar gjennem begge Dobbeltpunkter, tillige gaar gjennem et af Systemets givne Punkter.

S. 380 (96) L. 11: $9A$. $\lambda = 0$., læs $9A$, $\nu = 0$.

Fig. 1

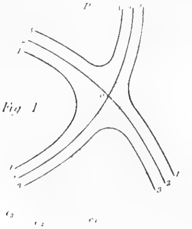


Fig. 2.

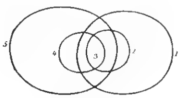


Fig. 3.

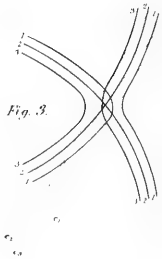


Fig. 4

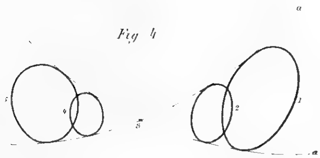


Fig. 5

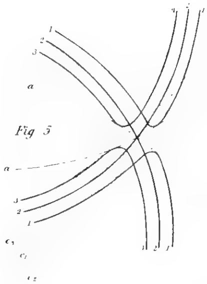


Fig. 6.

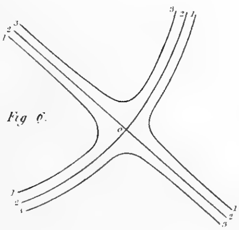


Fig. 7

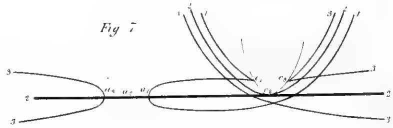
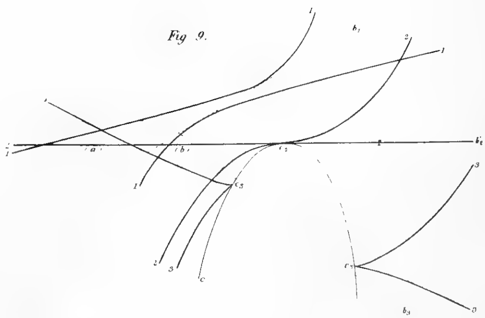


Fig. 8

Fig. 9.



C. Friis Jespersen del.

Fig. 10.

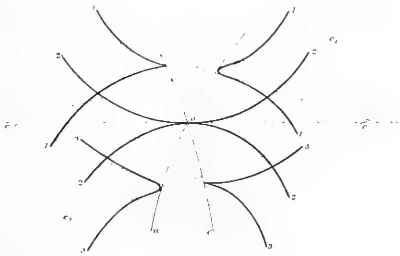


Fig. 11.

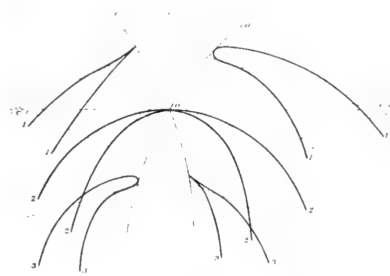


Fig. 12.

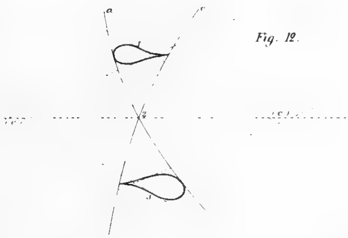


Fig. 13.

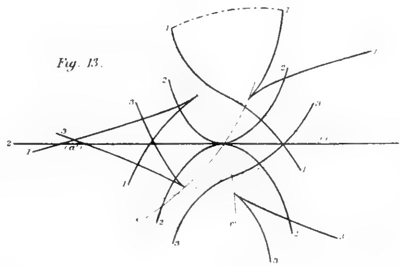


Fig. 14.

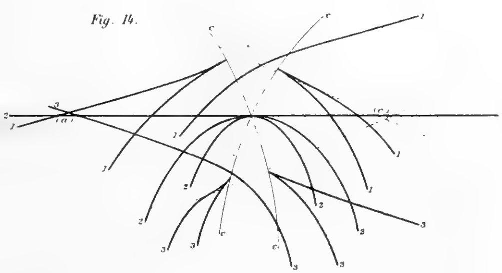


Fig. 15.

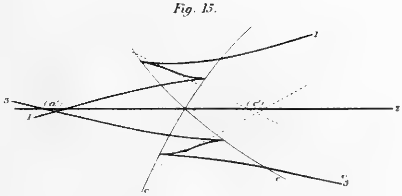


Fig. 16.

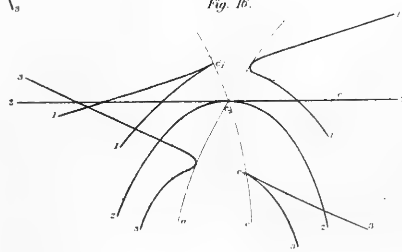


Fig. 17

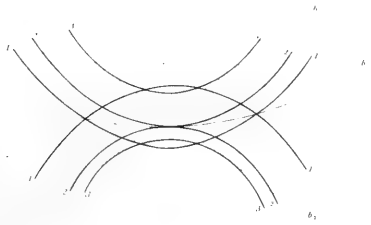


Fig. 18

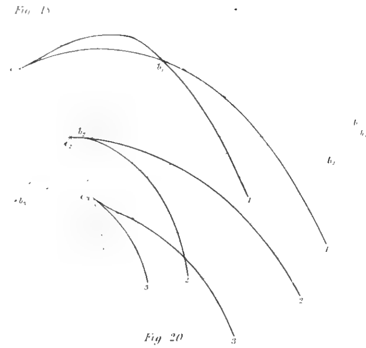


Fig. 19

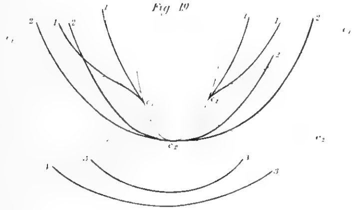


Fig. 20

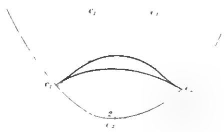


Fig. 21.

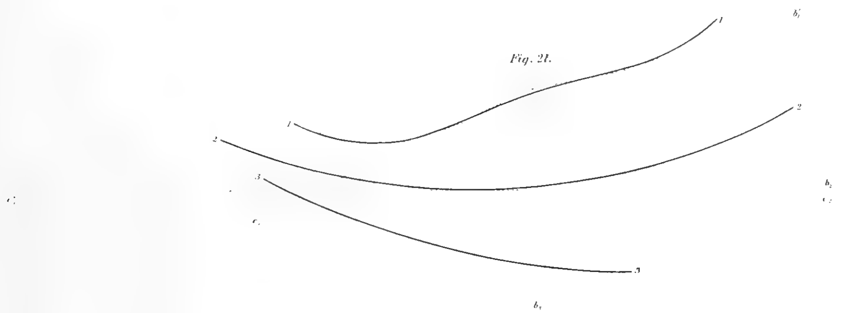


Fig. 22

Fig. 23

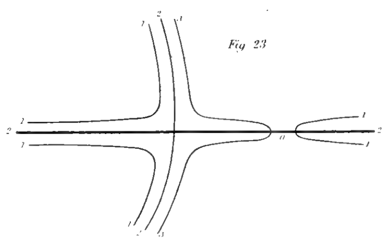


Fig. 24.

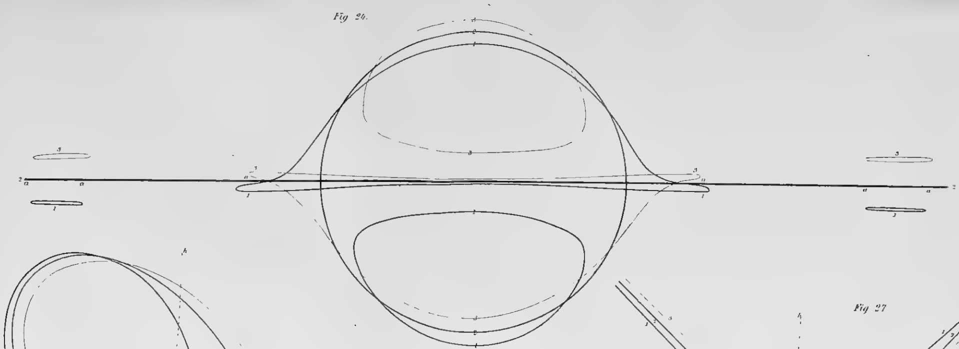


Fig. 26.

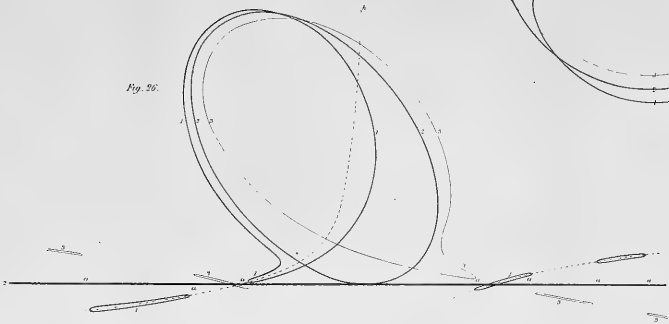


Fig. 27.

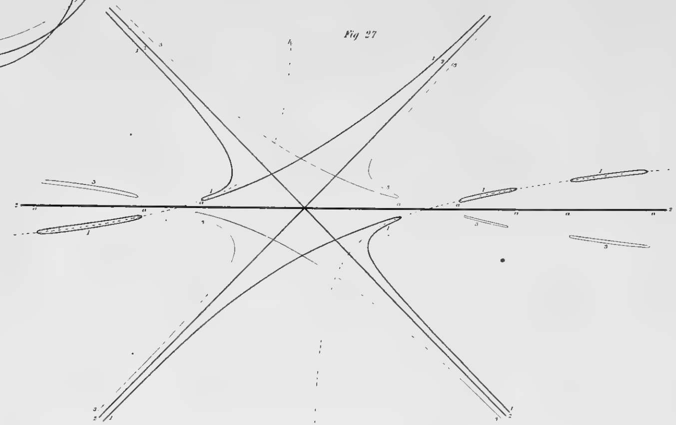
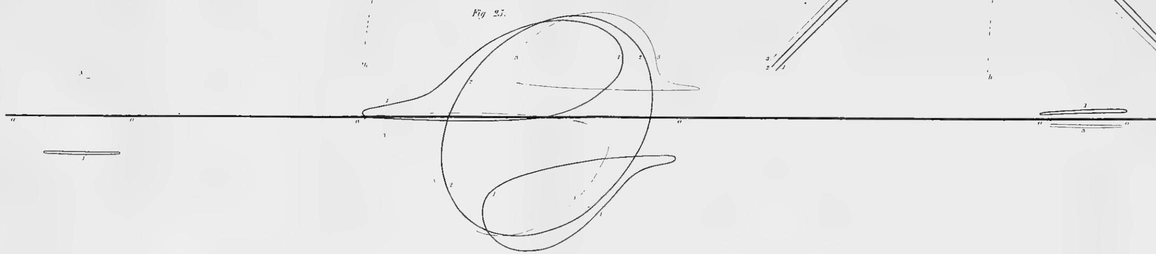


Fig. 25.



Th. Bergh's lith. Inst.

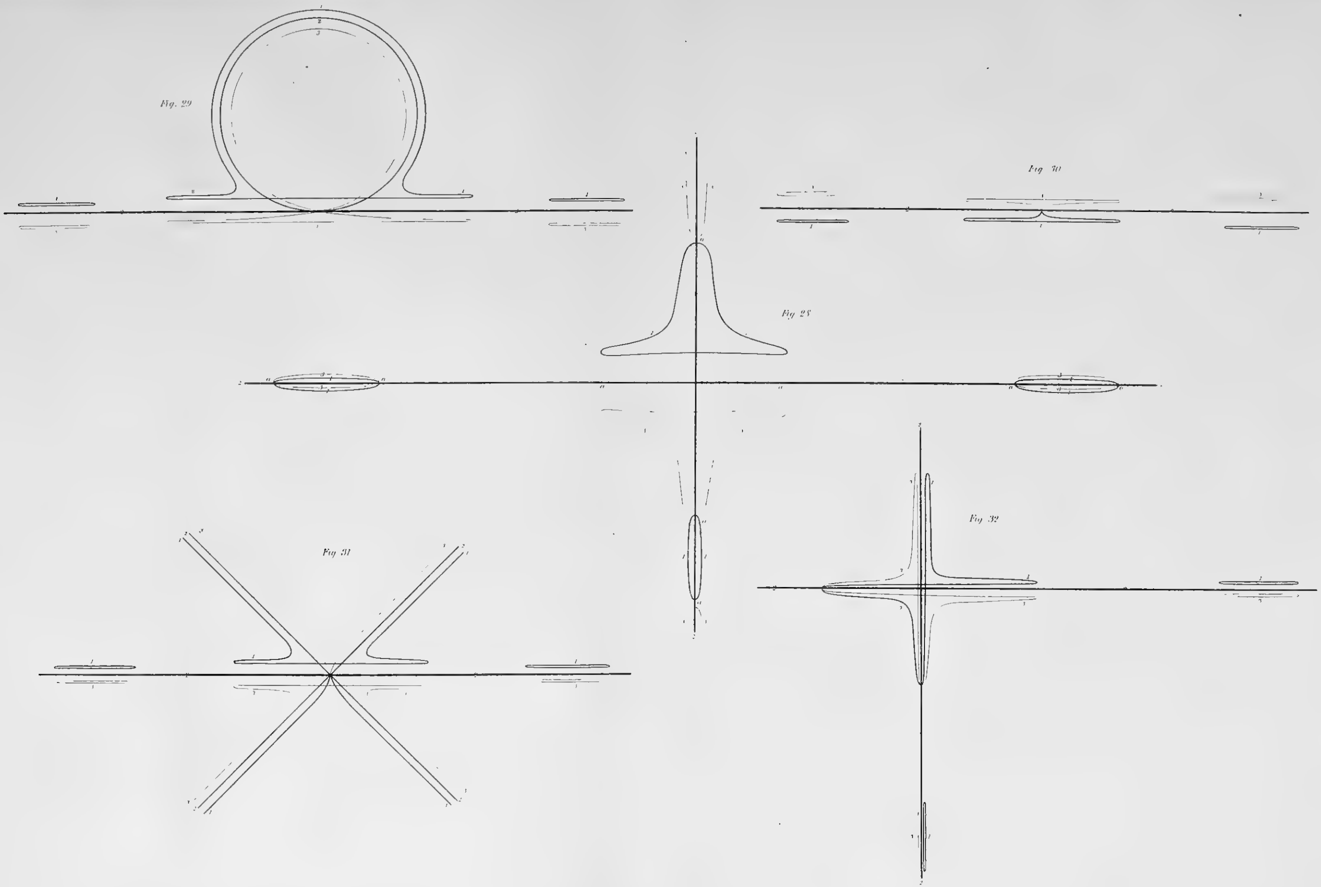


Fig. 29
Fig. 30
Fig. 28
Fig. 31
Fig. 32

Résumé du Mémoire

intitulé:

Recherche des propriétés générales des sytèmes de courbes planes,

suivie d'une application à la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires du quatrième ordre.

Par M. **H. G. Zeuthen.**

Notations.

Nous donnons ici la liste des notations dont nous avons fait usage dans les deux premières parties de ce mémoire. Les nombres adjoints indiquent les n°s où elles ont été introduites et ceux où l'on trouve une description plus étendue de leur signification. Nous désignons par

n l'ordre d'une courbe du système (1);
d le nombre de ses points doubles (1);
e le nombre de ses points cuspidaux (1);
μ le nombre des courbes qui passent par un point donné (3);
b l'ordre du lieu des points doubles (3);
c l'ordre du lieu des points cuspidaux (3);
p la classe de l'enveloppe des tangentes aux points doubles (3);
q la classe de l'enveloppe des tangentes aux points cuspidaux (3);
u la classe de l'enveloppe des tangentes menées des points doubles (3);
v la classe de l'enveloppe des tangentes menées des points cuspidaux (3);
x la classe de l'enveloppe des droites joignant deux points doubles (3);
y la classe de l'enveloppe des droites joignant un point double à un point cuspidal (3);
z la classe de l'enveloppe des droites joignant deux points cuspidaux (3);
$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ le nombre des courbes douées d'un nouveau point double (7 et 9);
α_0 étant celui des courbes où aucune des branches qui forment le point double n'est une droite (10—12);
α_1 celui des courbes où une de ces deux branches est une droite (13);
α_2 celui des courbes où toutes les deux branches sont des droites (13);

β le nombre des courbes où un point double est dégénéré en un point cuspidal (7 et 15);

$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ le nombre des courbes où un point cuspidal est dégénéré en un point de contact de deux branches (7),

γ_0 étant celui des courbes où aucune de ces branches n'est une droite (16),

γ_1 celui des courbes où l'une des branches est une droite (17);

$(2d)$ le nombre des courbes où deux points doubles coïncident (7, 18 et 19);

(de) le nombre des courbes où un point double coïncide avec un point cuspidal (7, 18 et 20);

$(2e)$ le nombre des courbes où deux points cuspidaux coïncident (7, 18 et 21);

$(3d)$ le nombre des courbes où trois points doubles coïncident (en un point triple; 7 et 22);

$(2de)$ le nombre des courbes où deux points doubles et un point cuspidal coïncident (7 et 22);

$(d2e)$ le nombre des courbes où un point double et deux points cuspidaux coïncident (7, 22 et 23).

En ajoutant des accents aux notations qui précèdent, nous aurons les notations des nombres réciproques qu'on obtient par le principe de dualité. n' est la classe d'une courbe du système, μ' le nombre des courbes tangentes à une droite etc. Les courbes γ_1' $(2d')$, $(d'e')$, $(2e')$ ne sont pas différentes des courbes γ_1, $(2d)$, (de), $(2e)$ (voir 17 et 18).

Les courbes α, β, γ, etc. sont les courbes dont les nombres ont ces notations, et les courbes (b), (c), (b') ... sont les courbes dont nous désignons l'ordre ou la classe par b, c, b' ...

Nous désignons par $[b]$ et $[c]$ les nombres des courbes qui ont un point double ou cuspidal en un point par lequel les courbes du système doivent passer, et par $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, $[\beta']$, $[\gamma_1]$ les nombres des courbes α_1, α_2, β', γ_1 dont une branche droite passe par un tel point. En ajoutant ou en enlevant des accents, on aura les notations des nombres réciproques (35 et suivants).

Nous désignons dans les figures par b et c des points doubles ou cuspidaux, ou les courbes lieux de ces points; par b' et c' des tangentes doubles ou d'inflexion, et par (b') et (c') des points de contact avec les enveloppes de ces tangentes singulières; par a et (a') l'enveloppe des courbes du système ou des points de cette enveloppe.

Cette liste sera complétée au commencement du résumé de la troisième partie.

Première partie.

Description des courbes singulières ordinaires sans branches multiples.

1. (¹) Systèmes de courbes. — Relations de Plücker et définition d'un système.

2. Représentation analytique d'un système de courbes. — On peut représenter un système par une équation du degré n en coordonnées-point (ou par une équation du degré n' en coordonnées tangentielles) dont les coefficients sont des fonctions algébriques (racines d'équations algébriques) d'un paramètre k. Celui-ci peut toujours être choisi de manière qu'à une courbe du système, qui n'en fait pas partie plusieurs fois, ne corresponde qu'une seule valeur de k; mais à chaque valeur de k correspondront en général plusieurs courbes.

Il sera commode, pour la discussion des courbes voisines d'une courbe donnée du système, de choisir k de manière que cette courbe corresponde à $k=0$, et de développer le premier membre de l'équation en série suivant les puissances croissantes de k. On peut toujours obtenir par le choix de k que tous les exposants soient entiers. L'équation devient

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi^{(1)} k + \varphi^{(2)} k^2 + \ldots \varphi^{(r-1)} k^{r-1} + \psi k^r = 0, \qquad \text{(I)}$$

où $\varphi^{(0)} \ldots \varphi^{(r-1)}$ sont des fonctions des coordonnées, ψ une fonction des coordonnées et de k qui ne devient pas infinie pour $k=0$.

Ayant assujetti k aux différentes conditions que nous avons indiquées, nous pourrons, pour la lim. $k=0$, mesurer par rapport à k les ordres des infiniment petits, en appelant infiniment petit de l'ordre α une quantité qui devient proportionnelle à k^α. On voit alors que la distance de la courbe $\varphi^{(0)}$ à la courbe voisine φ, déterminée par la lim. $k=0$, est en général un infiniment petit du premier ordre, et, seulement dans les points de contact avec l'enveloppe du système, un infiniment petit du deuxième ordre.

3. Caractéristiques. — Voir la table des notations. La première caractéristique du système μ, sera le degré en k de l'équation qu'on obtient en rendant l'équation du système en coordonnées-point rationnelle par rapport à k. Si c'est l'équation tangentielle qu'on rend rationnelle, le degré en k sera la seconde caractéristique μ'.

4. Courbes singulières ordinaires; division en deux espèces principales. — Les courbes singulières d'un système sont celles qui ont d'autres points ou tangentes singuliers qu'une courbe quelconque du système. Nous appelons ordinaires les courbes singulières qu'on trouve dans les systèmes élémentaires, c'est-à-dire dans les systèmes dont les conditions données ne sont que des points et des tangentes donnés. Ces

(¹) Les nᵒs sont les mêmes que ceux du texte danois.

singularités seront aussi les seules d'un système de courbes tangentes à des courbes données indépendantes entre elles.

A côté d'une première espèce de courbes singulières qui ont seulement un nouveau point singulier ou une nouvelle tangente singulière, les systèmes élémentaires peuvent aussi contenir des courbes douées de branches multiples. Nous nous occuperons de celles-ci dans la troisième partie du mémoire; *dans les deux premières parties, nous n'attribuerons pas aux systèmes d'autres courbes à branches multiples que les courbes* α et α' (voir la table des notations et 10—14), qui ont seulement des branches multiples lorsqu'on les regarde respectivement comme des enveloppes de droites ou des lieux de points, mais non pas dans les cas inverses.

5. *Branches droites et sommets.* — En appliquant le principe de dualité à une courbe composée dont une branche est une droite, on trouve une courbe composée à laquelle toutes les droites menées par un point sont tangentes. Ce point s'appelle un sommet. Une courbe d'un système, si on la regarde comme lieu de points, peut être composée de branches courbes et de droites, tandis que, considérée comme enveloppe, elle est composée des *mêmes* branches courbes et de sommets. La partie courbe qu'on a dans les deux cas s'appelle la *courbe résidue*. Les formules de Plücker ne sont alors applicables qu'à la courbe résidue.

6. *Lemmes sur des courbes douées de branches droites et de sommets.* — Si l'on suppose que le système ne contient qu'un nombre fini de courbes douées de branches droites ou de sommets — sans quoi on ne pourrait appliquer les formules de Plücker aux courbes complètes du système — on aura le lemme suivant: «Un système ne contient pas des courbes où $n-1$ des d points doubles sont des points d'intersection d'une branche droite simple et d'une courbe résidue», ainsi que le lemme qui y correspond suivant le principe de dualité.

7. *Énumération des courbes singulières ordinaires.* — Voir la table des notations. Nous supposons que les courbes à $\left\{\begin{matrix}\text{gauche}\\ \text{droite}\end{matrix}\right\}$ dans le texte danois n'ont pas d'autres $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{tangentes}\end{matrix}\right\}$ singuliers nouveaux ou transformés, ni d'autres $\left\{\begin{matrix}\text{branches droites}\\ \text{sommets}\end{matrix}\right\}$ que ceux qui leur sont attribués dans les définitions.

8. *Nombres Plückeriens des courbes résidues* $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. — Les définitions des courbes donnent immédiatement, pour les courbes résidues α, β, γ, les nombres n, d et e, et pour les courbes résidues α', β', γ', les nombres n', d' et e'. Les équations de Plücker serviront donc à déterminer les autres nombres Plückeriens (voir la table dans le texte danois).

On s'assure que les courbes dont il s'agit sont des courbes singulières ordinaires — si seulement les nombres d' et e' ou d et e ne sont pas trop petits — en comptant les conditions auxquelles on peut assujettir les courbes α, β et γ, regardées comme lieux de points, et les courbes α', β', γ' regardées comme enveloppes. La table indique quelles seront les valeurs minimum des nombres d', e', d, e qui permettent au système de contenir une des courbes singulières; car aucun des nombres de la table ne peut être négatif et

les courbes résidues γ_0 ont au moins deux tangentes doubles (qui coïncident), et les courbes résidues γ_0', deux points doubles.

9. Les courbes α regardées comme enveloppes, et les courbes α' regardées comme lieux de points. — La table du n° 8 montre qu'une courbe complète α regardée comme enveloppe, est composée de la courbe résidue et d'un sommet double, qui se trouve au nouveau point double. Avec chacune des droites menées du nouveau point double et tangentes à la courbe résidue en un autre point, coïncident deux tangentes doubles de la courbe complète, et avec chaque tangente à une branche courbe du point double, trois tangentes d'inflexion.

Le principe de dualité donne les propriétés correspondantes des courbes complètes α'.

10. Etude des courbes α_0. — Pour l'étude des courbes voisines d'une courbe α_0 il est commode d'écrire l'équation du système de la manière suivante [1] (voir le n° 2)

$$xy + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots + k\psi = 0, \tag{II}$$

où φ_r est une fonction homogène du degré r de x et y. Nous commençons par attribuer à ψ, qui contient aussi k, un terme a indépendant de x, y et k.

On trouve alors, en désignant par O le nouveau point double de α_0, que la distance de O aux points et aux tangentes des deux branches d'une courbe voisine de α_0 qui s'en approchent, devient, en général, proportionnelle à $k^{\frac{1}{2}}$; la distance de O aux deux tangentes doubles qui tendent à coïncider avec une tangente menée de O à la courbe résidue, devient aussi proportionnelle à $k^{\frac{1}{2}}$. On voit ainsi que les points de contact de ces tangentes doubles avec l'enveloppe (b') se trouveront à leurs points de contact avec la courbe résidue. La courbe (p') sera tangente à la courbe résidue aux mêmes points.

Les distances de O cessent d'être proportionnelles à $k^{\frac{1}{2}}$ pour les points des deux branches déterminés par les lim. $\dfrac{y}{x} = 0$ ou $\dfrac{x}{y} = 0$, et pour les tangentes en ces points. On trouve que le point de contact d'une des trois tangentes d'inflexion qui ont pour position limite un des axes, $y = 0$, est à une distance de cet axe prop. à $k^{\frac{2}{3}}$ et à une distance de $x = 0$ prop. à $k^{\frac{1}{3}}$, et que la tangente d'inflexion fait avec sa position limite un angle prop. à $k^{\frac{1}{3}}$ (voir les formules (V) du texte danois). Les courbes (c') et (q') passent deux fois par le point O et sont tangentes à α_0.

Dans la figure 1 les courbes 1 et 3 sont des courbes voisines, antérieure et postérieure, de la courbe 2 qui est une courbe α_0. Le dessin, ainsi que la détermination analytique que nous venons de donner, montre qu'une seule des trois tangentes d'inflexion qui ont pour position limite une des deux tangentes au point singulier de α_0 est réelle.

11. Suite de l'étude des courbes α_0. — Nous supposerons ici que ψ ne contient plus aucun terme indépendant de x, y et k. Alors les distances du point O aux deux branches qui s'en approchent deviennent proportionnelles à k. L'enveloppe des courbes du système passera par le point O — ce qui n'avait pas lieu dans le cas discuté au

[1] x et y sont imaginaires si le nouveau point double est un point isolé.

n° 10 — et y aura même un point double, dont les tangentes sont déterminées par l'équation (VII). Le point O sera deux fois point cuspidal de la courbe (q') et deux fois point d'inflexion de la courbe (c'), les tangentes étant dans les deux cas les droites $x = 0$, $y = 0$. — Une tangente menée de O à la courbe résidue devient ici tangente double de la courbe (b').

Les figures 2—5 montrent les différents cas qui se présentent.

Quoique la transition se fasse ici d'une autre manière que dans le n° 10, on n'a pas besoin d'une nouvelle notation pour désigner le nombre des courbes singulières qu'on rencontre ici. Il faut seulement, dans les formules que nous exposerons dans la deuxième partie de ce mémoire, compter chacune de ces courbes pour deux dans le nombre α_0.

12. Courbes α_0 dans les systèmes élémentaires. — Si les conditions d'un système sont des contacts avec des courbes données (¹), indépendantes entre elles, une courbe ayant un nouveau point double qui ne se trouve sur aucune des courbes données, pourra être représentée de la manière indiquée au n° 10 et comptera pour un dans le nombre α_0. Mais une courbe qui, au lieu d'un contact avec une ou deux des courbes données, a un nouveau point double sur la courbe donnée ou en un point d'intersection des deux courbes, doit être représentée de la manière indiquée en 11, parce que l'enveloppe du système passe par le nouveau point double. Dans le dernier cas, où toutes les deux branches de l'enveloppe du système qui passent par le point sont connues, on trouve que la courbe singulière fait deux fois partie du système. Suivant la règle indiquée à la fin du n° 11, on doit donc compter les deux espèces de courbes dont il s'agit ici respectivement pour deux et pour quatre, dans le nombre α_0.

Les systèmes élémentaires sont des cas particuliers des systèmes dont nous avons parlé ici.

13. Courbes α_1 et α_2. — La plupart des résultats trouvés pour les courbes α_0 s'appliquent aussi aux courbes α_1 et α_2. Seulement les branches droites de ces courbes ne sont pas des positions limites de tangentes d'inflexion. — La branche droite d'une courbe α_1, ou une des branches droites d'une courbe α_2, rencontre la courbe consécutive dans les $n-2$ de ses points d'intersection avec la courbe résidue qui ne sont que des positions particulières de points doubles du système, et en deux autres points, qui sont des points de contact avec l'enveloppe du système. Dans le cas où l'enveloppe passe par le nouveau point double O (ce qu'elle fera alors deux fois, voir 11), un des points d'intersection de la courbe singulière avec la courbe consécutive coïncide avec O. Alors deux cas peuvent se présenter: la branche droite n'a qu'un seul contact avec l'enveloppe, ou elle est une branche de l'enveloppe. On rencontre ces deux cas dans les systèmes élémentaires.

Dans la figure 6 la courbe 2 est une courbe α_1.

14. Courbes α'. — En appliquant le principe de dualité aux résultats trouvés dans les n°s 10—13, on trouve les propriétés des courbes α'.

(¹) En parlant des conditions du système, nous n'y comprenons pas les nombres Plückeriens que nous supposons qu'on a attribués à ses courbes avant d'introduire d'autres conditions.

Dans la figure 7 la courbe 2 est une courbe α_1'. La figure montre clairement que le sommet a_2 est un point double de l'enveloppe du système.

15. Courbes β et β'. — Regardée comme enveloppe de tangentes, une courbe β est composée de la courbe résidue et d'un sommet simple, qui se trouve au nouveau point cuspidal (voir la table du nº 8). — Les $n'-4$ droites, passant par ce point, qui sont tangentes en d'autres points à la courbe résidue, sont des tangentes doubles de la courbe complète β, et deux des tangentes d'inflexion de celle-ci coïncident avec la tangente au point cuspidal.

Pour représenter les courbes voisines d'une courbe β, il est commode de se servir de coordonnées mobiles, dont l'origine est le point double qui tend à être cuspidal, et dont les axes restent parallèles à des directions fixes, $y = 0$ à celle de la tangente au nouveau point cuspidal de la courbe β. L'équation devient alors

$$y^2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots + k(\psi_2 + \psi_3 + \ldots) = 0. \tag{IX}$$

Si l'on veut substituer à ce système de coordonnées mobiles un système fixe, on doit remplacer x et y par $x + a_1 k + a_2 k^2 + \ldots$ et $y + b_1 k + b_2 k^2 + \ldots$, où les coefficients constants a et b sont en général finis (comp. nº 2).

On trouve que la distance du point singulier O de la courbe β à une courbe voisine devient pour la lim. $k = 0$ proportionnelle à k, et qu'une seule branche de l'enveloppe du système passe par ce point. Les tangentes au point double de cette courbe voisine qui tend à devenir cuspidal, ainsi que les tangentes d'inflexion qui tendent à coïncider, font entre elles et avec leurs positions limites des angles prop. à $k^{\frac{1}{2}}$. La droite $y = 0$ sera donc une tangente simple des courbes (p) et (c') au point O. Les deux points d'inflexion seront à des distances de O prop. à k, mais la distance de l'un à l'autre sera prop. à $k^{\frac{3}{2}}$. Le point O sera donc un point cuspidal de la courbe (q').

Le principe de dualité donne les propriétés des courbes voisines d'une courbe β'.

Les figures 8 et 9 montrent le passage par une courbe β ou β'.

16. Courbes γ_0 et γ_0'. — Regardée comme enveloppe de tangentes, une courbe γ_0 est composée de la courbe résidue et d'un sommet qui se trouve au nouveau point singulier. Les $n'-5$ tangentes menées de ce point à la courbe résidue sont des tangentes doubles de la courbe complète; mais la courbe résidue, en même temps qu'elle a perdu ces tangentes doubles, en a obtenu deux nouvelles qui coïncident avec la tangente au point de contact de deux branches. Avec la même tangente coïncident quatre tangentes d'inflexion de la courbe complète (voir le nº 8).

Nous faisons usage d'un système de coordonnées mobiles, en prenant pour origine le point cuspidal qui tend à être point de contact de deux branches, et pour axe $y = 0$ la tangente en ce point cuspidal; l'autre axe reste parallèle à une direction fixe. La distance du point singulier O de la courbe γ_0 à une courbe voisine devient en général prop. à k, et l'enveloppe du système passe par O. Aussi les quatre tangentes d'inflexion qui ont la tangente en O pour position limite, font-elles des angles prop. à k avec cette droite fixe et l'un avec l'autre, et de même les distances de leurs points de contact (entre eux et de O) sont prop. à k. La tangente de la courbe γ_0 en son point singulier O est donc une tangente quadruple de la courbe (c'), et le point O est un point quadruple de la courbe (q').

Le principe de dualité donne les propriétés des courbes voisines d'une courbe γ_0'.

Les figures 10, 11 et 12 montrent les trois différents modes de passage par une courbe γ_0. Dans tous les trois cas deux des quatre tangentes d'inflexion qui tendent à coïncider sont réelles, deux imaginaires. A ces figures correspondent respectivement les figures 13, 14, 15 qui montrent le passage par une courbe γ_0'.

17. Courbes γ_1. — Le nouveau point singulier d'une courbe γ est en même temps un des e points cuspidaux et un sommet, et la tangente singulière d'une courbe γ' est en même temps une des e' tangentes d'inflexion et une branche droite. Or la table du n° 8 montre qu'une seule tangente d'inflexion d'une courbe γ_1 coïncide avec sa branche droite. On voit donc que les courbes γ_1 et γ_1' ne sont pas différentes entre elles.

La représentation analytique d'une courbe γ_1 se fait de la même manière que celle des courbes γ_0 ou γ_0', et les ordres des différentes distances ou angles infiniment petits sont les mêmes.

La fig. 16 montre le passage par une courbe γ_1. Cette figure est elle-même une figure de transition de 10 à 11 ou de 13 à 14.

18. Courbes $(2d)$, (de) et $(2e)$. — Une courbe $(2d)$ a, au point où deux points doubles coïncident, un contact de deux branches. Selon le lemme du n° 6 aucune de ces branches n'est droite. Par conséquent deux tangentes doubles coïncident avec la tangente de contact. La courbe $(2d)$ sera donc aussi une courbe $(2d')$, et réciproquement.

Le nouveau point singulier d'une courbe (de) est un point de rebroussement de seconde espèce dont la tangente est à la fois tangente double et tangente d'inflexion. Aussi les courbes (de) et les courbes $(d'e')$ sont les mêmes.

Si deux points cuspidaux coïncident sans que d'autres points singuliers s'y joignent, il en résulte un contact triponctuel (osculation) de deux branches. Si une de ces branches était droite on aurait une courbe β'; mais dans le n° 7 nous avons expressément exclu ce cas. Les formules de Plücker permettent de substituer à deux points cuspidaux trois points doubles si, en même temps, on substitue à deux tangentes d'inflexion trois tangentes doubles. On verra ainsi que les courbes $(2e)$ sont en même temps des courbes $(2e')$, et réciproquement.

19. Représentation analytique des courbes $(2d)$. — Nous faisons usage de coordonnées mobiles: l'axe $y=0$ est la droite joignant les deux points doubles qui tendent à coïncider, l'axe $x=0$ est une droite fixe passant par le nouveau point singulier de la courbe $(2d)$. Soit en faisant usage de ces coordonnées (voir le texte danois), soit en observant que les distances des deux branches d'une courbe voisine de $(2d)$ qui tendent à se toucher, sont, pour la lim. $k=0$, proportionnelles à k, on trouve que les deux points doubles qui tendent à coincider et les tangentes en ces points, ainsi que les deux tangentes doubles qui tendent à coincider et leurs points de contact, s'éloignent, en général, de distances ou d'angles proportionnels à $k^{\frac{1}{2}}$ de leurs positions limites. On voit donc qu'une branche des courbes (b) et (b') et deux branches des courbes (p) et (p') sont tangentes à la courbe $(2d)$ en son nouveau point singulier. — Les conditions du système peuvent amener le cas moins général où ces distances et ces angles ne sont que proportionnels à k. Alors la courbe singulière compte pour deux dans le nombre $(2d)$ [voir le n° 66 et comparer au n° 11].

La fig. 17 montre le passage par une courbe $(2d)$.

20. Représentation analytique des courbes (de). — Si l'on commence par faire usage des mêmes coordonnées que dans le n° 19, il sera commode de remplacer $y + \frac{a}{2}x^2$ par la seule notation y, ou bien d'introduire un système mobile de coordonnées curvilignes. On peut, pour le définir, le rapporter à un système fixe où $x = 0$ est une droite arbitraire passant par le nouveau point singulier de la courbe (de), et où $y = 0$ est une parabole dont les diamètres sont parallèles à $x = 0$, et qui est osculatrice à (de) au dit point singulier. Dans le système mobile, $x = 0$ reste fixe; mais $y = 0$ est la parabole représentée, dans le système fixe, par une équation linéaire, et passant par les deux points singuliers qui tendent à coïncider. Soit dans le système fixe, soit dans le système mobile, les coordonnées d'un point sont — à des facteurs constants près — sa distance de la droite $x = 0$, et sa distance de la parabole $y = 0$ mesurée sur un diamètre.

On trouve au moyen de ces coordonnées que les distances des points singuliers d'une courbe voisine d'une courbe (de) à leurs positions limites sont prop. à k. Les tangentes au point double font aussi avec leur position limite des angles prop. à k, mais l'une avec l'autre un angle prop. à $k^{\frac{3}{2}}$, et la tangente au point cuspidal fait avec sa position limite un angle prop. à k. Le principe de dualité donne les propriétés analogues des tangentes singulières qui tendent à coïncider. — Le nouveau point singulier de la courbe (de) est un point simple des courbes (b), (c) et (q'), et un point cuspidal de (p'); la nouvelle tangente singulière de (de) est tangente simple de (b'), (c') et (q), et tangente d'inflexion de (p).

La fig. 18 montre le passage par une courbe (de).

21. Représentation analytique d'une courbe $(2e)$. — On trouve, en faisant usage des mêmes coordonnées mobiles et curvilignes que dans le n° 20, que, sur une courbe voisine de $(2e)$, les deux points cuspidaux et leurs tangentes, ainsi que les deux tangentes d'inflexion et leurs points de contact, s'éloignent de quantités proportionnelles à $k^{\frac{1}{2}}$ de leurs positions limites. Les courbes (c), (c'), (q) et (q') sont tangentes à la courbe $(2e)$ en son point singulier.

Les fig. 19 et 20 montrent deux formes de courbes $(2e)$ et le passage par ces courbes.

22. Courbes $(3d)$, $(2de)$, $(d2e)$, $(3d')$, $(2d'e')$, $(d'2e')$. — Une courbe $(3d')$ est une courbe du système dont une tangente double présente un troisième contact, et devient ainsi une tangente triple. — Une courbe $(2d'e')$ est une courbe où l'un des contacts d'une tangente double devient triponctuel. Une courbe $(d'2e')$ est une courbe où les deux points de contact d'une tangente double coïncident. On voit ainsi que ces courbes singulières sont ordinaires; suivant le principe de dualité, les courbes $(3d)$, $2de)$, $d2e)$ le seront aussi.

On déduit sans difficulté des propriétés connues des points doubles et cuspidaux celles des courbes voisines d'une courbe $(3d)$ ou $(2de)$. Le nouveau point singulier d'une courbe $(3d)$ est un point triple de la courbe (b), et celui d'une courbe $(2de)$ est un point cuspidal de la courbe (b) et un point simple de la courbe (c).

Pour les courbes $(3d')$ et $(2d'e')$ nous renvoyons au principe de dualité.

23. Représentation analytique des courbes $(d2e)$ et $(d'2e')$. — Pour représenter les courbes voisines d'une courbe $(d'2e')$, nous avons fait usage d'un système de coordonnées mobiles: l'axe $y=0$ est la tangente double dont les points de contact tendent à coïncider, et l'axe $x=0$ est une droite fixe menée par le point de la courbe $(d'2e')$ où cette coïncidence a lieu. — On trouve qu'en général la tangente double et les deux tangentes d'inflexion qui tendent à coïncider, s'éloignent (pour la lim. $k=0$) de quantités prop. à k de leur position limite, mais qu'elles font entre elles des angles prop. à $k^{\frac{3}{2}}$; que les points de contact de ces tangentes sont à des distances prop. à $k^{\frac{1}{2}}$ de leur position limite; que la tangente menée d'un point de la tangente double (ou de l'une des tangentes d'inflexion) et qui tend à coïncider avec cette tangente singulière, fait avec elle un angle proportionnel à k^2.

Les courbes (p') et (q') sont tangentes à la courbe $(d'2e')$ en son point de contact avec la nouvelle tangente singulière, et cette tangente est en un autre de ses points à la fois tangente simple de la courbe (b'), et tangente d'inflexion de la courbe (c'). (Voir la fig. 21).

On trouve au moyen du principe de dualité les propriétés des courbes voisines d'une courbe $(d2e)$ (voir la fig. 22).

Deuxième partie.

Relations entre les caractéristiques et les nombres des courbes singulières ordinaires.

24. Exposé des résultats principaux. — Dans les équations exposées dans cette partie, nous n'avons pas égard à d'autres courbes pourvues de branches multiples que les courbes α et α'. Elles sont donc immédiatement applicables aux nombreux systèmes où il n'y en a pas d'autres, et, en ajoutant des termes supplémentaires, on peut aussi les appliquer à des systèmes qui renferment d'autres courbes à branches multiples (et même à des systèmes où il y a des courbes singulières extraordinaires). Pour peu qu'on connaisse les propriétés de ces courbes singulières et de leurs courbes voisines, on peut trouver les termes supplémentaires d'une formule par les mêmes procédés que la formule elle-même (voir 40 et troisième partie du mémoire).

Les 24 équations énumérées dans le texte danois ne font que 23 équations indépendantes entre elles. Il est donc possible de trouver les 40 nombres μ, μ' etc., lorsqu'on en connaît 17 (ainsi que les nombres Plückeriens, qui font partie de la définition du système).

25. Principe de correspondance. — Les formules du nº 24 sont trouvées au moyen du principe de correspondance:

Lorsqu'on a une droite (L) et deux séries de points X et Y tels, qu'à un point X correspondent η points Y, et, à un point Y, ξ points X, et que cette correspondance peut s'exprimer algébriquement, le nombre des

points (XY) où un point X coïncide avec un des points correspondants Y est $\xi+\eta$. — Les points d'une droite peuvent, dans cet énoncé, être remplacés par les droites d'un faisceau.

26. Solutions coïncidentes. — Il est connu que l'application du principe de correspondance présente une seule difficulté: celle de déterminer le nombre de points (XY) qui coïncident en un point où X coïncide avec un ou plusieurs des points correspondants Y. Pour résoudre cette difficulté, je fais usage de la règle suivante:

Si le point X et un des points correspondants Y coïncident à la fois avec un point fixe D, et si, en même temps que la distance DX devient infiniment petite, la distance XY devient proportionnelle à $(DX)^{\zeta}$, ce point Y amène la coïncidence de ζ des $\xi+\eta$ points (XY) avec D. En faisant passer le point mobile X par le point fixe D, et en considérant ainsi séparément tous les points correspondants Y qui passent en D en même temps que X, on trouve tous les points (XY) qui coïncident avec D.

Ayant trouvé, dans la première partie de ce mémoire, les ordres des distances et des angles infiniment petits qui séparent les points et les tangentes des courbes singulières de ceux de leurs courbes voisines, nous pouvons faire usage de cette règle pour déterminer directement les coefficients des formules obtenues par le principe de correspondance. C'est de cette démonstration que j'ai fait usage dans mon mémoire; mais dans ma première déduction des formules, j'ai déterminé indirectement beaucoup de ces coefficients, en cherchant une même formule par différentes voies (voir 31), ou en me servant de différentes formules pour trouver un même résultat numérique. La recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires permet beaucoup de ces dernières vérifications. Les coefficients trouvés par ces voies indirectes pourraient servir comme démonstration des propriétés des courbes dont on fait usage dans la déduction directe.

27. Déduction des formules (3) et (3'). — On trouve la formule (3) en prenant pour points X et Y deux des points où une même courbe du système rencontre une droite fixe. — Le principe de dualité donne la formule (3').

28. Déduction des formules (4)—(8) et (4')—(8'). — On trouve la formule (4) en prenant pour X la droite joignant un point fixe à un point double d'une courbe du système, et pour Y une des tangentes de la même courbe qui passent par le même point fixe. Les démonstrations de (5)—(8) sont analogues, et le principe de dualité donne (4')—(8').

29. Lemmes pour la déduction des équations (9)—(14) et (9')—(14'). — Le lieu des points de contact des courbes du système avec les tangentes menées d'un point fixe, est de l'ordre $\mu+\mu'$.

Le lieu des $n-2$ points d'intersection d'une courbe du système avec une tangente menée d'un point fixe, est de l'ordre $(n'-2)\mu+(n-2)\mu'$.

Le lieu des $(n-2)$ points où une droite joignant un point fixe à un point double d'une courbe du système rencontre encore la courbe, est de l'ordre $d\mu+(n-2)b$.

Le lieu des $n-2$ points où la droite joignant un point fixe à un point cuspidal d'une courbe du système rencontre encore la courbe, est de l'ordre $e\mu + (n-2)c$.

On trouve ces ordres en comptant les points d'intersection des lieux avec une droite menée par le point fixe. En appliquant le principe de dualité aux deux premiers lemmes, on ne trouve que de nouveaux exposés des mêmes lemmes.

30. Déduction des équations (9)—(14) et (9′)—(14′). — Le premier membre de l'équation (9) indique le nombre des tangentes menées d'un point fixe aux courbes du système dont un point d'intersection coïncide avec le point de contact. On trouve ce nombre au moyen du principe de correspondance en prenant pour X et Y les droites joignant un autre point fixe au point de contact et à un des points d'intersection d'une des tangentes. — La déduction de (10)—(14) est analogue à celle de (9).

31. Déduction directe d'équations qui peuvent remplacer quelques unes des équations du nº 24. — On trouve l'équation (15) en cherchant le nombre des points doubles des courbes du système dont les deux tangentes rencontrent une droite fixe en un même point. — Le nombre appelé s dans le texte danois est l'ordre du lieu des points où les tangentes à une courbe du système, en ses points d'intersection avec une droite fixe, rencontrent encore la même courbe. En déterminant s, et au moyen du principe de correspondance, et en comptant les points d'intersection du dit lieu avec la droite fixe donnée, on trouve l'équation (16).

32. Équations transformées. — Démonstration que les 24 équations du nº 24 et les 4 équations du nº 31 ne font qu'un système de 23 équations indépendantes entre elles.

33. Courbes d'un système qui satisfont à une condition donnée. — Le principe de correspondance sert à déterminer le nombre des courbes d'un système qui satisfont à une condition donnée. Si cette condition est indépendante de celles qui déterminent le système, on trouve ce nombre en fonction linéaire et homogène des nombres μ, μ', etc. ou, suivant les équations du nº 24, de 17 d'entre ces 40 nombres. Les nombres trouvés peuvent indiquer les ordres ou les classes de courbes fixes qui ont des rapports avec le système.

Nous rappellerons ici les nombreux résultats trouvés par M. Chasles pour les systèmes de coniques. Dans ces systèmes μ, μ', α_2 et α_2' sont les seuls des 40 nombres qui ne soient pas nuls; les équations (3) et (3′) donnent $\alpha_2' = 2\mu - \mu'$, $\alpha_2 = 2\mu' - \mu$; les nombres cherchés ne dépendront donc que de μ et μ'.

Nous rappellerons encore ce théorème de M. Chasles qu'il y a dans un système d'ordre quelconque $n_1'\mu + n_1\mu'$ courbes tangentes à une courbe donnée de l'ordre n_1 et de la classe n_1' [1]. Les autres nombres dans le texte danois sont les suivants:

---

[1] Ma démonstration de ce théorème dans les «Mathematische Annalen» 3me vol. p. 153, montre qu'il est applicable aux cas où la courbe fixe ou les courbes du système ont des points singuliers, bien que je n'y fasse pas expressément la dernière de ces suppositions.

l'ordre du lieu des points où une tangente en un point double d'une courbe du système rencontre encore la courbe (22);

l'ordre du lieu des points où la tangente en un point cuspidal d'une courbe du système rencontre encore la courbe (23);

l'ordre du lieu des points où la droite joignant deux points doubles d'une courbe du système rencontre encore la courbe (24);

l'ordre du lieu des points où la droite joignant un point double d'une courbe du système à un de ses points cuspidaux rencontre encore la courbe (25);

l'ordre du lieu des points où la droite joignant deux points cuspidaux d'une courbe du système rencontre encore la courbe (26).

Les deux premiers de ces nombres deviennent nuls pour $n = 3$, les trois derniers pour $n = 4$. Les équations qu'on trouve ainsi, peuvent se déduire de celles du n° 24, si l'on observe que, dans ces cas, aussi plusieurs des 40 nombres deviennent nuls à cause de leur signification. Mais il en existe une autre application: dans les mêmes systèmes où l'on trouve ainsi des équations, on peut déterminer les nombres $[b]$ et $[c]$ des courbes dont un point double ou cuspidal est situé en un point donné P, par lequel les courbes du système doivent passer. En effet, pour ces systèmes, les nombres p, q, x, y, z seront composés des nombres des courbes ayant des branches droites passant par P et des nombres $[b]$ et $[c]$, tous ces termes étant multipliés par certains coefficients, et ces différents coefficients seront les mêmes qui, dans les expressions (22)—(26), appartiennent aux termes correspondants (voir 35—39).

34. Application aux systèmes où $d = e = 0$. — Tant que le nombre des points donnés est $> \frac{n^2 - n + 2}{2}$, ces systèmes ne contiendront pas d'autres courbes à branches multiples que les courbes α. On peut donc y appliquer les formules du n° 24 jusqu'à cette limite.

35. Systèmes $n = 3$, $d = 0$, $e = 1$. — Les systèmes de courbes du 3^{me} ordre (cubiques) ayant un point singulier, et les systèmes de courbes du 4^{me} ordre (quartiques) présentant trois points singuliers, ne contiennent pas ordinairement d'autres courbes à branches multiples que des courbes α ou α'. On en profite dans les n^{os} 35—39.

36. Systèmes $n = 3$, $d = 1$, $e = 0$.

37. Systèmes $n = 4$, $d = 1$, $e = 2$.

38. Systèmes $n = 4$, $d = 2$, $e = 1$.

39. Systèmes $n = 4$, $d = 3$, $e = 0$. — Tant qu'un des systèmes dont nous parlons dans les n^{o}s 35, 36, 37, 38, 39 ne contient que des courbes singulières ordinaires, on peut exprimer le nombre des courbes du système qui satisfont à une condition nouvelle par 2, 2, 4, 5, 3 nombres caractéristiques (μ, μ', b ...; voir le n° 33).

40. Projections d'une série de sections planes d'une surface algébrique. — Les projections des sections d'une surface algébrique faites par les plans d'un faisceau forment un système où il se trouve une droite n-tuple. Les quantités dont les points et les tangentes d'une courbe voisine de cette courbe singulière s'éloignent de ses

propres points et tangentes sont proportionnelles à k, si k est l'angle infiniment petit des plans du faisceau qui correspondent à ces deux courbes. On a donc ici un exemple d'un cas où il est facile de déterminer les termes supplémentaires des formules du nº 24, dus à une courbe multiple du système (voir le nº 24). On trouve ainsi la plupart des formules de Salmon et Cayley exprimant les relations entre les nombres des singularités d'une surface. Les notations indiquées en parenthèses sont celles par lesquelles j'ai désigné ces nombres dans un mémoire publié dans les «*Mathematische Annalen*» vol. 4 p. 1.

Troisième partie.

Courbes à branches multiples, notamment celles qu'on trouve dans les systèmes de courbes du troisième et du quatrième ordre.

Notations.

Dans les formules numériques de la troisième et de la quatrième partie, j'emploie, à côté des notations indiquées au commencement de la première partie, les suivantes, qui ont toutes rapport à des systèmes de quartiques, λ et ξ s'appliquant en même temps à des systèmes de cubiques.

ξ est le nombre des courbes douées d'une branche droite double de la deuxième espèce (42);

η celui des courbes douées d'une branche droite double de la troisième espèce (44);

ζ celui des courbes douées d'une branche droite double de la quatrième espèce (45);

$\varkappa$ celui des courbes composées de deux branches doubles de la première et de la deuxième espèce (46);

λ celui des courbes douées d'une branche droite triple (47);

ν celui des droites quadruples (47);

ϑ celui des coniques doubles (48);

ψ celui des courbes composées d'une conique et d'une droite double qui y est tangente, et ayant un point double au point de contact (52);

χ celui des courbes composées de deux droites doubles de la deuxième espèce, et ayant un point double au point d'intersection (53).

Dans les figures, nous désignons par a un sommet simple.

Dans les formules analytiques qui représentent des courbes douées d'une droite multiple, nous prenons celle-ci pour axe $y = 0$, et désignons par A, B, C ... des fonctions de x et y, par a, b, c .. les fonctions de x qui en résultent pour $y = 0$, par ψ une fonction de x, y et k qui ne devient pas infinie pour $k = 0$. Les nombres ajoutés (A_4, b_3 ..) indiquent les degrés des expressions non homogènes A, B .. et a, b, ... (Dans le nº 43 d'autres notations s'y joignent).

41. Courbes douées d'une branche droite double de la première espèce. — La courbe correspondant à $k=0$ dans le système représenté par

$$A_{n-2}\,y^2 + B_n\,k + \psi k^2 = 0 \tag{I}$$

aura, en général, la droite $y=0$ pour branche double, les $n-2$ points d'intersection de celle-ci avec la courbe résidue $A_{n-2}=0$ pour sommets triples, et les n points déterminés par $b_n = 0$ pour sommets simples. Les distances de la branche double aux branches de la courbe voisine qui tendent à coïncider, seront proportionnelles à $k^{\frac{1}{2}}$. Seulement celles des sommets triples seront prop. à $k^{\frac{1}{3}}$ (voir la fig. 23).

Ces courbes ne sont pas des courbes singulières ordinaires d'un système de courbes sans points singuliers dont l'ordre est > 2. Les courbes α' (qui demandent un certain nombre de points singuliers, voir 8) en sont des cas particuliers.

42. Courbes douées d'une branche droite double de la deuxième espèce. — Si dans l'équation (I) y est facteur de B_n, on aura une équation de la forme

$$A_{n-2}\,y^2 + 2B_{n-1}\,yk + C_n\,k^2 + \psi\,k^3 = 0. \tag{II}$$

La courbe $k=0$ aura alors des sommets doubles aux points d'intersection de la droite double $y=0$ avec la courbe résidue $A_{n-2}=0$, et $2(n-1)$ sommets simples déterminés par

$$b_{n-1}^2 - a_{n-2}\,c_n = 0. \tag{IV}$$

La distance de la branche double aux branches de la courbe voisine qui tendent à coïncider, devient prop. à k. Seulement les distances d'un sommet double aux deux branches qui tendent à le former — mais non pas à une troisième branche qui tend à y passer — seront prop. à $k^{\frac{1}{2}}$, ces branches ayant les mêmes propriétés que celles d'une courbe voisine d'une courbe α_1 ou α_2.

Ces courbes sont des courbes singulières ordinaires d'un système de courbes sans points singuliers.

Les fig. 24 et 25 représentent, pour un système de quartiques, deux différentes manières dont une courbe variable du système peut passer par une de ces formes limites. On trouverait de même 2^{n-3} formes de passage si les courbes étaient de l'ordre n.

43. Différentes représentations des courbes douées d'une branche double de la première et de la deuxième espèce. — La discussion du nº 42 n'est plus applicable au cas où l'équation (IV) est identique. Une des manières (et si $n=2$ ou $=3$, la seule) dont cela peut arriver est si $b_{n-1}=a_{n-2}\,b_1$; $c_n=a_{n-2}\,b_1{}^2$. La discussion de l'équation qu'on obtient alors (VII) est analogue à celle du nº 41, à moins que l'équation qui détermine les sommets simples ne soit identique. Alors la discussion (de l'équation (IX)) devient analogue à celle du nº 42, à moins que $b_{n-1}{}^2 - a_{n-2}\,c_n$ ne soit identiquement $=0$. Si cette identité a lieu de la même manière que dans le cas précédent, on revient à une discussion analogue à celle du nº 41, et ainsi de suite. On rencontre ainsi les deux formes d'équations suivantes:

$$A^{(r)}_{n-2}\,y^{(r)2} + 2B^{(r)}_{n-1}\,y^{(r)}k^{r+1} + C^{(r)}_{n}k^{2r+1} = 0, \tag{XII}$$

$$A^{(r)}_{n-2}\,y^{(r)2} + 2B^{(r)}_{n-1}\,y^{(r)}k^{r+1} + C^{(r)}_{n}k^{2r+2} = 0, \tag{XIII}$$

où

$$y^{(r)} = y + b_1\,k + b'_1\,k^2 + \dots b_1{}^{(r-1)}\,k^r = 0, \tag{XIV}$$

et où $A^{(r)}$, $B^{(r)}$, $C^{(r)}$ sont des fonctions de x, $y^{(r)}$ et k qui ne sont pas divisibles par k; b_1, b_1'... sont des fonctions de x. La courbe $k=0$, dans le système (XII), a les mêmes branches et sommets que la courbe singulière du système du n° 41, et la courbe $k=0$, dans le système (XIII), les mêmes que la courbe singulière discutée dans le n° 42. Seulement les ordres des distances infiniment petites aux courbes voisines sont altérées. Nous disons que les équations (XII) et (XIII) sont de nouvelles représentations des courbes douées d'une branche droite double, respectivement de la première et de la deuxième espèce. Dans des cas particuliers, l'équation (XIII), ainsi que l'équation (II), peut aussi représenter des courbes de la première espèce.

Quant à l'usage de ces différentes représentations, nous nous bornerons aux exemples suivants:

Une courbe de la première espèce sera, en général, représentée par une équation renfermée dans la forme (II), si la droite double est tangente à l'enveloppe du système (passe par un point donné du système), et par l'équation (VII) [équation (XII) où $r=1$], si l'enveloppe passe par un sommet triple [voir les équations (XV) et (XVI)]. Une courbe de la deuxième espèce sera représentée par l'équation (IX) [équation (XIII) où $r=1$], si l'enveloppe passe par un sommet double [comparer aux n°s 11—13].

Il faut compter une courbe représentée par l'équation (XIII) $r+1$ fois dans le nombre ξ.

44. Quartiques douées d'une branche droite double de la troisième espèce. — Si $n=4$, l'équation (IV) peut devenir identique d'une seule manière différente de celle que nous avons supposée dans le n° 43; c'est pour $a_2=a_1{}^2$, $b_3=a_1 b_2$, $c_4=b_2{}^2$. Alors l'équation du système devient:

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + C_1 y^3 + C_2 y^2 k + C_3 y k^2 + C_4 k^3 + \psi . k^4 = 0. \qquad \text{(XVIII)}$$

La courbe $k=0$ sera composée d'une conique et d'une droite double qui y est tangente. Le point de contact sera un sommet triple, et la droite double aura 7 sommets simples déterminés par l'équation

$$b_2{}^3 c_1 - a_1 b_2{}^2 c_2 + a_1{}^2 b_2 c_3 - a_1{}^3 c_4 = 0. \qquad \text{(XIX)}$$

Les branches d'une courbe voisine qui tendent à coïncider seront à des distances prop. à k de leur position limite, mais à des distances prop. à $k^{\frac{3}{2}}$ de l'hyperbole $a_1 y + b_2 k = 0$; les branches qui tendent à former le sommet triple seront à des distances de celui-ci prop. à $k^{\frac{1}{3}}$. — Les tangentes doubles qui coïncident avec la droite double auront pour points de contact les sommets simples, et, des 24 points d'inflexion, trois coïncident dans chacun des sommets simples et dans le sommet triple (voir la fig. 26).

Les courbes dont il s'agit sont des courbes singulières ordinaires d'un système de quartiques générales.

45. Quartiques douées d'une branche droite double de la quatrième espèce. — Si l'équation (XIX) devient identique, l'équation du système devient

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + 2(c_0 y^2 + c_1 y k + c_2 k^2)(a_1 y + b_2 k) + d_0 y^4 + D_1 y^3 k + D_2 y^2 k^2 + D_3 y k^3 + D_4 k^4 + \psi k^5 = 0. \qquad \text{(XX)}$$

La courbe $k=0$ sera composée de deux droites simples et d'une droite double, qui passe par leur point d'intersection. Ce point sera un sommet quadruple, et la droite double possède encore 8 sommets simples déterminés par

$$(b_2{}^2c_0-a_1b_2c_1+a_1{}^2c_2)^2-(b_2{}^4d_0-a_1b_2{}^3d_1+a_1{}^2b_2{}^2d_2-a_1{}^3b_2d_3+a_1{}^4d_4)=0. \text{(XXI)}$$

Les branches d'une courbe voisine qui tendent à coïncider seront à des distances prop. à k de leur position limite, mais à des distances prop. à k^2 de l'hyperbole $a_1y+b_2k=0$. Le sommet quadruple est composé de deux sommets doubles semblables à ceux des courbes α_2, et ses distances à la courbe voisine sont proportionnelles à $k^{\frac{1}{2}}$. Les points de contact des tangentes doubles et des tangentes d'inflexion se trouvent aux sommets simples (voir la fig. 27).

Les courbes dont il s'agit ici sont des courbes singulières ordinaires d'un système de quartiques générales. — Les courbes qu'on trouve dans le cas où l'équation (XXI) devient identique ne sont pas des courbes singulières ordinaires d'un système de quartiques générales. L'équation (XIII) peut conduire à de nouvelles représentations des courbes singulières dont nous avons parlé ici et dans le n° précédent.

46. Quartiques composées de deux droites doubles. — Les seules courbes composées de deux droites doubles qu'on rencontre ordinairement dans un système de quartiques générales, sont celles dont la représentation la plus simple s'obtient en remplaçant, dans l'équation (II) (du n° 42), A_2 par un carré (x^2). On trouve alors l'équation (XXII). La droite double $y=0$ est de la seconde espèce et douée de 6 sommets, et la droite double $x=0$, de la première espèce et douée de 3 sommets. Le point d'intersection est un sommet triple de la même forme que ceux dont il a été parlé dans le n° 41, avec la seule différence qu'il y passe une branche qui ne contribue pas à sa formation. (Voir la fig. 28).

47. Courbes de l'ordre n avec une branche droite r-tuple. — Dans le système représenté par l'équation (XXIII), la courbe $k=0$ a la droite $y=0$ pour branche r-tuple. Ses points d'intersection avec la courbe résidue sont des sommets doubles, et elle a encore $(r-1)(2n-r)$ sommets simples. $n=r=3$ donne des courbes singulières ordinaires d'un système de cubiques, et $n=4$, $r=3$ ou $r=4$, des courbes singulières ordinaires d'un système de quartiques. Dans ces deux derniers cas, un des sommets ne sera pas déterminé immédiatement par les conditions données, mais sa position dépendra de celle des autres sommets, ce qui est une conséquence du fait que 11 des tangentes menées d'un point à une quartique en déterminent la 12ème.

48. Coniques doubles. — On trouve ordinairement, dans un système de quartiques générales, des coniques doubles douées de 8 sommets. Représentée par l'équation (XXIV), une de ces courbes est à une distance proportionnelle à $k^{\frac{1}{2}}$ des deux branches d'une courbe voisine qui tendent à coïncider.

49. Règles pour compter les courbes douées de branches multiples. — Dans un système de courbes tangentes à une courbe donnée C, une courbe singulière dont une branche r-tuple a ce contact devra être comp-

tée, parmi les courbes singulières de même espèce du système, pour un nombre r fois plus grand qu'elle ne le serait si c'était une branche simple qui fût tangente à C. La courbe C peut être, en particulier, une droite ou un point (par lequel les courbes du système passent), et les branches de la courbe singulière peuvent être des droites ou des sommets (qui se trouvent sur C).

En effet, si, pour la représentation la plus simple, les distances des branches d'une courbe voisine qui tendent à coïncider avec la branche r-tuple sont irrationnelles, il faut, au cas où cette branche est tangente à C, remplacer cette représentation par une autre, dans laquelle la courbe singulière doit être comptée pour r, et, si les distances sont rationnelles, la courbe singulière est la limite de r différentes séries de courbes du système. (Comparer aux n^os 11, 12 et 43).

On trouve au moyen de cette règle, à des facteurs constants près, les nombres ξ, η..ϑ des courbes singulières d'un système de cubiques ou de quartiques qui sont tangentes à des courbes données, ou au moins (courbes λ et ν) les valeurs des termes dont ces nombres sont composés. On trouve expérimentalement les valeurs de ces facteurs au moyen des vérifications qui se présentent dans la recherche des caractéristiques élémentaires. Pour les systèmes de cubiques, les facteurs constants des nombres ξ et λ sont 1 et 40. Pour les systèmes de quartiques, le facteur de η, ζ, $\varkappa$, ϑ (et de ψ et χ dont nous parlerons dans ce qui suit) est 1, et celui de ξ est 2 tant que le passage par une courbe ξ se fait de deux manières différentes (voir la description des figures dans le n° 42), mais, dans le cas contraire, seulement 1 (voir les n^os 55, 56, 57, 62, 64 et 65). Les valeurs des coefficients des différents termes de λ et ν sont indiquées aux endroits de la 4^me partie où nous les trouvons.

50. Formules pour les systèmes $n=3$, $d=e=0$. — Nous pouvons à présent déterminer les coefficients des termes supplémentaires qui rendent les formules trouvées dans la deuxième partie, applicables aux cas où les systèmes de cubiques ou de quartiques sont doués de courbes à branches multiples appartenant aux courbes singulières ordinaires. Nous attribuons ici aux formules les mêmes n^os qu'à celles dont elles sont formées (voir le texte danois).

51. Formules pour les systèmes $n=4$, $d=e=0$. — Nous avons écrit les coefficients de manière à faire voir comment ils sont formés d'après la règle du n° 26. Ces coefficients indiquent donc les ordres des différentes quantités infiniment petites, savoir: 1° ceux que nous avons trouvés dans ce qui précède; 2° ceux que nous avons encore trouvés directement de la même manière, et 3° ceux que nous trouvons indirectement en faisant usage des vérifications que permet le nombre superflu d'équations. Tous les coefficients des formules (3), (3'), (9) et (12) appartiennent à la première catégorie. Le mémoire donne donc une démonstration directe de ces formules, qui servent à la détermination des caractéristiques élémentaires.

52. Nouvelle espèce de courbes douées d'une branche droite double dans les systèmes $n=4$, $d=1$, $e=0$. — Dans les systèmes de quartiques douées d'un

point double, on trouve, à côté des cas particuliers de celles dont nous avons parlé, les formes plus modifiées dont il est question dans les nᵒˢ 52 et 53.

Les sommets doubles d'une quartique douée d'une branche droite double de la deuxième espèce (voir le nº 42), peuvent coïncider et former un point double et un sommet double. On aura ainsi une courbe composée d'une conique et d'une droite double qui y est tangente; le point de contact est à la fois un point double et un sommet double, et la droite double est douée de 6 sommets simples. La représentation la plus simple de cette courbe se fait par une équation renfermée dans la forme (IX) (voir le nº 43); les distances de la droite double aux branches d'une courbe voisine qui tendent à coïncider sont prop. à k, mais la distance entre ces branches est prop. à k^2; la distance du sommet double aux branches qui tendent à le former, et l'angle des tangentes au point double de la courbe voisine, sont prop. à $k^{\frac{1}{2}}$.

Voir la fig. 29. — Si la courbe résidue se réduit à deux droites imaginaires ou réelles, on aura une courbe singulière ordinaire d'un système de quartiques douées d'un point cuspidal; voir les figures 30 et 31.

53. Nouvelle espèce de courbes douées de deux branches droites doubles dans les systèmes $n=4$, $d=1$, $e=0$. — On trouve encore ordinairement dans ces systèmes, des courbes composées de deux droites doubles dont le point d'intersection est à la fois un point double et un sommet double; chacune des deux droites doubles a encore 4 sommets. La distance à une courbe voisine est, pour la représentation la plus simple (XXV), prop. à k. Seulement celle du sommet double, qui est semblable à ceux des courbes α_2, aux branches qui tendent à le former, est prop. à $k^{\frac{1}{2}}$. Voir la fig. 32.

54. Formules pour les systèmes $n=4$, $d=1$, $e=0$. — Les courbes à branches multiples qu'on trouve ordinairement sont les courbes α, ψ et χ, des courbes ξ, dont la courbe résidue est composée de deux droites, et des courbes λ et ν, où le point double est formé par la coïncidence de deux sommets.

Dans les systèmes où le point double doit se trouver en un point donné ou sur une droite donnée, on trouve encore des courbes ξ, η, ζ, $\varkappa$, et ϑ dont les points doubles sont formés par la coïncidence de deux sommets. ξ_1 est le nombre des courbes ξ ordinaires; ξ_2, celui des courbes ξ extraordinaires; $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ désignent respectivement les nombres des courbes $\varkappa$ dont le point double se trouve sur la droite double de la première ou de la deuxième espèce. Nous mettons ici et dans le nº 55 en parenthèse carrée les termes dus aux courbes singulières extraordinaires.

55. Systèmes $n=4$, $d=2$, $e=0$. — ξ_0 est le nombre des courbes ξ où deux sommets simples, en coïncidant avec un sommet double, forment deux points doubles. $[\lambda]$, $[\nu]$, $[\psi]$, $[\chi]$ sont les nombres des courbes λ, ν, ψ, χ dont la droite multiple qui joint les deux points doubles passe par un des points donnés du système.

56. Systèmes de quartiques dont deux branches se touchent. — Dans les courbes ξ de ces systèmes, trois sommets simples coïncidant avec un sommet double forment le point de contact de deux branches et un sommet simple. τ est le nombre des courbes où le point de contact est devenu point triple; b_1 l'ordre du lieu du point singulier, et x la classe de l'enveloppe de la tangente en ce point.

57. Systèmes de quartiques douées d'un point triple. — Dans les courbes ξ le point singulier est formé par la coïncidence de 4 sommets simples avec un sommet double.

58. Exemples de courbes réciproques à ξ et λ. — Extension des formules du n° 35 au cas où il y a aussi certaines courbes singulières extraordinaires.

Quatrième partie.

Détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires de quartiques.

59. Systèmes $n=3$, $d=0$, $e=1$. — Nous désignons par $[P]$ le nombre des courbes qui ont une tangente donnée en un des points donnés du système, et par $[L]$ le nombre de celles qui ont un point de contact donné avec une des tangentes données.

60. Systèmes $n=3$, $d=1$, $e=0$.

61. Systèmes $n=3$, $d=e=0$.

62. Systèmes de quartiques douées d'un point triple. — Le problème principal de la recherche des caractéristiques élémentaires de quartiques, c'est la détermination de celles des quartiques générales. Pour atteindre à ce but (n° 70), nous devons d'abord (dans les n°s 62—69) nous occuper de beaucoup d'autres systèmes de quartiques. Cette suite de recherches fournira tant de moyens de déterminer aussi les caractéristiques des systèmes de quartiques qui resteront encore, qu'on ne rencontrera pas là de nouvelles difficultés sérieuses, ce que nous montrerons par quelques exemples dans le n° 71.

Pour le système actuel on fait usage des formules du n° 57. On peut déterminer α_1, ξ, $[\xi]$ (1). Dans le premier système $[b_1]=1$, et dans les autres on connaîtra d'avance μ.

63. Systèmes $n=4$, $d=3$, $e=0$. — Voir 39. On aura des vérifications en égalant le μ' d'un système au μ du suivant.

(1) Nous mettons — dans les exemples de déterminations de nombres de courbes singulières — avant les signes { } les facteurs qui correspondent aux différents choix des tangentes qui déterminent les sommets simples, et avant les signes [ ] ceux qui correspondent aux autres sommets. Où il est nécessaire, nous ajoutons aux nombres des points ou des accents, pour indiquer qu'ils appartiennent à des points ou à des tangentes données. — On fait parfois plusieurs applications d'une même détermination: ξ, dans les n°s 62 et 64; ξ_1 et ψ, dans les n°s 67 et 69; ξ_2, η et ζ, dans les n°s 68 et 70, en sont des exemples. — Les barres noires des tables séparent, pour chaque système, les nombres qu'on doit connaître ou déterminer d'avance de ceux qu'on en déduit. [Dans la table du n° 62, la barre devait séparer μ et μ' dans tous les systèmes à l'exception du premier].

64. Systèmes $n=4$, $d=2$, $e=0$ (voir le n° 55). — Dans le premier système, on emprunte $(2d)$ au premier système du n° 65; dans les autres on connaît d'avance μ. Dans cette table et dans les suivantes, la valeur du μ' d'un système est placée au dessous de son μ.

65. Systèmes de quartiques dont deux branches se touchent. — Dans tous les systèmes, à l'exception du premier (voir 64), on connaît d'avance les valeurs de μ et de μ'. Les équations du n° 56 suffiront donc à la détermination des coefficients A et B de λ et de ν (voir 49) et des nombres b_1 et $[b_1]$.

66. Systèmes de quartiques douées d'un point double fixe et d'un point double libre. — μ et μ' étant connus d'avance, les équations du n° 55 suffiront à la détermination des coefficients de λ et de ν ($A=360$, $B=32760$) et des nombres b et $[b]$. L'origine du coefficient 2 de $(2d)$ et de ξ_0 est indiquée dans le n° 19 du résumé.

67. Systèmes de quartiques douées d'un point double sur une droite donnée et d'un point double libre. — Les coefficients de λ et de ν sont les mêmes que dans le n° 66. b_0 est l'ordre du lieu du point double libre; b_1, le degré de multiplicité de la droite, lieu de l'autre point double.

68. Systèmes de quartiques douées d'un point double fixe ou d'un point double sur une droite donnée (voir 54). — Les équations de vérification d'une seule de ces deux séries de systèmes (μ' d'un système $=\mu$ du système suivant) ne suffiront pas à la détermination des coefficients de λ et de ν, qui sont — à deux près — les mêmes dans les deux séries. On doit donc les discuter à la fois.

Les coefficients ont les significations suivantes: A, B, C sont les nombres des solutions (1) des problèmes suivants: trouver le point double, un des 8 sommets simples ou le sommet double d'une courbe λ, les autres de ces 10 points étant connus.

D est l'ordre du lieu d'un sommet simple, du sommet double, ou du point double d'une courbe λ dont la droite triple pivote autour d'un point fixe, pendant que les autres de ces points parcourent des droites. Si une de ces droites passe par le point fixe, c'est-à-dire si ce point est lui-même le point double, un sommet simple ou le sommet double, il faut substituer $D-A$, $D-B$, $D-C$ à D.

E et F sont les nombres des solutions des problèmes suivants: trouver le point double ou un des 10 sommets d'une courbe ν, les autres de ces 11 points étant connus.

G est l'ordre du lieu d'un sommet ou du point double d'une courbe ν, si la droite pivote autour d'un point fixe et que les autres de ces 11 points parcourent des droites. Si le point fixe est lui-même le point double ou un sommet, il faut substituer $G-E$ ou $G-F$ à G.

Dans la seconde table il faut emprunter les valeurs de b à la colonne μ de la première table.

69. Systèmes élémentaires $n=4$, $d=1$, $e=0$. — Les coefficients de λ et de ν sont les nombres A et E du n° précédent.

(1) A, B, . . étant proprement des nombres de courbes λ et ν, il est possible que les nombres des solutions n'en soient que des facteurs.

70. Systèmes $n = 4$, $d = e = 0$ (voir 51). — Les coefficients de λ et de ν ont les significations suivantes:

H et I sont les nombres des solutions des problèmes suivants: trouver un des 9 sommets simples ou le sommet double d'une courbe λ, les autres de ces 11 points étant connus.

K est l'ordre du lieu du sommet double ou d'un sommet simple d'une courbe λ dont la droite triple pivote autour d'un point fixe, pendant que les autres sommets parcourent des droites ($K-H$ ou $K-I$, si le point fixe est lui-même un sommet simple ou double).

L est le nombre des solutions du problème: 11 sommets d'une courbe ν étant connus, en trouver le 12^{me}.

M est l'ordre du lieu d'un sommet d'une courbe ν, si la droite pivote autour d'un point fixe et que les autres sommets parcourent des droites ($M-L$, si le point fixe est lui-même un sommet).

71. Autres systèmes élémentaires de quartiques.

2^{me} exemple. La première table contient les valeurs des β des systèmes des n^{os} 68 et 69. (t, nombre des tangentes données). Au moyen de ces résultats, on peut trouver les nombres μ, μ', c et $[c]$ des systèmes élémentaires $n = 4$, $d = 0$, $e = 1$ (seconde table où μ' se trouve à droite de μ).

3^{me} exemple. Systèmes $n = 4$, $d = 1$, $e = 2$. — On commence la recherche (voir 37) par le système $4\,P\,4\,L$ où $\mu = \mu'$. Alors, dans les autres systèmes, on connaîtra d'avance μ ou μ'.

Thermochemiske Undersøgelser.

XII. Undersøgelser over Iltnings- og Reductionsmidler.

Ved

Julius Thomsen.

Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10 B. V.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1873.

Undersøgelser

over

Iltnings- og Reductionsmidler.

Ved

Julius Thomsen.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1873.

1. Naar det gjælder ad thermochemisk Vei at bestemme Størrelsen af Iltens Affinitet i Stoffernes forskjellige Iltningsgrader, kræves der et nøiagtigt Kjendskab til forskjellige Iltnings- og Reductionsmidler; thi kun et ringe Antal Iltforbindelser kunne saaledes fremstilles directe, at man kan anvende en directe Iltning til en nøiagtig calorimetrisk Bestemmelse. I Almindelighed nødes man til at bestemme Iltningsvarmen ad en Omvei, idet man enten tilveiebringer Iltningen ved passende Iltningsmidler eller paa en hensigtsmæssig Maade fremkalder en Reduction af den paagjældende Forbindelse; men derved bliver det en uundgaaelig Nødvendighed at skaffe sig nøiagtig Kundskab om de anvendte Midlers Affinitetsforhold, for at man af de iagttagne Varmetoninger kan beregne selve Iltningsvarmen.

Da jeg saavidt muligt ønsker at offentliggjøre mine Undersøgelser i samlede Grupper, saa at hver enkelt Afhandling kommer til at indbefatte beslægtede Phænomener, har jeg bestemt mig til først at bekjendtgjøre mine Undersøgelser over de vigtigste Iltnings- og Reductionsmidler, saaledes at jeg i en følgende Meddelelse om Iltens Affinitet til Metalloiderne kan henholde mig til de her foreliggende Bestemmelser. Afhandlingen over Iltens Affinitet kan da forelægges i en systematisk Form, idet de heterogene Undersøgelser ere udsondrede.

Den foreliggende Undersøgelse indbefatter 4 Reductionsmidler og 7 Iltningsmidler, valgte saaledes, at de næsten overalt ville være tilstrækkelige til de følgende Undersøgelser. Reductionsmidlerne ere følgende:

Svovlsyrling,
svovlsuurt Jernforilte,
Jernforchlor og
Tinforchlor;

Iltningsmidlerne ere følgende:

Chlor og *Brom*,
Chlorundersyrling,
manganoversuurt Kali,
Manganoverilte,
Chromsyre og
Brintoverilte.

I Slutningen af nærværende Meddelelse ere Resultaterne saaledes sammenstillede og beregnede, at de directe kunne anvendes ved fremtidige Arbeider; de der opførte Tabeller angive de paagjældende Stoffers Reductions- og Iltningsvarme for nogle hyppigt forekommende Tilfælde.

Kun faa af de her meddelte Reactioner have tidligere været undersøgte, og paa en enkelt Undtagelse nær stemme Resultaterne ikke overeens med dea f mig fundne; den foreliggende Afhandling har derfor en vis Betydning, idet den afgiver Grundlag for mangfoldige videregaaende Undersøgelser. De meddeelte Talstørrelser støtte sig udelukkende paa mine egne Undersøgelser, idet de enten ere Resultater af mine directe Bestemmelser eller ere fremgaaede ved deelviis Benyttelse af mine tidligere bekjendtgjorte Arbeider.

A. Svovlsyrling.

2. Svovlsyrlingens Iltningsvarme har jeg bestemt ved at maale den Varmeudvikling, som indtræder, naar Svovlsyrlingvand iltes af luftformigt Chlor. *Det Indre af Calorimetret* bestaaer af en kolbelignende Platinbeholder, som rummer $1^1/_2$ Litre, med en Prop, forsynet med 5 Gjennemboringer. Den midterste Gjennemboring er til Røreapparatets Stang; denne bevæger sig op og ned og er ligesom den Plade, den bærer, af Platin. I selve Aabningen er indkittet et Glasrør, som rager omtrent 3 Centimetre frem over og under Proppen og hvis Øiemed er at forhindre, at Røreapparatet kommer til at berøre denne. De 4 andre Huller ere anbragte symmetrisk om det midterste. I det ene af disse er indkittet et ganske tyndt, i begge Ender tilsmeltet Glasrør, som næsten naaer til Platinbeholderens Bund og tjener til at holde Blandingsapparatet i en bestemt Stilling; dettes Plade har nemlig en Gjennemboring, hvorigjennem Glasrøret gaaer, saa at Stangen ikke kan dreie sig om sin Axe. Den tredie Aabning i Proppen er bestemt til Thermometret; den fjerde indeholder Tilledningsrøret for Luftarterne, og dette udmunder næsten heelt nede ved Beholderens Bund. Gjennem den femte Aabning endeligt gaaer et kort Glasrør, hvorfra man kan aflede de bortgaaende Luftarter. Til Beskyttelse mod Luftarterne i Beholderen er Proppens nederste Flade dækket med en tynd Platinplade. Det hele Apparat befinder sig paa mit oftere omtalte Arbeidsbord midt i en dobbeltvægget stor Cylinder, saaledes som jeg tidligere har beskrevet det. Blandingsapparatet bevæges som sædvanligt ved Hjælp af den elektromagnetiske Maskine.

3. Den til Forsøgene anvendte Svovlsyrlingopløsning indeholdt omtrent 2 Promille Anhydrid; ved en saadan Opløsnings Iltning stiger Varmegraden over 2 Grader, og det er

altsaa unødvendigt at anvende en stærkere Opløsning. I ethvert Forsøg anvendtes 1200 Gram af Vædsken, som deelviis eller fuldstændigt blev iltet med Chlor. Jeg har allerede i Selskabets Skrifter Bind X, p. 182 beskrevet et Apparat, som jeg har construeret til Arbeider med tør Chlorluft; det samme Apparat blev anvendt ved nærværende Forsøg.

Mængden af den til Svovlsyre iltede Svovlsyrling bestemtes af den herved dannede Chlorbrinte, idet denne veiedes som Chlorsølv. I nedenstaaende Tabel betegner

T Luftens Varmegrad;

t_a Calorimetrets Varmegrad ved Forsøgets Begyndelse;

t_b „ „ „ „ Slutning;

q den til Chlorbrintemængden svarende Mængde Chlorsølv;

a Svovlsyrlingopløsningens calorimetriske Værdi; i disse Forsøg 1198 Gram;

p den calorimetriske Værdi af Calorimetret med Tilbehør, her 16 Gram;

R Resultatet, beregnet pr. Molecul Svovlsyrling, naar et Molecul Chlorsølv, efter Stas, sættes til 143,39 Gram.

Beregningen skeer da efter Formlen

$$R = \frac{(t_b - t_a)(A + p) . 143{,}39}{q}.$$

Forsøgene have givet følgende Resultater:

$(SO^2 Aq, Cl^2)$

Nr.	526	527	528
T	17°,8	18°,2	18°,0
t_a	17,350	17,095	16,855
t_b	18,575	19,110	18,970
q	5,738	9,507	10,050 Gr.
R	74320^c	75780^c	73620^c

Middeltallet af disse Forsøg er

$$(SO^2 Aq, Cl^2) = 73907^c$$

Svovlsyrlingens Iltningsvarme beregnes nu paa følgende Maade:

$$(SO^2 Aq, Cl^2) = (SO^2 Aq, O) + (Cl, H, Aq) - (H^2, O).$$

Nu er ifølge mine tidligere Undersøgelser over Brintens Affinitet til Metalloiderne

$$(Cl, H, Aq) = 39315^c$$
$$(H^2, O) = 68357,$$

og deraf findes

$$(SO^2 Aq, O) = 63634^c$$

d. e. *et Molecul i Vand opløst Svovlsyrling giver ved at iltes til Svovlsyre en Varmemængde af 63634^c.* Det er altsaa med denne Størrelse, at Svovlsyrlingen reagerer ved de Reductioner, den frembringer.

4. Naar Svovlsyrlingen ikke anvendes som vandig Opløsning, men som Luftart til Reductioner paa vaad Vei, adderer sig *Svovlsyrlinganhydridets Opløsningsvarme* til den ovenfor nævnte Størrelse. Til Bestemmelsen af Opløsningsvarmen blev tør Svovlsyrlingluft ledet til Vandet i Calorimetret, og Varmegraden maalt. Forsøgene anstilledes ganske paa samme Maade som Forsøgene Nr. 487—489 til Bestemmelsen af Chlorbrintens Opløsningsvarme. Absorptionskarret var en Glaskugle af ½ Litres Indhold. Mængden af absorberet Syre bestemtes paa den Maade, at først Svovlsyrlingen med Bromvand iltedes til Svovlsyre og Vædsken derefter titreredes med Natronopløsning; til hver 2 Æqvivalenter Natron svarer da 1 Æqvivalent Svovlsyrling. Titreringen udføres som alle mine Titreringer ikke efter Vædskernes Rumfang, men efter deres Vægt.

Ved T, t_a, t_b og R betegnes de samme Størrelser som ovenfor; endvidere ved

s Vægten af den til Titreringen anvendte Syremængde.

n « « « Natronopløsning, som udfordredes til Mætning af den med Bromvand iltede Svovlsyrlingopløsning.

N Natronopløsningens Æqvivalent (990 Gram).

a Vægten af Vandet i Calorimetret.

p Calorimetrets caloriske Æqvivalent.

x Vægten af den absorberede Svovlsyrling.

Denne sidste bestemmes ganske paa samme Maade som angivet paa det citerede Sted ved Formlen

$$x = \frac{n.a.SO^2}{2N.s - nSO_2},$$

og R eller Varmeudviklingen pr. Molecul bestemmes da ved Formlen

$$R = \frac{(t_b - t_a)(a+p)}{2}\left(2\frac{N.s}{n} - SO^2\right).$$

Forsøgene have givet følgende Resultater:

(SO^2, Aq).

Nr.	529	530	531
T	19°,4	19°,4	19°,5
t_a	18,580	18,602	18,648
t_b	20,130	20,600	20,370
s	30,79	30,82	31,12 Gr.
n	25,09	32,48	27,69
x	5,737	7,448	6,274
R	7676^c	7624^c	7796^c

Forsøget varede omtrent 6 Minuter. Middeltallet af Forsøgene er

$$(SO^2,\ Aq) = 7699^c,$$

hvorved angives *Absorptionsvarmen for et Molecul Svovlsyrling.*

Ved Reductionsforsøgene med Svovlsyrling blive altsaa følgende Talstørrelser at benytte:

$$\left.\begin{array}{ll} (SO^2,\ Aq) & = 7699^c \\ (SO^2,\ Aq,\ O) & = 63634 \\ (SO^2,\ O,\ Aq) & = 71333 \end{array}\right\} \text{Thomsen.}$$

Disse Processer ere allerede tidligere undersøgte af Favre (Journal de pharm. et de chimie XXIV). Af de af ham fundne Resultater, som ere frembragte med Qviksølvcalorimetret, stemmer kun Tallet for Reactionen (SO^2, Aq) med mine Tal, som det vil sees af følgende Schema:

	Favre.	Thomsen.
$(SO^2\ Aq,\ Cl^2)$	67138^c	73907^c
$(SO^2,\ Aq)$	7706	7699
$(SO^2\ Aq,\ O)$	55678	63634
$(SO^2,\ O,\ Aq)$	63384	71333

B. Jernforchlor.

5. Undersøgelsen over Jernforchlorets Iltning er udført ganske paa samme Maade som for Svovlsyrlingens Vedkommende. Tør Chlorluft blev ledet til en fortyndet Opløsning af Jernforchlor, og den derved frembragte Varmeudvikling maalt. Jernforchloropløsningens Styrke bestemtes før Forsøget med manganoversuurt Kali, og paa samme Maade blev Vædskens Indhold af Jernforchlor bestemt efter Chlorets Indvirkning. Opløsningen af det manganoversure Kali havde en saadan Styrke, at 7406 Gram svarede til et Atom eller 16 Gram Ilt, hvilket er den Iltmængde, der udfordres til Iltning af 2 Molecůler $Fe\,Cl^2$. Der anstilledes 2 Forsøgsrækker.

100,21 Gram af den i første Forsøgsrække anvendte Jernopløsning fordrede til fuldstændig Iltning 42,29 Gram Manganopløsning; Jernopløsningens Styrke var altsaa en saadan, at $2\,Fe\,Cl^2\,Aq = 17550$ Gram, og indeholdt mod 2 Mol. eller 254 Gram Jernforchlor 17296 Gram Vand.

I de følgende Tabeller betegne T, t_a, t_b og R de samme Størrelser som ovenfor; endvidere i den til Titreringen anvendte Vægt af den med Chlor behandlede Jernopløsning; m Vægten af den Manganopløsning, som var fornøden til den fuldstændige Iltning af i, og y hvor stor en Brøkdeel af Jernopløsningen der er bleven iltet; denne sidste Størrelse beregnedes efter Formlen

$$y = \frac{1 - \frac{m}{i} \cdot \frac{17750}{7406}}{1 + \frac{m}{i} \cdot \frac{71}{7406}}$$

Tallet 71 er Vægten af 1 Molecul Chlor; Betydningen af de øvrige Tal fremgaaer af det ovenfor Meddelte.

Til hvert Forsøg anvendtes 1200 Gram Jernopløsning; den calorimetriske Værdi heraf er efter ovenstaaende Data

$$\frac{17296 \,.\, 1200}{17550},$$

hvortil endnu maa adderes Calorimetrets caloriske Værdi $p = 16$ Gram. Multipliceres Summen af disse to Størrelser med $\frac{17550}{1200}$, fremkommer det fyldte Calorimeters caloriske Værdi, beregnet for et Dobbeltmolecul Jernforchlor, eller

$$17296 + \frac{17550}{1200} \,.\, 16 = 17529 \text{ Gram},$$

og Resultatet bliver da

$$R = \frac{(t_b - t_a) . 17529}{y}$$

Den første Forsøgsrække har givet følgende Resultater:

$(2\, Fe\, Cl^2\, Aq,\ Cl^2)$.

Nr.	532	533	534
T	18°,0	17°,5	17°,4
t_a	16,972	16,530	16,545
t_b	18,960	19,180	19,275
i	100,16	100,24	103,38 Gr.
m	15,48	6,42	5,41
y	0,6329	0,8476	0,8756
R	55052 ^{c}	54801 ^{c}	54646 ^{c}

Hvert Forsøg varede 7—8 Minuter; Middeltallet af Resultaterne er

$$(2\, Fe\, Cl^2\, Aq,\ Cl^2) = 54833^c.$$

I den anden Forsøgsrække var Jernopløsningens Concentration $2\, Fe\, Cl^2\, Aq = 18524$ Gr. Beregningen af y eller Iltningens Omfang skeer da efter Formlen

$$y = \frac{1 - \frac{m}{i} \cdot \frac{18524}{7406}}{1 + \frac{m}{i} \cdot \frac{71}{7406}}$$

Endvidere bliver det fyldte Calorimeters caloriske Værdi, beregnet for et Dobbeltmolecul, idet $18524 - 254 = 18270$,

$$18270 + \frac{18524}{1200} . 16 = 18517 \text{ Gr.}$$

og Resultatet bliver altsaa

$$R = \frac{(t_b - t_a)\ 18517}{y}$$

Den anden Forsøgsrække har givet følgende Tal:

$(2\, Fe\, Cl^2\, Aq,\ Cl^2)$.

Nr.	535.	536.
T	18°,6	18°,6
t_a	17,275	17,270
t_b	19,995	20,235
i	101,88	105,88 Gr.,
m	3,20	0,00
y	0,9207	1,000
R	54676 ^{c}	54900 ^{c}

Hvert Forsøg varede 6—7 Minuter. I det sidste Forsøg var Iltningen fuldstændig, og Vædsken lugtede svagt af Chlor. Middeltallet af disse Forsøg er

$$(2\,Fe\,Cl^2\,Aq,\ Cl^2) = 54788^c.$$

Resultaterne af de to Forsøgsrækker stemme indbyrdes med 1 Promilles Nøiagtighed; antages Middeltallet mellem begge som det endelige Resultat, har man

$$(2\,Fe\,Cl^2\,Aq,\ Cl^2) = 54810^c,$$

d. e. *den Varmeudvikling som ledsager Dannelsen af Jerntvechlor ved Indvirkning af Chlor paa en vandig Oplosning af Jernforchlor, udgjor for hvert Molecul Jerntvechlor 54810^c.*

Naar en Jernforchloroplosning med fri Chlorbrinte anvendes som Reductionsmiddel for Iltforbindelser, indtræder samtidigt en Sønderdeling af Chlorbrinten og en Dannelse af Vand. Reactionsformlen er følgende:

$$(2\,Fe\,Cl^2\,Aq,\ O,\ H^2\,Cl^2\,Aq) = (2\,Fe\,Cl^2\,Aq,\ Cl^2) - (Cl^2,\ H^2,\ Aq) + (H^2,\ O).$$

Ledene paa Ligningens høire Side ere nu bekjendte, og man finder da

$$(2\,Fe\,Cl^2\,Aq,\ O,\ H^2\,Cl^2\,Aq) = 44537^c.$$

Til hvert Atom Ilt, som optages af Jernforchlor, svarer saaledes en Varmeudvikling af 44537^c.

Af denne Størrelse kan man nu ogsaa beregne Reactionen $(2\,\overline{\overline{Fe}},\ O)$ d. e. Varmetoningen ved Jernforiltehydratets Iltning til Jerntveiltehydrat. Man har

$$(2\,Fe\,Cl^2\,Aq,\ O,\ H^2\,Cl^2\,Aq) = (2\,\overline{\overline{Fe}},\ O) - 2\,(\overline{\overline{Fe}},\ H^2\,Cl^2\,Aq) + (2\,\overline{\overline{\overline{Fe}}},\ H^6\,Cl^6\,Aq).$$

De to sidste Led ere bekjendte fra mine tidligere Meddelelser; man har nemlig (see Selskabets Skrifter 9de Bind p. 326):

$$(\overline{\overline{Fe}},\ 2\,H\,Cl\,Aq) = 21390^c$$
$$(2\,\overline{\overline{\overline{Fe}}},\ 6\,H\,Cl\,Aq) = 33450,$$

og altsaa bliver

$$(2\,\overline{\overline{Fe}},\ O) = 53867^c.$$

Jernforiltehydratets Iltningsvarme er saaledes meget betydelig, nemlig 53867 for hvert absorberet Iltatom.

C. Svovlsuurt Jernforilte.

6. Det svovlsure Jernforiltes Iltningsvarme kunde vel beregnes af den sidst opførte Størrelse; men da en saadan Beregning maatte støtte sig paa Neutralisationsvarmen for Jerntveilte og Svovlsyre, og da dette Tal paa Grund af Dannelsen af basisk Salt ikke let kan bestemmes med Nøiagtighed, har jeg gjort en directe Bestemmelse. Iltningen udføres med Chlor, ganske paa samme Maade og med det samme Apparat som ovenfor omtalt. Den anvendte Opløsning havde Concentrationen $2 Fe SO^4 Aq = 14719$ Gram; man man har da

$$y = \frac{1 - \frac{m}{i} \cdot \frac{14719}{7406}}{1 + \frac{m}{i} \cdot \frac{71}{7406}}$$

og Resultatet

$$R = \frac{(t_b - t_a) \cdot 14607}{y}$$

Forsøgenes Enkeltheder findes i nedenstaaende Tabel, hvor alle Betegnelser have samme Betydning som tidligere.

$(2 Fe SO^4 Aq, Cl^2)$.

Nr.	537	538	539
T	18°,0	17°,1	18°,0
t_a	17,060	15,730	16,490
t_b	20,156	18,775	19,510
i	100 Gr.	100 Gr.	100 Gr.
m	1,77	2,66	3,12
y	0,9646	0,9428	0,9376
R	46892 ^{c}	47177 ^{c}	47049 ^{c}

Forsøget varede 10—12 Minuter. Middeltallet af Resultaterne er

$$(2 Fe SO^4 Aq, Cl^2) = 47039^c.$$

Subtraheres herfra Differensen

$$(2 Cl, H, Aq) - (H^2, O) = 10273^c$$

faaer man

$$(2 Fe SO^4 Aq, O, H^2 Cl^2 Aq) = 36766^c.$$

Da nu ifølge mine ovenfor citerede Forsøg Jerntveilte med Chlorbrintesyre og Svolvsyre giver meget nær den samme Neutralisationsvarme, kan man uden kjendelig Feil sætte

$$(2FeSO^4Aq,\ O,\ SO^3Aq) = 36800^c.$$

Vilde man beregne denne Størrelse af den ovenfor anførte Størrelse $(2\overline{\overline{Fe}},\ O)$ og Svovlsyrens Neutralisationsvarme for Jernforilte og Jerntveilte, som jeg tidligere har angivet, vilde Resultatet blive 37777^c. Denne Forskjel tyder paa, at Jerntveiltets Neutralisationsvarme med Svolvlsyre i Meddelelsen i Videnskabernes Selskabs Skrifter 5te Række naturv.-math. Afd. Bd. 9 p. 326 er angivet omtrent 1000^c for høit, og at det der opførte Tal 3 . 11250 bør rettes til 3 . 10920^c. Aarsagen hertil er, som ovenfor berørt, Dannelsen af basisk Salt ved det svovlsure Jerntveiltes Fældning med Kalihydrat til Bestemmelsen af Neutralisationsvarmen. Tabellen indeholder den ved Forsøget fundne Størrelse 11250^c, men sandsynligviis er den efter de ovennævnte Resultater beregnede 10920 nøiagtigere.

For Reductionsphænomenerne med Jernforiltesaltene gjælde saaledes følgende Talstørrelser:

$$\left.\begin{array}{ll}(2\,Fe\,Cl^2Aq,\ Cl^2) & = 54810^c \\ (2\,Fe\,Cl^2\,Aq,\ O,\ Cl^2H^2Aq) & = 44537 \\ (2\,Fe\,SO^4\,Aq,\ Cl^2) & = 47039 \\ (2\,Fe\,SO^4\,Aq,\ O,\ Cl^2H^2Aq) & = 36766 \\ (2\,\overline{\overline{Fe}},\ O) & = 53867\end{array}\right\}\text{Thomsen.}$$

D. Chlorundersyrling.

7. Chlorundersyrlingen reduceredes med Jernforchlor; Jernopløsningen indeholdt for hvert Molecul et Molecul Chlorbrintesyre, for at der ved Vexelvirkningen med Chlorundersyrlingen kunde dannes normalt Jerntvechlor. Ved Saltsyrens Indvirkning paa Jernforchlor kan man iagttage en svag Varmetoning, men da den kun udgjør c. 100^c pr. Molecul, kan man see bort fra denne Størrelse. Jernopløsningens Concentration var $2\,(Fe\,Cl^2\,.\,H\,Cl\,Aq) = 14366$ Gr., Chlorundersyrlingopløsningens $Cl\,O\,H\,Aq = 14348$ Gr. Til hvert Forsøg anvendtes $^1/_{30}$ Molecul Chlorundersyrling og lidt mere end $^1/_{15}$ Molecul Jernforchlor, for at Chlorundersyrlingen fuldstændigt kunde reduceres. Forsøget anstilledes i et Blandingscalorimeter, som jeg allerede tidligere har beskrevet.

A og B	betegne	Vægten af de to Vædsker,
a og b	«	de to Vædskers caloriske Æqvivalent,
T	«	Luftens Varmegrad,
t_a og t_b	«	Vædskernes Varmegrad før Sammenblandingen,
t_c	«	Varmegraden efter Blandingen,
r	«	den ved Processen udviklede Varmemængde,
R	«	Resultatet pr. Molecul Chlorundersyrling.

Beregningen af Resultatet skeer efter Formlen

$$R = [(t_c - t_b)(b + 8) + (t_c - t_a)\,a - 10^c]\,30.$$

Platinbeholderens calorimetriske Værdi er 8 Gram, og 10^c en Correction paa Grund af en constant Differens mellem Thermometrene.

Undersøgelsen gav følgende Resultater:

$(2\,Fl\,Cl^2\,.\,H\,Cl\,Aq,\ Cl\,O\,H\,Aq)$.

Nr.	540	541
A	482 Gr. Jernforchlor.	
B	478,3 » Chlorundersyrling.	
a	475 «	475 Gr.
b	477 «	477 «
T	18°,2	18°,2
t_a	18,500	18,285
t_b	17,945	17,875
t_c	20,160	20,015
r	1853^c	1849^c
R	55590^c	55470^c

Middeltallet af disse to Forsøg er

$$(2\,Fe\,Cl^2 . H\,Cl\,Aq,\ Cl\,O\,Aq) = 55530^c.$$

Da den caloriske Reactionsformel for Processen er følgende:

$$R = (2\,Fe\,Cl^2 . H\,Cl\,Aq,\ Cl^2) - (Cl,\ O,\ H,\ Aq) - (Cl,\ H,\ Aq) + (H^2,\ O)$$

og alle Led i denne Formel med Undtagelse af $(Cl,\ O,\ H,\ Aq)$ ere bekjendte, kan denne Størrelse beregnes; man har nemlig

$$55530^c = 54810^c - (Cl,\ O,\ H,\ Aq) - 39315^c + 68357^c$$

$$(Cl,\ O,\ H,\ Aq) = 28322^c.$$

Da endvidere $2\,(Cl,\ O,\ H,\ Aq) = (Cl^2,\ O,\ Aq) + (H^2,\ O)$,

finder man

$$(Cl^2,\ O,\ Aq) = -11713^c.$$

Chlorundersyrlingen kan ved Iltningsprocesserne indgaae i Beregningen enten som Chlor eller som Ilt. I første Tilfælde er Processen

$$Cl\,O\,H + Cl\,H = Cl^2 + H^2\,O,$$

og Chlorundersyrlingen giver saaledes for hvert Molecul disponibelt Chlor ved den paagjældende Proces en Varmeudvikling, som er

$$-(Cl,\ O,\ H,\ Aq) - (Cl,\ H,\ Aq) + (H^2,\ O) = 720^c$$

større end den, som luftformigt Chlor frembringer. — I det andet Tilfælde, hvor Chlorundersyrlingen indgaaer i Beregningen som Ilt, er Reactionen

$$Cl\,O\,H\,Aq = Cl\,H\,Aq + O$$

og Varmeudviklingen bliver her

$$(Cl,\ H,\ Aq) - (Cl,\ O,\ H,\ Aq) = 10993^c = -(Cl\,H\,Aq,\ O)$$

eller 10993^c større end den, som vilde frembringes af et Atom Iltluft i fri Tilstand.

Ved Beregningen af Forsøg, hvor der anvendes en vandig Opløsning af Chlorundersyrling, blive altsaa følgende Talstørrelser at benytte:

$$\left.\begin{array}{lcr} (Cl,\ O,\ H,\ Aq) & = & 28322^c \\ (Cl^2,\ O,\ Aq) & = & -11713 \\ (Cl\,O\,H\,Aq,\ Cl\,H\,Aq) & = & +\ \ 720 \\ (Cl\,H\,Aq,\ O) & = & -10933 \end{array}\right\}\ \text{Thomsen.}$$

E. Tinforchlor.

8. Tinforchloret blev undersøgt paa samme Maade som Jernforchlor med Chlorundersyrling. Tinforchloret indeholdt fri Saltsyre og havde Concentrationen $Sn\,Cl^2\,H\,Cl\,Aq$ = 13560 Gram. Chlorundersyrlingens Concentration var $Cl\,O\,H\,Aq$ = 14305 Gram. I hvert Forsøg blev $^1/_{30}$ Molecul Chlorundersyrling fuldstændigt reduceret med et lille Overskud af Tinforchlor. Alle Betegnelserne i nedenstaaende Tabel, ligesom ogsaa Beregningsformlen, ere ganske de samme som ved det tilsvarende Forsøg med Jernforchlor.

$(Sn\,Cl^2 . H\,Cl\,Aq,\ Cl\,O\,H\,Aq)$

Nr.	542	543
A	460 Gr. Tinforchlor.	
B	476,8 Gr. Chlorundersyrling.	
a	452 Gr.	452 Gr.
b	477	477
T	18°,1	18°,1
t_a	18,065	18,190
t_b	17,740	17,350
t_c	20,560	20,420
r	2486 ^{c}	2487 ^{c}
R	74580 ^{c}	74610 ^{c}

Middeltallet af disse to Forsøg er

$$(Sn\,Cl^2 . H\,Cl\,Aq,\ Cl\,O\,H\,Aq) = 74595^c.$$

I forrige Afsnit fandtes

$$(2\,Fe\,Cl^2 . H\,Cl\,Aq,\ Cl\,O\,H\,Aq) = 55530^c.$$

Differensen mellem disse to Talstørrelser er saaledes

$$(Sn\,Cl^2\,Aq,\ Cl^2) - (2\,Fe\,Cl^2\,Aq,\ Cl^2) = 19065^c$$

og efter den ovenfor fundne Værdi for den sidste Reaction finder man

$$(Sn\,Cl^2\,Aq,\ Cl^2) = 73875^c.$$

Naar Tinforchlor anvendes som Reductionsmiddel for Iltforbindelser, er det bekvemmere for Beregningen at anvende Udtrykket $(Sn\, Cl^2\, Aq,\ O,\ H^2\, Cl^2\, Aq)$. Den hertil svarende Talstørrelse fremkommer af den foregaaende paa følgende Maade. Da

$$2\,(H,\ Cl,\ Aq) - (H^2,\ O) = 10273^c,$$

bliver

$$(Sn\, Cl^2\, Aq,\ O,\ 2\,H\, Cl\, Aq) = 63602^c,$$

hvilken Størrelse man altsaa ligesom den tilsvarende for Jernforchlor directe kan anvende i Beregningerne. — Ved Reductionsprocesser med Tinforchlor komme altsaa følgende Talstørrelser i Betragtning:

$$\left.\begin{array}{ll} (Sn\, Cl^2\, Aq,\ Cl^2) & = 73875^c \\ (Sn\, Cl^2\, Aq,\ O,\ 2\,H\, Cl\, Aq) & = 63602 \end{array}\right\} \text{Thomsen.}$$

F. Manganoversuurt Kali.

9. Ved det manganoversure Kalis Reduction dannes enten et Manganforiltesalt eller Manganoverilte eller et mangansuurt Salt. Naar det manganoversure Kali ikke er tilstede i Overskud, danner sig ogsaa i flere Processer en Forbindelse, der staaer mellem Tveilte og Overilte, men saadanne Processer egne sig paa Grund af deres Ubestemthed ikke for thermochemiske Undersøgelser. Jeg skal derfor her kun omtale Hovedreactionerne, Reductionen til Manganforilte eller til Manganoverilte.

Den fuldstændige Reduction af det manganoversure Kali udføres ligesom for Chlorundersyrlingens Vedkommende saavel med Jernforchlor som med Tinforchlor. I Forsøgene med Jernforchlor havde Opløsningerne følgende Concentration:

$$Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq = 37030 \text{ Gr.}$$
$$Fe\,Cl^2 . H^2\,Cl^2\,Aq = 3670 \text{ «}$$

I nedenstaaende Schema have alle Betegnelser samme Betydning som ovenfor, og Beregningen er ligeledes den samme, nemlig

$$R = [(t_c - t_b)(b + 8) + (t_c - t_a)\,a - 10]\,80,$$

idet der i hvert Forsøg anvendtes $^1/_{80}$ af Vægten af et Dobbeltmolecul manganoversuurt Kali. Jernforchlor var tilstede i ringe Overskud, saaledes at Reductionen blev fuldstændig. Forsøgenes Enkeltheder ere følgende:

$(Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq,\ 10\,Fe\,Cl^2 . H^2\,Cl^2\,Aq)$

Nr.	544	545
A	463 Gr. Jernforchlor.	
B	463 Gr. manganoversuurt Kali.	
a	452 Gr.	452 Gr.
b	459	459
T	19°,2	19°,2
t_a	19,600	19,450
t_b	18,572	18,445
t_c	23,020	22,890
r	3612^c	3620
R	288960^c	289600

Middeltallet af disse Bestemmelser er

$$R = 289280^c.$$

Subtraheres fra denne Størrelse det Femdobbelte af den ovenfor for Iltningen af 2 Moleculer Jernforchlor fundne Varmemængde, eller $5 . 44537^c$, finder man den Varmeudvikling, som vilde fremtræde, naar et dobbelt Molecul manganoversuurt Kali kunde reduceres af Chlorbrintesyre under Udvikling af 5 Atomer Ilt. Subtraheres derimod fra Størrelsen R det Femdobbelte af den ligeledes angivne Størrelse af Varmetoningen ved Dannelsen af et Molecul Jerntvechlor af Jernforchlor og Chlor, eller $5 . 54810^c$, findes den Varmetoning, som svarer til Sønderdelingen af det manganoversure Kali med Chlorbrintesyre, naar der herved udvikles 5 Moleculer Chlor. Man har saaledes

$$(Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq,\ n\,H\,Cl\,Aq) = \begin{cases} 66595^c \text{ for } O^5, \text{ idet } n = 6. \\ 15230^c \text{ for } Cl^{10}, \text{ idet } n = 16. \end{cases}$$

10. Forsøgene med Tinforchlor og manganoversuurt Kali udførtes paa ganske lignende Maade. Opløsningernes Concentration var

$$Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq = 54316 \text{ Gr.}$$
$$Sn\,Cl^2 . H^4\,Cl^4\,Aq = 11132 \text{ Gr.}$$

I hvert Forsøg anvendtes $^1/_{135}$ af et Dobbeltmolecul Mangansalt. Forsøgenes Enkeltheder ere følgende:

$(Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq,\ 5\,Sn\,Cl^2 . H^4\,Cl^4\,Aq)$

Nr.	546	547
A	445,3 Gr. Tinforchlor.	
B	402,3 Gr. manganovers. Kali.	
a	432 Gr.	432 Gr.
b	400 Gr.	400 Gr.
T	17°,9	17°,9
t_a	18,220	18,190
t_b	18,005	17,895
t_c	21,505	21,430
R	2837^c	2831^c
r	382990^c	382190^c

Middeltallet af disse Forsøg er

$$R = 382590^c.$$

Subtraheres herfra det Femdobbelte af Tinforchlorets Iltningsvarme, finder man den hypothetiske Decompositionsvarme for manganoversuurt Kali ved Indvirkning af Chlorbrintesyre under den Forudsætning, at der udvikles 5 Atomer Ilt. Subtraheres derimod fra den samme Størrelse det Femdobbelte af Varmeudviklingen ved Tinforchlorets Mætning med Chlor, finder

man Varmetoningen ved Decompositionen, ved hvilken der udvikles 5 Moleculer Chlor. Man har saaledes

$$(Mn^2\, O^8\, K^2\, Aq,\ n\, H\, Cl\, Aq) = \begin{cases} 64580^c \text{ for } O^5 \\ 13215^c \text{ for } Cl^{10}. \end{cases}$$

Disse Tal afvige rigtignok 2015^c fra de ovenfor fundne; men da de ere fremkomne som Differenser mellem 6-ziffrede Tal, svarer en saadan Afvigelse til en Forskjel i selve de store Tals Bestemmelse af kun omtrent $1/3$ Procent. For 1 Atom Ilt eller 1 Molecul Chlor er Afvigelsen kun 403^c, et Resultat, der vel kan ansees som en tilstrækkelig Tilnærmelse ved den specielle Anvendelse af det manganoversure Kali. Som Middeltal af de to Bestemmelser finder man altsaa for Varmetoningen ved den gjensidige Decomposition af manganoversuurt Kali og Chlorbrintesyre

$$(Mn^2\, O^8\, K^2\, Aq,\ n\, H\, Cl\, Aq)$$
$$\text{for Iltudvikling} \ldots\ldots\ 65587^c \text{ for } O^5$$
$$\text{for Chlorudvikling} \ldots\ 14222^c \text{ for } Cl^{10}.$$

11. Naar der til Decompositionen istedetfor Chlorbrintesyre anvendes Svovlsyre, blive Tallene større, fordi Svovlsyrens Neutralisationsvarme er betydeligt større end Chlorbrintesyrens. Efter de af mig bekjendtgjorte Resultater er det svovlsure Manganforiltes Neutralisationsvarme pr. Molecul 3530^c større end Manganforchlorets og ligeledes det svovlsure Kalis Neutralisationsvarme pr. Molecul 3790^c større end Chlorkaliums. For Svovlsyrens Reaction maa der altsaa til de ovenfor anførte Talstørrelser lægges

$$2 \,.\, 3530^c + 3790^c = 10850^c,$$

og man finder heraf

$$(Mn^2\, O^8\, K^2\, Aq,\ 3\, S\, O^3\, Aq) = 76437^c,$$

naar Sønderdelingen finder Sted under Udvikling af 5 Atomer Ilt.

Naar Svovlsyren er tilstede i større Mængde end fornødent til Dannelsen af de normale Salte, blive Talstørrelserne derimod lavere, idet der danner sig sure Salte; den heraf foraarsagede Forringelse i Varmeudviklingen lader sig beregne af mine tidligere bekjendtgjorte Undersøgelser over Neutralisationen. Men det er altid raadeligst, naar man i thermochemiske Øiemed vil anvende manganoversuurt Kali til Iltningsprocesser i sure Opløsninger, da stedse at anvende Chlorbrinte som Syre og at sætte denne Syre til de Vædsker, som skulle iltes; thi et Overskud af Chlorbrintesyre forandrer ikke Resultaterne kjendeligt, idet denne Syre ikke udøver nogen calorisk Virkning paa de opløste til Baserne svarende normale Chlorider.

12. Af de ovenfor fundne Talstørrelser kan man nu beregne Varmeudviklingen ved Dannelsen af manganoversuurt Kali af Manganforiltehydrat, Ilt og Kalihydrat. Man har nemlig

$$(Mn^2\, O^8\, K^2\, Aq,\ 6\, H\, Cl\, Aq) = 2\,(\overline{\overline{Mn}},\ 2\, H\, Cl\, Aq) + 2\,(\overline{K}\, Aq,\ H\, Cl\, Aq) - (2\,\overline{\overline{Mn}},\ O^5,\ 2\,\overline{K}\, Aq).$$

Da nu ifølge mine tidligere bekjendtgjorte Forsøg

$$(\overline{\overline{Mn}}, 2\,H\,Cl\,Aq) = 22950^c$$
$$2\,(\overline{K}\,Aq, H\,Cl\,Aq) = 27500$$
$$(Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq, 6\,H\,Cl) = 65587 \text{ for Iltudvikling,}$$

finder man ved at indføre disse Tal i ovenstaaende Formel

$$65587^c = 45900^c + 27500^c - (2\,\overline{\overline{Mn}}, O^5, 2\,\overline{K}\,Aq)$$
$$(2\,\overline{\overline{Mn}}, O^5, 2\,\overline{K}\,Aq) = 7813^c.$$

Det manganoversure Kali dannes altsaa af Manganforiltehydrat, Ilt og Kalihydrat under en svag Varmeudvikling, nemlig 7813.

Selve Syrens Neutralisationsvarme har jeg ikke undersøgt; men der er ingen Tvivl om, at den maa være liig Neutralisationsvarmen for det store Fleertal af Syrer, hvis Neutralisation med Kalihydratopløsning ledsages af en Varmeudvikling af 27500^c. Under denne Forudsætning kan man beregne Varmeudviklingen ved selve Manganoversyrens Dannelse af Manganforilte, Ilt og Vand; den bliver nemlig 27500^c mindre end 7813^c, eller

$$(2\,\overline{\overline{Mn}}, O^5, Aq) = -19687^c,$$

d. e. *en Sonderdeling af Manganoversyrens vandige Oplosning i Manganforiltehydrat og Ilt vilde være ledsaget af en Varmeudvikling af omtrent 19600^c.*

Denne Sønderdeling finder nu ganske vist ikke Sted; men ved Tilstedeværelsen af Svovlsyre kan Manganoversyren afgive 5 Atomer Ilt og danne svovlsuurt Manganforilte. Den til denne Proces svarende Varmetoning vil være følgende:

$$(Mn^2\,O^7\,Aq, 2\,SO^3\,Aq) = 2\,(\overline{\overline{Mn}}, SO^3\,Aq) - (2\,\overline{\overline{Mn}}, O^5, Aq).$$

Med Anvendelse af de fundne Tal, har man nu, idet

$$(\overline{\overline{Mn}}, SO^3\,Aq) = 26480^c$$
$$(Mn^2\,O^7\,Aq, 2\,SO^3\,Aq) = 72647^c$$

for Udviklingen af 5 Atomer Ilt.

13. Ved forskjellige Iltningsforsøg med manganoversuurt Kali udskilles Manganet som *Manganoverilte.* Til Beregningen af Varmetoningen med saadanne Processer er det nødvendigt, at man kjender Størrelsen $(\overline{\overline{Mn}}, O)$, og da lader Beregningen sig udføre med de allerede fundne Resultater. Denne Størrelse har jeg bestemt paa to Maader. I een Forsøgsrække har jeg bundfældt svovlsuurt Manganforilte med et Overskud af manganoversuurt Kali, hvorved der dannes trefold-svovlsuurt Kali og Manganoverilte. I en anden Forsøgsrække har jeg med svovlsuurt Jernforilte reduceret til Manganforiltesalt et Manganoverilte, som var bundfældt af bekjendte Mængder svovlsuurt Manganforilte og manganoversuurt Kali og derefter udvasket. Denne anden Forsøgsrække danner paa en vis Maade Fortsættelsen af den første; thi de to Processer give tilsammen det samme Resultat, som om Manganoversyren var fuldstændigt reduceret til svovlsuurt Manganforilte.

I den første Forsøgsrække, hvor svovlsuurt Manganforilte fældedes med manganoversuurt Kali, var Opløsningernes Concentration

$$Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq = 45316 \text{ Gr.}$$
$$Mn\,SO^4\,Aq = 7351 \text{ Gr.}$$

I hvert Forsøg anvendtes $^1/_{24}$ Molecul af Sulphatet; af det manganoversure Kali anvendtes $^1/_{70}$ Molecul, altsaa noget mere end $^1/_3$ Molecul for hvert Molecul Sulphat.

Reactionen er følgende:

$$Mn^2\,O^8\,K^2 + 3\,Mn\,SO^4 = 5\,Mn\,O^2 + K^2\,SO^4\,.\,2\,SO^3.$$

Betegnelserne ere de samme som tidligere; men da Forsøgene ere anstillede med en anden Beholder, blive Constanterne i Formlen til Beregningen af r noget anderledes, nemlig

$$r = (t_c - t_b)(b + 14) + t_c - t_a)\,a,$$

og da der anvendtes 3 Moleculer Mangansulphat mod 1 Molecul manganoversuurt Kali, bliver

$$R = 3\,.\,24\,.\,r.$$

Forsøgene have givet følgende Resultater:

$(Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq,\ 3\,Mn\,SO^4\,Aq)$

Nr.	548	549
a	300 Gr.	300 Gr.
b	643 Gr.	643 Gr.
T	18°,3	18°,3
t_a	18,650	18,670
t_b	18,375	18,250
t_c	19,050	18,985
r	563^c	577^c
R	40536^c	41544^c

Middeltallet af disse Resultater er

$$R = 41040^c.$$

Den thermiske Reaction i denne Proces kan deles paa følgende Maade:

$$R = 5\,(\overline{\overline{Mn}},\,O) - 3\,(\overline{\overline{Mn}},\,SO^3\,Aq) + (2\,\overline{K}\,Aq,\ 3\,SO^3\,Aq) - (2\,\overline{\overline{Mn}},\,O^5,\,2\,\overline{K}\,Aq).$$

Da der ved Indvirkningen af 2 Moleculer Svovlsyre paa 1 Molecul Kaliumsulphat indtræder en Varmeabsorption af 2290^c, bliver

$$(2\,\overline{K}\,Aq,\ 3\,SO^3\,Aq) = 29000^c;$$

ved at indføre de ovenfor angivne Værdier for de andre Led finder man

$$41040^c = 5\,(\overline{\overline{Mn}},\,O) - 79440^c + 29000^c - 7813^c$$
$$(\overline{\overline{Mn}},\,O) = 19859^c,$$

d. e. *Varmeudviklingen ved Manganforiltehydratets Iltning til Manganoveriltehydrat udgjor 19859*^{c}.

Da der i disse Forsøg dannes 5 Mol. Manganoverilte, reduceres den Afvigelse fra Middeltallet af 500^c, som de enkelte Forsøg vise, til 100^c eller ½ Procent for hvert Molecul $Mn\,O^2$.

I den anden Forsøgsrække blev til hvert Forsøg bundfældt $^1/_{40}$ Molecul Mangansulphat med manganoversuurt Kali. Her dannes, som ovenfor udviklet,

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{40} = {}^1/_{24} \text{ Mol. Manganoverilte.}$$

Efterat Bundfaldet var udvasket, blev det reduceret med en Opløsning af Jernsulphat, der indeholdt et Molecul fri Svovlsyre for hvert Molecul Sulphat; Jernopløsningens Styrke var $Fe\,SO^4 . SO^3\,Aq = 4282$ Gram; i hvert Forsøg anvendtes 385,4 Gr. eller 0,09 Molecul, saa at der var et lidet Overskud af Jernsalt. Processen er

$$Mn\,O^2 + 2\,Fe\,SO^4 + SO^3 = Mn\,SO^4 + Fe^2\,(SO^4)^3.$$

Forsøgene gav følgende Resultater:

$$(\overline{\overline{Mn}}\,O,\ 2\,Fe\,SO^4 . SO^3\,Aq)$$

Nr.	550	551
a	364,5	364,5 Gr.
b	491	491 -
T	17°,5	17°,5
t_a	17,650	17,150
t_b	17,325	17,800
t_c	19,625	19,705
r	1868^c	1881^c
R	44832^c	45144^c

Beregningen skeer efter Formlen

$$R = [(t_c - t_b)(b+8) + (t_c - t_a)\,a] . 24.$$

Middeltallet af disse Resultater er

$$R = 44988^c.$$

Den caloriske Reactionsformel er følgende:

$$R = (2\,Fe\,SO^4,\ O,\ SO^3\,Aq) - 2\,(Fe\,SO^4\,Aq,\ SO^3\,Aq) - (\overline{\overline{Mn}}, O) + (\overline{\overline{Mn}},\ SO^3\,Aq).$$

Efter mine tidligere bekjendtgjorte Undersøgelser haves

$$(Fe\,SO^4\,Aq,\ SO^3\,Aq) = -896^c;$$

de øvrige Reactioner ere ovenfor omtalte. Man finder da

$$44988^c = 36766^c + 1792^c - (\overline{\overline{Mn}}, O) + 26480^c$$

$$(\overline{\overline{Mn}}, O) = 20050^c,$$

medens vi tidligere for den samme Størrelse have fundet 19859^c. Vi vælge derfor Middeltallet mellem disse to Størrelser og sætte *Varmeudviklingen ved Manganforiltehydratets Iltning til Manganoveriltehydrat*

$$(\overline{\overline{Mn}}, O) = 19954^c.$$

14. Størrelsen af den Varmetoning, som indtræder, naar manganoversuurt Kali sønderdeles under Udskilning af Manganoverilte og Dannelse af Kalihydratopløsning, lader sig nu beregne paa følgende Maade:

$$2\,(\overline{\overline{Mn}}, O) + (2\,\overline{\overline{Mn}}\,O, O^3, 2\,\overline{K}\,Aq) = (2\,\overline{\overline{Mn}}, O^5, 2\,\overline{K}\,Aq)$$

$$39908^c + (2\,\overline{\overline{Mn}}\,O, O^3, 2\,\overline{K}\,Aq) = 7813^c$$

$$(2\,\overline{\overline{Mn}}\,O, O^3, 2\,\overline{K}\,Aq) = -32095^c$$

Det manganoversure Kalis Sønderdeling under Dannelse af Overilte og Kalioplosning vilde altsaa være ledsaget af en Varmeudvikling af 32095^c. Endnu større vilde Varmeudviklingen være ved den analoge Sønderdeling af den frie Manganoversyre; man har nemlig

$$2\,(\overline{\overline{Mn}}, O) + (2\,\overline{\overline{Mn}}\,O, O^3, Aq) = (2\,\overline{\overline{Mn}}, O^5, Aq)$$

og ifølge det ovenfor Udviklede

$$(2\,\overline{\overline{Mn}}\,O, O^3, Aq) = -59595^c.$$

For *Manganoverilte* og *manganoversuurt* Kali har man altsaa følgende Constanter.

1.	$(\overline{\overline{Mn}}, O)$	$= +19954^c$	
2.	$(2\,\overline{\overline{Mn}}, O^5, Aq)$	$= -19687$	
3.	$(2\,\overline{\overline{Mn}}, O^5, 2\,\overline{K}\,Aq)$	$= +7813$	
4.	$(2\,\overline{\overline{Mn}}\,O, O^3, Aq)$	$= -59595$	
5.	$(2\,\overline{\overline{Mn}}\,O, O^3, 2\,\overline{K}\,Aq)$	$= -32095$	
6.	$(Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq, n\,H\,Cl\,Aq)$	$= +65587$	for O^5
		$+14222$	» Cl^{10}
7.	$(Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq, SO^3\,Aq)$	$= +76437$	» O^5
8.	$(Mn^2\,O^8\,K^2\,Aq, SO^3\,Aq)$	$= +63385$	» O^3
9.	$(Mn^2\,O^7\,Aq, 2\,SO^3\,Aq)$	$= +72647$	» O^5.

Reactionerne 2, 4 og 9 gjælde under Forudsætning af, at det manganoversure Kalis Neutralisationsvarme er 27500^c. I Reactionen 8 dannes ved Decompositionen Manganoverilte, svovlsuurt Kali og 3 Atomer Ilt.

G. Chromsyre.

15. Ved Chromsyrens Reduction afgives Halvdelen af Ilten og dannes Chromtveilte. Til Bestemmelsen af den ved Reactionen indtrædende Varmetoning blev Chromsyre i vandig Opløsning reduceret med Tinforchlor, hvortil var sat en saa stor Mængde Chlorbrintesyre som fornødent til Dannelsen af normale Forbindelser. Til hvert Forsøg anvendtes $^1/_{10}$ Molecul af en Chromsyreopløsning, som indeholdt 1000 Mol. Vand pr. Molecul, og $^1/_{25}$ Molecul af en Tinforchlororopløsning, som indeholdt 600 Moleculer Vand. Da 2 Moleculer Chromsyre til fuldstændig Reduction behøve 3 Moleculer Tinforchlor, er der altsaa et lille Overskud af det sidste Stof tilstede. Alle Betegnelser ere de samme som tidligere. Beregningen skeer efter Formlen

$$R = [(t_c - t_b)(b + 8) + (t_c - t_a)\,a\,.\,10]\,.\,80.$$

Forsøgenes Enkeltheder ere følgende:

$(2\,Cr\,O^3\,Aq,\ 3\,Sn\,Cl^2\,.\,H^2\,Cl^2\,Aq)$

Nr.	552	553
a	432 Gr.	432 Gr.
b	450 Gr.	450 Gr.
T	$18°{,}1$	$18°{,}0$
t_a	18,165	18,080
t_b	18,235	18,180
t_c	21,300	21,225
r	2747^c	2742^c
R	219760^c	219360^c

Middeltallet af disse to Resultater er

$$R = 219560^c.$$

Den caloriske Reactionsformel er følgende:

$$R = 3\,(Sn\,Cl^2\,Aq,\ O,\ H^2\,Cl^2\,Aq) + (2\,\overline{\overline{Cr}},\ 6\,H\,Cl\,Aq) - (2\,\overline{\overline{Cr}},\ O^3,\ Aq).$$

Da nu ifølge mine tidligere Undersøgelser

$$(2\,\overline{\overline{Cr}},\ 6\,H\,Cl\,Aq) = 41190^c,$$

finder man ved at anvende den ovenfor angivne Iltningsvarme for Tinforchlor

$$219560^c = 190806^c + 41190^c - (2\,\overline{\overline{Cr}},\ O^3,\ Aq)$$

$$(2\,\overline{\overline{Cr}},\ O^3,\ Aq) = 12436^c$$

d. e. *naar 1 Molecul Chromtveiltehydrat ved at optage 3 Atomer Ilt bliver iltet til Chromsyre, indtræder en Varmeudvikling af 12436^c.*

Naar Chromsyrens Reduction skeer under Medvirkning af Svovlsyre, hvilket vel er det almindeligste Tilfælde, bliver Varmetoningen

$$(2\,Cr\,O^3\,Aq,\ 3\,SO^3\,Aq) = (2\,\overline{\overline{\overline{Cr}}},\ 3\,SO^3\,Aq) - (2\,\overline{\overline{\overline{Cr}}},\ O^3,\ Aq)$$

Da nu ifølge mine tidligere Undersøgelser

$$(2\,\overline{\overline{\overline{Cr}}},\ 3\,SO^3\,Aq) = 49320^c,$$

findes efter ovenstaaende Bestemmelse

$$(2\,Cr\,O^3\,Aq,\ 3\,SO^3\,Aq) = 36884^c.$$

Naar Svovlsyren er mindre fortyndet, saaledes at den svarer til Formlen $SO^4H^2 + nH^2O$, bliver Varmeudviklingen $(SO^4H^2 . nH^2O,\ Aq)$ større end ovenfor angivet. De til en saadan Beregning fornødne Talstørrelser har jeg meddelt i Berichte der Deutschen chemischen Gesellschaft III 496.

Anvendes istedetfor Chromsyre en Opløsning af tvechromsuurt Kali, bliver Varmetoningen

$$(K^2\,Cr^2\,O^7\,Aq,\ 4\,SO^3\,Aq) =$$

$$(2\,\overline{\overline{\overline{Cr}}},\ 3\,SO^3\,Aq) + (2\,\overline{K}\,Aq,\ SO^3\,Aq) - 2(\overline{K}Aq,\ Cr\,O^3\,Aq) - (2\,\overline{\overline{\overline{Cr}}},\ O^3,\ Aq),$$

og da det tvechromsure Kalis Neutralisationsvarme efter mine Bestemmelser (Vidensk. Selskabs Skrifter 9de Bind p. 39)

$$(\overline{K}Aq,\ Cr\,O^3\,Aq) = 13134^c,$$

findes ved Anvendelse af de ovenfor angivne Talstørrelser

$$\begin{aligned}(K^2\,Cr^2\,O^7\,Aq,\ 4\,SO^3\,Aq) &= 49320^c + 31290^c - 26268^c - 12436^c \\ &= 41906^c\end{aligned}$$

Med Syrens Concentration varierer her som i alle lignende Tilfælde Varmeudviklingen. Som Exempel skal jeg her beregne, hvilken Varmeudvikling der indtræder, naar tørt tvechromsuurt Kali sønderdeles med Svovlsyre af Sammensætningen $SO^4H^2 + 5H^2O$, hvori der netop indeholdes den til Dannelsen af Chromalun med 24 Moleculer Vand fornødne Vandmængde. Man har da

$$(K^2\,Cr^2\,O^7,\ 4\,\dddot{S}\,\dot{H}^6_2) = \begin{cases}(K^2\,Cr^2\,O^7,\ Aq) + 4\,(\dddot{S}\,\dot{H}^6_2,\ Aq) + (K^2\,Cr^2\,O^7\,Aq,\ 4\,SO^3\,Aq) \\ \qquad - (\dot{K}_2\,\ddot{Cr}_2\,\dddot{S}^4\,\dot{H}^{24}_2,\ Aq).\end{cases}$$

Indføres her de tidligere fundne Tal for de 4 Reactioner paa Ligningens høire Side, findes

$$\begin{aligned}(K^2\,Cr^2\,O^7,\ 4\,\dddot{S}\,\dot{H}^6_2) &= -17032^c + 4\,.\,4766^c + 41906^c + 22300^c \\ &= 66238^c.\end{aligned}$$

Paa lignende Maade udføres alle Beregninger af denne Art.

H. Brintoverilte.

16. En vandig Opløsning af Brintoverilte fremstilles lettest i reen Tilstand paa følgende Maade. Man renser først Baryumoveriltet paa bekjendt Maade ved Opløsning i Chlorbrintesyre og Bundfældning med Barytvand. Det paa denne Maade dannede krystallinske Baryumoverilte sættes, efterat det paa et Filter er fuldstændigt udvasket, lidt efter lidt til fortyndet Svovlsyre, indtil den sure Reaction er forsvundet. Det gjælder her om, at der ikke tilsættes noget Overskud af Baryumoverilte, da i saa Tilfælde Brintoveriltet let sønderdeles; den sidste Del Baryumoverilte maa derfor tilsættes i smaa Portioner under stærk Omrøring, saaledes at det bliver fuldstændigt blandet med Vædsken. Den udskilte svovlsure Baryt synker temmelig hurtigt, og Vædsken lader sig let filtrere. Naar der bliver et ganske lidet Overskud af Svovlsyre tilbage, hvilket i de fleste Reactioner er uden Betydning, kan Brintoveriltet i meget lang Tid opbevares i vandig Opløsning.

Opløsningens Styrke kan bestemmes med Tinforchlor eller manganoversuurt Kali. Med Tinforchlor skeer Bestemmelsen paa den Maade, at Brintoveriltet blandes med et lille Overskud af Tinforchlor, og Mængden af dette Overskud bestemmes med manganoversuurt Kali. Den directe Analyse med manganoversuurt Kali, som er den Fremgangsmaade, der gaaer hurtigst fra Haanden, udføres saaledes, at man til en suur Opløsning af Brintoverilte sætter en titreret Opløsning af manganoversuurt Kali, saalænge dette affarves; for hvert Molecul Brintoverilte afgives 1 Molecul Ilt, saa at 5 Moleculer Brintoverilte svare til et Dobbeltmolecul manganoversuurt Kali eller $Mn^2 O^8 K^2$.

Brintoveriltets calorimetriske Reduction udførtes med Tinforchlor, saaledes at dette fuldstændigt iltedes og der blev et lidet Overskud af Brintoverilte udecomponeret tilbage. I hvert Forsøg anvendtes 450 Gram af Tinforchloropløsningen, hvis Molecul $Sn\,Cl^2 . H^2\,Cl^2\,Aq$ = 15231 Gram. Betegnelserne ere de samme som ovenfor, og Beregningsformlen er

$$R = [(t_c - t_b)(b + 8) + (t_c - t_a)\,a - 10] . \frac{15231}{450}.$$

Forsøgenes Enkeltheder ere følgende:

$(H^2\,O^2\,Aq,\ Sn\,Cl^2\,.\,H^2\,Cl^2\,Aq)$

Nr.	554	555
a	451 Gr.	451 Gr.
b	442 »	442 »
T	$18°,5$	$18°,5$
t_a	$17,845$	$17,980$
t_b	$18,200$	$17,990$
t_c	$20,890$	$20,840$
r	2573^c	2563^c
R	87090^c	86750^c

Middeltallet af disse to Bestemmelser er

$$R = 86920^c.$$

Den caloriske Reactionsformel er

$$R = (Sn\,Cl^2\,Aq,\ O,\ H^2\,Cl^2\,Aq) - (H^2\,O,\ O,\ Aq),$$

og man finder saaledes

$$86920^c = 63602^c - (H^2O,\ O,\ Aq)$$
$$(H^2\,O,\ O,\ Aq) = \div 23318^c.$$

Dette Tal stemmer med det tidligere af Favre og Silbermann fundne Tal $\div 23454^c$.

Af denne Størrelse kan nu paa bekjendt Maade Brintoveriltets Dannelsesvarme beregnes; man har nemlig

$$\begin{aligned}(H^2,\ O^2,\ Aq) &= (H^2,\ O) + (H^2\,O,\ O,\ Aq)\\ &= 68357 - 23318\\ &= 45039^c.\end{aligned}$$

Talstørrelserne for *Brintoveriltets* (*Hydroxylets*) Dannelse og Sønderdeling ere altsaa følgende:

$$\left.\begin{aligned}(H^2,\ O^2,\ Aq) &= 45039^c\\ (H^2O^2\,Aq,\ H^2) &= 91675\\ (H^2\,O,\ O,\ Aq) &= -23318\end{aligned}\right\}\ \text{Thomsen.}$$

J. Chlor og Brom.

17. Chlor kan ved calorimetriske Undersøgelser anvendes enten i Luftform eller opløst i Vand. Naar Chlorluft virker iltende ved at sønderdele Vandet, er Varmetoningen efter tidligere meddelte Resultater

$$2(Cl, H, Aq) - (H^2, O) = 78630^c - 68357^c = 10273^c.$$

Man kunde fremstille denne Reaction ved en enkelt Formel, nemlig

$$(H^2 O Aq, Cl^2) = 10273^c,$$

idet Indførelsen af Vandmoleculet ved Siden af Tegnet for en vilkaarlig Vangmængde skulde tyde paa, at her indtræder en Reaction og ikke simpelt hen en Opløsning i Vand, hvilket skulde betegnes ved (Cl^2, Aq).

Værdien for den sidstnævnte Reaction har jeg bestemt directe ved at lade Chlor indsuges af Vand. Calorimetret var det ovenfor beskrevne, dets indre Beholder en Platinkolbe, som rummede 1500 Cubikcentimetre. Mængden af opløst Chlor bestemtes som Chlorsølv; i Tabellen betegner x Chlormængden, udtrykt i Moleculer. Beregningen bliver, da der var 1000 Gram Vand tilstede, og da Calorimetrets Æqvivalent er 16 Gr.,

$$\frac{(t_b - t_a) \cdot 1016}{x} = R.$$

(Cl^2, Aq)

Nr.	556	557
T	18°,2	18°,4
t_a	17,975	18,350
t_b	18,275	18,505
x	0,06248	0,03240
R	4878 ^{c}	4861 ^{c}

Middeltallet af disse Resultater er

$$(Cl^2, Aq) = 4870^c.$$

Varmetoningen ved Chlorets Absorption i Vand er altsaa 4870^c; den har næsten samme Størrelse som den af mig tidligere bestemte Absorptionsvarme for Svovlbrinte

$$(SH^2, Aq) = 4750^c$$

og er noget mindre end Kulsyrens

$$(CO^2, Aq) = 5880^c.$$

Da nu

$$(Cl^2, Aq) + (Cl^2 Aq, H^2) = (Cl^2, H^2, Aq),$$

har man efter de ovenfor meddelte Talstørrelser

$$(Cl^2 Aq, H^2) = 73760^c,$$

hvilken Størrelse benyttes, naar Iltningen skeer med Chlorvand; man finder da

$$(H^2 O Aq, Cl^2 Aq) = (Cl^2 Aq, H^2) - (H^2, O) = 5403^c.$$

Med Hensyn til Anvendelsen af Brom som Iltningsmiddel har jeg i min Afhandling om Brintens Affinitet til Metalloiderne givet de fornødne Talstørrelser, og man har t. Ex.

$$(Br^2, H^2, Aq) - (H^2, O) = -11605^c$$
$$(Br^2 Aq, H^2) - (H^2, O) = -12683^c.$$

For Chlor og Brom som Iltningsmidler gjælde saaledes følgende Talstørrelser:

$$\left.\begin{array}{lcr}
(Cl^2, H^2, Aq) & = & 78630^c \\
(Cl^2, Aq) & = & 4870 \\
(Cl^2 Aq, H^2) & = & 73760 \\
(Cl^2, H^2, Aq) - (H^2 O) & = & 10273 \\
(Cl^2 Aq, H^2) - (H^2 O) & = & 5403 \\
(Br^2, H^2, Aq) & = & 56752 \\
(Br^2, Aq) & = & 1078 \\
(Br^2 Aq, H^2) & = & 55674 \\
(Br^2, H^2, Aq) - (H^2, O) & = & -11605 \\
(Br^2 Aq, H^2) - (H^2, O) & = & -12683.
\end{array}\right\} \text{Thomsen.}$$

I disse Formler betyde Cl^2 og Br^2 Chlorluft og flydende Brom, idet Stofferne altid tænkes i den Tilstandsform, hvori de findes under normale Forhold (Varmegrad og Tryk), saafremt ikke Andet er bemærket. Derimod betegnes naturligviis ved $Cl^2 Aq$ og $Br^2 Aq$ de to Stoffers vandige Opløsninger.

K. Sammenstilling og Anvendelse af Resultaterne.

18. Undersøgelsen omfatter 4 Reductionsmidler og 7 Iltningsmidler, hvormed man vil være istand til at udføre de fleste Reductions- og Iltningsprocesser paa den vaade Vei. Reductionsmidlerne ere

Svovlsyrling,
Svovlsuurt Jernforilte,
Jernforchlor,
Tinforchlor,

og Iltningsmidlerne

Chlor og Brom,
Chlorundersyrling,
Manganoversuurt Kali,
Manganoverilte,
Chromsyre og
Brintoverilte.

Til Bestemmelsen af disse Stoffers Reactionsconstanter tjene de i Tabel I anførte af mig udførte directe Bestemmelser. Den første Spalte indeholder de tilsvarende Forsøgs Numre, den anden Processens Betegnelse og den tredie den hertil svarende Varmeudvikling eller R.

Tabel I.

Forsøgsrækkernes directe Resultater.

No.	Processen.	R
526—528	$(SO^2 Aq, Cl^2)$	73907 [c]
532—536	$(2 Fe Cl^2 Aq, Cl^2)$	54810
537—539	$(2 Fe SO^4 Aq, Cl^2)$	47039
540—541	$(2 Fe Cl^2 . H Cl Aq, Cl O H Aq)$	55530
542—543	$(Sn Cl^2 . H Cl Aq, Cl O H Aq)$	74595
544—545	$(10 Fe Cl^2 . H^2 Cl^2 Aq, Mn^2 O^8 K^2 Aq)$	289280
546—547	$(5 Sn Cl^2 . H^4 Cl^4 Aq, Mn^2 O^8 K^2 Aq)$	328590
548—549	$(3 Mn SO^4 Aq, Mn^2 O^8 K^2 Aq)$	41040
550—551	$(\overline{\overline{Mn}} O, 2 Fe SO^4 . SO^3 Aq)$	44988
552—553	$(3 Sn Cl^2 . H^2 Cl^2 Aq, 2 Cr O^3 Aq)$	219560
554—555	$(Sn Cl^2 . H^2 Cl^2 Aq, H^2 O^2 Aq)$	86920
529—531	(SO^2, Aq)	7699
556—557	(Cl^2, Aq)	4870

Af disse Talstørrelser kan man nu med Anvendelse af nogle tidligere af mig bekjendtgjorte Resultater beregne de paagjældende Reactionsconstanter; jeg har ovenfor gjennemført en saadan Beregning og giver her kun en Sammenstilling af Resultaterne. Det er beqvemt for Reductionsmidlernes Vedkommende at have Reactionsconstanterne beregnede baade for Ilt og Chlor, for at man directe kan anvende dem i Beregningerne, og jeg har derfor optaget begge Rækker i nedenstaaende Tabel II.

Tabel II.

Reductionsmidlernes Reactionsconstanter.

Processen.	Q	
$(SO^2 Aq, Cl^2)$	73907^c	for 1 Mol. Chlor.
$(2 Fe Cl^2 Aq, Cl^2)$	54810	
$(2 Fe SO^4 Aq, Cl^2)$	47039	
$(Sn Cl^2 Aq, Cl^2$	73875	
$(SO^2 Aq, O)$	63634	for 1 Atom Ilt.
$(2 Fe Cl^2 Aq, O, H^2 Cl^2 Aq)$	44537	
$(2 Fe SO^4 Aq, O, SO^3 Aq)$	36800	
$(Sn Cl^2 Aq, O, H^2 Cl^2 Aq)$	63602	

Disse Tal finde Anvendelse paa følgende Maade. Naar et af disse Reductionsmidler anvendes for at optage Chlor eller Ilt fra et Stof, som indeholder Chlor eller Ilt, og Varmetoningen for hvert udskilt Molecul Chlor eller Atom Ilt er R, angives ved Q—R den Varmemængde, som er anvendt til Chlor- eller Iltforbindelsens Sønderdeling. Naar t. Ex. Tinforchlor virker paa et Overskud af Qviksølvtvechlor, bundfældes Qviksølvforchlor; Varmeudviklingen er pr. Molecul Tinforchlor med et rundt Tal $R = 36800^c$. Da nu Processen er følgende:

$$(Sn\, Cl^2 Aq,\, Cl^2) - (Hg^2 Cl^2,\, Cl^2,\, Aq) = R = 36800^c,$$

har man efter ovenstaaende Tal

$$Q - R = 73875^c - 36800^c = (Hg^2 Cl^2,\, Cl^2,\, Aq).$$

Eller lad Tinforchlor virke reducerende paa Brintoverilte; Varmeudviklingen er pr. Molecul Tinforchlor $R = 86920^c$; man har da

$$(Sn\, Cl^2 Aq,\, Cl^2) - (H^2 O,\, O,\, Aq) = R = 86920^c$$

$$Q - R = 63602^c - 86920^c = (H^2 O,\, O,\, Aq).$$

Vi have ovenfor allerede seet flere Exempler af samme Art.

19. *Iltningsmidlerne* virke paa meget forskjellig Maade, alt efter deres Natur. Chlor og Brom virke iltende ved at sønderdele Vandet, hvorved tillige dannes Brintesyrer; Chlorundersyrling, $Cl\,O\,H$, virker iltende, idet den gaaer over til Chlorbrintesyre; manganoversuurt Kali, Manganoverilte og Chromsyre anvendes sædvanligt i sure Vædsker, og Syren danner derved Salte; Brintoverilte derimod spalter sig ligefrem i Vand og Ilt. I den følgende Tabel er nu angivet den Varmetoning, som indtræder, naar disse Stoffer paa den omtalte Maade sønderdeles, idet de afgive Ilt. Den første Spalte indeholder Reactionsformlen, den anden den hertil svarende Varmeudvikling, den tredie det Antal Iltatomer, som blive disponible ved Reactionen, og den fjerde Spalte indeholder Varmetoningen beregnet for et Atom Ilt.

Tabel III.

Iltningsmidlernes Reactionsconstanter.

Reaction.	Q^1	Disponibel Ilt.	Q pr. 1 Atom Ilt.
$(Cl^2, H^2, Aq) - (H^2, O)$	10273^c	1	10273^c
$(Cl^2 Aq, H^2) - (H^2, O)$	5403	1	5403
$(Br^2, H^2, Aq) - (H^2, O)$	—11605	1	—11605
$(Br^2 Aq, H^2) - (H^2, O)$	—12683	1	—12683
$(Cl, H, Aq) - (Cl, O, H, Aq)$	10993	1	10993
$(Mn^2 O^8 K^2 Aq, 6 H\,Cl\,Aq)$	65587	5	13117
$(Mn^2 O^8 K^2 Aq, 3 SO^3 Aq)$	76437	5	15287
$(Mn^2 O^8 K^2 Aq, SO^3 Aq)$	63385	3	21128
$(\overline{\overline{Mn}}\, O, SO^3 Aq)$	6526	1	6526
$(2\, Cr\, O^3 Aq, 3 SO^3 Aq)$	36884	3	12295
$-(2 \overline{\overline{Mn}}\, O, O^3, 2 \overline{K} Aq)$	32095	3	10698
$-(2 \overline{\overline{Mn}}, O^5, 2 \overline{K} Aq)$	—7813	5	—1563
$-(\overline{\overline{Mn}}, O)$	—19954	1	—19954
$-(2\, Cr, O^3, Aq)$	—12436	3	—4145
$-(H^2 O, O, Aq)$	+23318	1	+23318

Disse Tals Betydning og Anvendelse er følgende. *Naar et Stof iltes med et af de her nævnte Iltningsmidler, bliver den Varmeudvikling, som ledsager Processen, for hvert virkende Iltatom saameget større end den Varmeudvikling, som vilde indtræde ved directe Optagning af Ilt, som den ved Q betegnede Størrelse angiver for hvert enkelt Iltningsmiddel. Naar den paa denne Maade udførte Iltningsproces giver R Varmeeenheder pr. Atom Ilt, da er R—Q den Varmeudvikling, som vilde svare til en Iltning med fri Ilt.* T. Ex. Chlor ilter en Opløsning af Svovlsyrling, og Forsøget viser

$$(SO^2 Aq, Cl^2) = 73907^c = R,$$

da er

$$(SO^2 Aq, O) = R - Q = 73907^c - 10273^c$$

Her bliver altsaa Varmeudviklingen ved Anvendelsen af Chlor som Iltningsmiddel 10273^c større end ved Iltning med fri Ilt. Havde man derimod anvendt Brom som Iltningsmiddel, vilde Varmen blive 11605^c mindre end den ved directe Iltning udviklede.

20. Reactionsconstanterne ere for samme Iltmængde af meget forskjellig Størrelse; det samme Stof giver altsaa ved Iltning med forskjellige Midler forskjellig Varmeudvikling. Størst bliver Varmetoningen, naar Brintoverilte anvendes som Iltningsmiddel, nemlig 23318^c større end ved directe Iltning; derefter kommer manganoversuurt Kali, naar det virker i suur Opløsning under Dannelsen af Manganoverilte eller Manganforiltesalt, o. s. v. Men heraf kan ikke sluttes, at det Iltningsmiddel, som giver den største Varmeudvikling, er bedst egnet til at frembringe Iltningen. I denne Henseende gjælder ingen saadan Regel, ialfald ikke ved den Varmegrad og Fortyndingsgrad, som maa vælges ved thermochemiske Forsøg. Man maa altsaa efter de forskjellige Stoffers Natur, som skulle iltes, anvende snart det ene, snart det andet Iltningsmiddel, helst et saadant, som virker hurtigt.

Det er en Selvfølge, at man altid ved saadanne Processer nøie maa undersøge, om de ved gjensidig Iltning og Reduction fremkomne Producter ikke indvirke paa hinanden; naar dette er Tilfældet, maa dette Forhold nøiagtigt bringes med i Beregning. Naar t. Ex. Chlor virker iltende paa svovlsyrligt Natron, danner sig svovlsuurt Natron og Chlorbrintesyre. Men Varmeudviklingen svarer ikke til denne Reaction, idet den frembragte Chlorbrintesyre reagerer paa det samtidigt dannede svovlsure Natron, og ved denne sidste Reaction indtræder efter mine Undersøgelser en stærk Varmeabsorption. Den fuldstændige Reactionsformel bliver altsaa

$$(Na^2 SO^3 Aq, Cl^2) = (Na^2 SO^3 Aq, O) + 10273^c + (Na^2 SO^4 Aq, 2 H Cl Aq).$$

Saafremt man udelod det sidste Led, som udgjør -2494^c, vilde der begaaes en betydelig Feil i Bestemmelsen af Reactionen $(Na_2 SO^3 Aq, O)$.

Blandt den store Mængde Bestemmelser, jeg tidligere har bekjendtgjort, vil man for de fleste Tilfælde finde de til denne Correction hørende Talstørrelser. Men saafremt Beregningen af en Reaction fordrer Kjendskab til andre Reactioner end de af mig bekjendtgjorte eller dem, som heraf kunde udledes, maa saadanne Talstørrelser selvfølgeligt bestemmes ved særlige Forsøg.

Tillæg.

Affinitetens Størrelse som Multiplum af en fælles Constant.

21. Allerede for 20 Aar siden har jeg — i Poggendorffs Annalen Bd. 92 S. 44 — gjort opmærksom paa, at Varmeudviklingen ved de chemiske Processer i mange Tilfælde fremtræder som simple Multipla af fælles Constanter. I en nyere Meddelelse i Videnskabernes Selskabs Oversigter, 1872 p. 22, har jeg atter omtalt dette Phænomen og anført et større Antal chemiske Processer, hvor Varmetoningerne ere Multipla af en fælles Størrelse, omtrent 18000^c.

De i nærværende Afhandling indeholdte Resultater give nu mange Støttepunkter for den først af mig med Sikkerhed paaviste Kjendsgjerning, at *Varmetoningen ved de chemiske Reactioner, naar disse have en analog Character, fremtræde som Multipla af en fælles Constant.* Af den nævnte Afhandling skal jeg exempelviis anføre nogle Reactioner og sammenligne dem med de Resultater, som lade sig udlede af nærværende Arbeide. Man har t. Ex.

$$\left\{\begin{array}{lcl} (N^2O^2,\ O,\ Aq) & = & 2.18170^c \\ (N^2O^2,\ O^2,\ Aq) & = & 3.18214 \\ (N^2O^2,\ O^3,\ Aq) & = & 4.18235 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} (Cu,\ O,\ SO^3Aq) & = & 3.18705 \\ {}^*(Pb,\ O,\ SO^3Aq) & = & 4.18888 \\ (Fe,\ O,\ SO^3Aq) & = & 5.18772 \\ (Cd,\ O,\ SO^3Aq) & = & 3.18094 \\ (Zn,\ O,\ SO^3Aq) & = & 6.18077 \\ (Mg,\ O,\ SO^3Aq) & = & 10.18092 \end{array}\right.$$

Som man let vil see af Formlerne, danner sig i disse Reactioner vandige Opløsninger af de forskjellige Producter, og for Ledene i hver Række er Dannelsesmaaden den samme. Som jeg allerede har udviklet i min første Afhandling i Poggendorffs Annaler (Bd. 92), betragter jeg nemlig den stærkt fortyndede vandige Opløsning som en Tilstandsform for Stofferne, i hvilken de i physisk-chemisk Henseende kunne sammenlignes ligesom i den luftformige Tilstand. — Af nærværende Afhandling kan man nu finde lignende Forhold.

Ovenfor er beregnet den Varmeudvikling, som indtræder, naar et Molecul Brint optages af Chlorvand, Bromvand eller Hydroxylvand, hvorved der dannes de tilsvarende Brintforbindelser; man har

$$(Br^2 Aq, H^2) = 55654^c = 3.18551^c$$
$$(Cl^2 Aq, H^2) = 73764 = 4.18441$$
$$(H^2 O^2 Aq, H^2) = 91675 = 5.18335$$

Reactionen er her analog i alle tre Tilfælde, idet de tre Radicaler Brom, Chlor og Hydroxyl forbinde sig med Brint; Varmeudviklingen forholder sig som 3:4:5, og den fælles Constant er netop den samme, som jeg tidligere har fundet.

I en anden Gruppe af Reactioner optages et Molecul Chlor af en vandig Opløsning af Jernforchlor, Tinforchlor eller Svovlsyrling; efter det ovenfor Udviklede er

$$(2 Fe\, Cl^2 Aq, Cl^2) = 54810^c = 3.18270^c$$
$$(Sn\, Cl^2 Aq, Cl^2) = 73875 = 4.18469$$
$$(SO^2 Aq, Cl^2) = 73907 = 4.18477$$

Til denne Gruppe kunde jeg endnu føie flere Led efter mit endnu ikke bekjendtgjorte Materiale, men jeg foretrækker senere at komme tilbage hertil, naar jeg har bekjendtgjort de paagjældende Afsnit.

Et lignende Forhold vise følgende 3 Reactioner:

$$(2 Fe\, SO^4 Aq, O, SO^3 Aq) = 36800^c = 2.18400^c$$
$$(2\, Cr\, O^3 Aq, 3\, SO^3 Aq) = 36884 = 2.18442$$
$$(Mn^2 O^7 Aq, 2\, SO^3 Aq) = 72647 = 4.18162$$

I den første Reaction omdannes svovlsuurt Jernforilte med Ilt og Svovlsyre til svovlsuurt Jerntveilte; denne Reaction er analog med Jernforchlorets Omdannelse med Chlor; Varmetoningerne forholde sig i disse 2 Processer som 2:3. I de to andre Reactioner omdannes paa den ene Side Chromsyre, paa den anden Side Manganoversyre med Svovlsyre til normale Sulphater under Udvikling af Ilt. Varmeudviklingen ved disse to Reactioner forholder sig som 2:4, og den fælles Constant er den samme som før.

Endnu skal jeg kun omtale det bekjendte og meget interessante Phænomen, at Brintoverilte og Manganoversyre gjensidigt reducere hinanden under Udvikling af fri Ilt. Naar disse Stoffer virke paa hinanden i vandig Opløsning under Medvirkning af en Syre t. Ex. Svovlsyre eller Chlorbrintesyre, udvikles der for hvert Molecul Manganoversyre 5 Moleculer eller 10 Atomer Ilt, idet der samtidigt dannes svovlsuurt Manganforilte eller Manganforchlor. Varmetoningen ved denne Reaction er selvfølgeligt noget afhængig af den benyttede Syre og maa altsaa være forskjellig eftersom det er Svovlsyre eller Chlorbrintesyre, som er tilstede; den udgjør i disse to Tilfælde

$$(Mn^2 O^7 Aq, 5 H^2 O^2 Aq, 2 SO^3 Aq) = 189237^c = 10.18924^c$$
$$(Mn^2 O^7 Aq, 5 H^2 O^2 Aq, 2 Cl^2 H^2 Aq) = 182177 = 10.18218.$$

Der udvikles 10 Atomer eller 5 Moleculer Ilt, og Varmeudviklingen udgjør 10 Gange Størrelsen af den ofte omtalte Constant.

Da Middeltallet af den fælles Factor for Varmeudviklingens Størrelse i de her omtalte 12 Reactioner bliver 18427^c, medens det for de af mine tidligere Afhandlinger citerede 9 Reactioner udgjør 18361^c, kan man næppe tvivle om, at jo Constanten i alle disse Tilfælde maa betragtes som den samme Størrelse, tilmed da der næppe kan ventes nogen fuldstændig Ligestorhed for disse Tal ligesaa lidt som for de øvrige physisk-chemiske Constanter.

En Sætning om den Eulerske Faktor svarende til Differentialligningen

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

hvor M og N ere algebraiske Funktioner af x og y.

Af

cand. mag. **P. C. V. Hansen.**

Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10 B. VI.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1873.

Liouville har i Journ. de l'école polyt. cah. 22 & 23 og i Journ. des math. tome II og IV meddelt en Række Undersøgelser angaaende Integration af explicite Differentialer og Differentialligninger, idet han som Grundlag har benyttet den af ham selv angivne Theori om Funktionernes Inddeling. Skønt denne Theori er overordenlig simpel, er det dog lykkedes ved dens Hjælp at bevise et ikke ringe Antal Sætninger, af hvilke nogle vel tidligere vare bekjendte, medens andre derimod ere nye.

Det er de af Liouville anvendte Methoder, som nedenfor ere benyttede til at finde de simpleste Former for de Funktioner, som tilfredsstille den partielle Differentialligning, der definerer den Eulerske Faktor svarende til visse totale Differentialligninger mellem 2 Variable, og af første Orden.

Her anføres de af hans Sætninger og Betegnelser, som i det Følgende ville blive benyttede.

Man kalder y *en algebraisk Funktion af* x, hvis y er Rod i en algebraisk Ligning af Formen

$$U = y^{\mu} + q_1 y^{\mu-1} + q_2 y^{\mu-2} + \dots q_{\mu-1} y + q_{\mu} = 0, \tag{1}$$

hvor $q_1, q_2, q_3 \dots q_{\mu}$ ere rationale Funktioner af x.

Dersom Ligningen kan opløses med Hensyn til y, kan y fremstilles som en *explicit* algebraisk Funktion af x; er dette ikke Tilfældet, er y given *implicite* som Funktion af x.

Det vil altid være tilladt at antage om (1), at den er *irreduktibel*, d. v. s., at det samme y ikke kan være Rod i nogen anden Ligning af lavere Grad med rationale Koefficienter i x.

Hvis (1) er irreduktibel, vil en Ligning som

$$q'_0 y^{\mu-1} + q'_1 y^{\mu-2} + \dots q'_{\mu-2} y + q'_{\mu-1} = 0,$$

hvor $q'_0, q'_1 \dots$ ere rationale Funktioner af x, kun kunne existere, hvis den er identisk, d. v. s., hvis

$$q'_0 = 0, \quad q'_1 = 0, \dots \quad q'_{\mu-1} = 0.$$

Dersom den ved den irreduktible Ligning (1) *bestemte Funktion y ogsaa er Rod i en anden algebraisk Ligning*

$$f(y) = 0,$$

som enten er af samme Grad eller af højere Grad end (1) *og ligeledes har rationale Koefficienter* i x, *saa maa alle de andre Rodder i* (1) *ogsaa tilfredsstille Ligningen*

$$f(y) = 0.$$

Man kan let overbevise sig om, at hvad der her er sagt under Forudsætning af, at y kun er Funktion af én uafhængig Variabel, gjælder ganske almindeligt ogsaa uden denne Indskrænkning.

Transcendent kaldes enhver Funktion, som ikke er algebraisk. Logarithmiske Funktioner og Exponentialfunktioner ere saadanne Transcendenter.

De transcendente Funktioner kunne ligesom de algebraiske være givne enten *explicite* eller *implicite.* I det Følgende tages kun Hensyn til de explicite givne Transcendenter. Disse deles i Transcendenterne af 1ste, 2den, 3die, ... $n$te Orden; en explicite given transscendent Funktion er af 1ste Orden, hvis dens Udtryk kan skrives ved en Kombination af algebraiske Funktioner med saadanne Transcendenter, som have algebraiske Funktioner til uafhængige Variable. Skal en explicite given Transcendent være af 2den Orden, maa den indeholde transcendente Funktioner af Transcendenter af første Orden, og den kan desuden indeholde baade algebr. Funktioner og Transcendenter af 1ste Orden. I Almindelighed vil en explicite given Transcendent være af $n$te Orden, hvis der i dens Udtryk indgaar transcendente Funktioner af Transcendenter af Ordenen n—1.

En Transcendent kaldes *monom*, hvis den kun bestaar af et enkelt Led. Saaledes er

$$l\,(1 + e^{\sqrt{x}} + l\,(1 + x))$$

en monom Logarithme af 2den Orden.

Lad

$$U = f(\theta, \eta, \ldots \zeta)$$

være en Transcendent af $n$te Orden, idet f er en algebraisk Funktion af de monome Transcendenter θ, η, ... ζ af $n$te Orden. Funktionen f kan desuden indeholde baade algebraiske Funktioner og Transcendenter af lavere Ordner. Dersom Antallet af Transcendenter af $n$te Orden er reduceret saa meget som muligt, maa enhver Ligning mellem dem være identisk med Hensyn til de nævnte Størrelser. Dersom derfor en eller anden Regning har ført til en Ligning mellem de nævnte Funktioner, saaledes at der i Ligningen ikke forekommer andre Transcendenter af $n$te eller højere Orden, maa θ, η, ... ζ kunne erstattes ved vilkaarlige Bogstaver.

1.

I Differentialligningen

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

antages M og N at være hele rationale Funktioner af x og y. Den til Ligningen hørende Eulerske Faktor φ skal som bekjendt tilfredsstille følgende Differentialligning:

$$M\frac{d\varphi}{dy} - N\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0. \tag{2}$$

Det skal først undersøges, af hvad Beskaffenhed φ maa være, hvis den er en algebraisk Funktion af x og y. I saa Tilfælde skal den være Rod i en algebraisk Ligning af Formen:

$$\Phi = \varphi^m + q_1\,\varphi^{m-1} + q_2\,\varphi^{m-2} + \ldots\ldots\; q_{m-1}\,\varphi + q_m = 0, \tag{3}$$

hvis Koefficienter ere rationale Funktioner af x og y. Det er altid tilladt at antage om denne Ligning, at den er irreduktibel. Differentiation af (3) giver:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} &= 0, \\ \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Phi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dy} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Man eliminerer nu $\frac{d\varphi}{dx}$ og $\frac{d\varphi}{dy}$ mellem (2) og (4). Derved udkommer der en ny algebraisk Ligning i φ med rationale Koefficienter; vi betegne den nye Ligning ved

$$\Phi_1 = 0. \tag{5}$$

Den Rod i (3), som tilfredsstiller (2), maa gjøre (5) identisk. Da saaledes (3) og (5) have én Rod fælles, maa, eftersom (3) er irreduktibel, ogsaa alle andre Rødder i (3) tilfredsstille (5), *og altsaa maa samtlige Rødder i (3) være partikulære Integraler i (2).*

Betegnes en hvilkensomhelst af disse Rødder ved φ_r, skal man altsaa have:

$$M\frac{d\varphi_r}{dy} - N\frac{d\varphi_r}{dx} + \varphi_r\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Denne Ligning multipliceres med $\mu \varphi_r^{\mu-1}$, hvor μ er et positivt helt Tal. Derved erholdes:

$$M \frac{d\varphi_r^\mu}{dy} - N \frac{d\varphi_r^\mu}{dx} + \mu \varphi_r^\mu \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0. \tag{6}$$

Betegnes nu ved

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{r-1}, \varphi_{r+1}, \ldots \varphi_m$$

de andre Rødder i (3), saa kan man af (6) let udlede:

$$M \frac{dS_\mu}{dy} - N \frac{dS_\mu}{dx} + \mu S_\mu \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0, \tag{7}$$

hvor

$$S_\mu = \sum_{r=1}^{r=m} \varphi_r^\mu.$$

Man ser altsaa, at S_μ og φ_r^μ tilfredsstille den samme Differentialligning. S_μ er er en rational Funktion af x og y, og dersom Ligningen (3) overhovedet existerer, maa der altid være mindst én Værdi af S_μ, som er forskjellig fra Nul, idet man lader μ gjennemløbe de positive hele Værdier fra 1 til m. Kan man altsaa for μ og S_μ finde Værdier af den ovennævnte Beskaffenhed, som tilfredsstille (7), saa kan man som Integrationsfaktor tage

$$\varphi = \sqrt[\mu]{S_\mu}. \tag{8}$$

Den praktiske Udførelse af Beregningerne kan undertiden lettes ved følgende Betragtning. Det vil kunne indtræffe, at den rationale Funktion S_μ er en Potens (med pos. eller neg. hel Exponent) af en anden rational Funktion k. Lad os derfor sætte:

$$S_\mu = k^n, \quad \frac{\mu}{n} = r.$$

Da bliver (7) til:

$$M \frac{dk}{dy} - N \frac{dk}{dx} + rk \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0, \tag{9}$$

og af (8) faar man:

$$\varphi = \sqrt[r]{k},$$

i hvilke Ligninger altsaa k er rational, r positiv eller negativ, hel eller brudden. Dersom (9) kan tilfredsstilles derved, at man for k indsætter en hel Funktion, faar man φ bestemt som en Rod af en Brøk med 1 til Tæller, hvis r er negativ, og som en Rod af en hel Funktion, hvis r er posisiv.

Dette kommer f. Ex. til Anvendelse, naar man søger Integrationsfaktoren til Ligningen:

$$a^2 + xy + y^2 - (a^2 + xy + x^2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

(Tidsskr. for Math., 2den Række, 2den Aargang, Side 18).

Man har her:

$$M = a^2 + xy + y^2, \quad N = -(a^2 + xy + x^2).$$

Man søger (9) tilfredsstillet ved et helt k og sætter derfor:

$$k =$$
$$a_0$$
$$+ a_1 x + b_1 y$$
$$+ a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2$$
$$+ a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 x y^2 + e_3 y^3 + \dots \text{ osv.}$$

Koefficienterne maa da tilfredsstille følgende Betingelser:

$$a_1 + b_1 = 0. \quad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 b_2 + 2a^2 a_2 + 3r a_0 &= 0, \\ a^2 b_2 + 2a^2 c_2 + 3r a_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 b_3 + 3a^2 a_3 + a_1 (1 + 3r) &= 0, \\ 2a^2 c_3 + 2a^2 b_3 &= 0, \\ a^2 c_3 + 3a^2 e_3 + b_1 (1 + 3r) &= 0. \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

Betingelsen (I) hidrører fra det konstante Led i (9), Betingelserne (II) fra Leddene af første Grad, Betingelserne (III) fra Leddene af 2den Grad. Alle de øvrige Betingelsesligninger ere opfyldte ved at sætte lig Nul Koefficienterne til Leddene af 2den og højere Grad i k. Under denne Forudsætning faar man af de ovenstaaende Ligninger

$$r = -\frac{1}{3}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = -b_1,$$

saa at Integrationsfaktoren er:

$$\varphi = \frac{1}{(x-y)^3}.$$

Hvis man medtager de Betingelser, som hidrøre fra Led af 3die og 4de Orden i (9), og tilfredsstiller de øvrige ved at antage k for at være af 3die Grad, faar man:

$$\left.\begin{aligned} a^2 b_4 + 4a^2 a_4 + 2a_2 + 3r a_2 &= 0, \\ 2a^2 c_4 + 3a^2 b_4 + 2b_2 + 2a_2 + 3r a_2 + 3r b_2 &= 0, \\ 3a^2 e_4 + 2a^2 c_4 + 2b_2 + 2c_2 + 3r b_2 + 3r c_2 &= 0, \\ 4a^2 f_4 + a^2 e_4 + 2c_2 + 3r c_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 b_5 + 5a^2 a_5 + 3(r+1) a_3 &= 0, \\ 2a^2 c_5 + 4a^2 b_5 + 3(r+1)(b_3 + a_3) &= 0, \\ 3a^2 e_5 + 3a^2 c_5 + 3(r+1)(b_3 + c_3) &= 0, \\ 4a^2 f_5 + 2a^2 e_5 + 3(r+1)(c_3 + e_3) &= 0, \\ 5a^2 g_5 + a^2 f_5 + 3(r+1) e_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \text{(V)}$$

Da k antages at være af 3die Grad, reduceres Systemet (V) til

$$r = -1.$$

Af (IV) faar man

$$a_2 = b_2 = c_2 = 0.$$

Systemerne (I), (II), (III) give:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = -a_1, \quad b_3 = -3a_3 + \frac{2a_1}{a^2}, \quad c_3 = 3a_3 - \frac{2a_1}{a^2}, \quad e_3 = -a_3.$$

a_1 og a_3 blive arbitrære. Altsaa har man et System af Integrationsfaktorer bestemte ved

$$\varphi = \frac{1}{a_1(x-y) + a_3(x-y)^3 + \frac{2a_1}{a^2} xy(x-y)}.$$

For $a_1 = 0$ faar man én Faktor bestemt ved:

$$\varphi_1 = \frac{1}{(x-y)^3}.$$

For $a_3 = 0$ finder man en anden Faktor:

$$\varphi_2 = \frac{a^2}{(x-y)(a^2 + 2xy)}.$$

Den forelagte Differentialligning har derfor det fuldstændige Integral

$$\frac{(x-y)^2}{a^2 + 2xy} = C.$$

2.

De Tilfælde, hvor k er en brudden Funktion, hvis Tæller ikke er 1, ere som oftest meget vidtløftige at behandle ved de ubekjendte Koefficienters Methode. Dog kan det undertiden lykkes at reducere Bestemmelsen af et saadant k til Bestemmelsen af en hel Funktion.

Det kan bevises, at hvis k har Formen

$$k = \frac{L}{XY},$$

hvor L er en hel Funktion, som kan indeholde baade x og y, medens X og Y, der ligeledes ere hele Funktioner, indeholde den ene x, den anden y alene, saa maa Y have Faktorer fælles med M og X med N. Sætter man:

$$\frac{dX}{dx} = X', \quad \frac{dY}{dy} = Y',$$

faar man

$$\frac{dk}{dy} = \frac{Y\frac{dL}{dy} - LY'}{XY^2}, \quad \frac{dk}{dx} = \frac{X\frac{dL}{dx} - LX'}{X^2 Y}.$$

Indsætter man dette i (9), finder man efter Multiplikation med $X^2 Y$

$$\frac{MX\left(Y\frac{dL}{dy} - LY'\right)}{Y} - N\left(X\frac{dL}{dx} - LX'\right) + rLX\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Her maa

$$\frac{MX\left(Y\frac{dL}{dy} - LY'\right)}{Y}$$

være en hel Funktion, ligesom Tilfældet er med den øvrige Del af Ligningens venstre Side.

Y tør altid antages ikke at have Faktorer fælles med L; derimod ville Y og Y' have Faktorer fælles, saasnart Ligningen $Y = 0$ har lige Rødder. Indeholder Y en Faktor af Formen $(y-a)^p$, kan Brøken forkortes med $(y-a)^{p-1}$, hvorefter $y-a$ vil være Faktor i Nævneren, og $y-a$ maa da gaa op i M. Indeholder $Y = 0$ ingen ligestore Rødder, maa det hele Polynomium Y gaa op i M. Paa samme Maade kan det vises, at Primfaktorerne i X maa forekomme i N. Hvis derfor M indeholder en Faktor, som er Funktion af y alene, og N en Faktor, som er Funktion af x alene, saa vil der være Anledning til at prøve paa at tilfredsstille Faktorens Differentialligning ved at sætte:

$$k = \frac{L}{XY},$$

hvor L, X, Y, have den her omtalte Beskaffenhed.

Hvis man for at integrere Differentialligningen

$$(y^2 - 1)(2x^2y + 4y + x) + (x^2 + 1)(2xy^2 - 4x + y)\frac{dy}{dx} = 0$$

sætter

$$k = \frac{L}{(x^2+1)(y^2-1)},$$

finder man Faktoren

$$\varphi = \frac{1}{(y^2-1)(x^2+1)\sqrt[4]{(y^2-1)(x^2+1)}}.$$

Det fuldstændige Integral bliver

$$\frac{2xy - 1}{\sqrt[4]{(x^2+1)(y^2-1)}} = C.$$

Hvis man for at integrere Differentialligningen

$$(2x-y)(y+1)+x(2y-x+3)\frac{dy}{dx}=0$$

sætter

$$k=\frac{L}{x(y+1)},$$

finder man baade Faktoren

$$\frac{(x+y)^2}{x^2\,(y+1)^2}$$

og Faktoren

$$\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}\,(y+1)^{\frac{4}{3}}}.$$

Altsaa er det fuldstændige Integral

$$\frac{(x+y)^3}{x(y+1)}=C.$$

3.

Det skal nu undersøges, hvorvidt Integrationsfaktorens Differentialligning

$$M\frac{d\varphi}{dy}-N\frac{d\varphi}{dx}+\varphi\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0$$

kan tilfredsstilles ved for φ at indsætte en transcendent Funktion af x og y. Lad

$$\theta=l.u$$

være en logarithmisk Transcendent af n^{te} Orden, saa at u altsaa er transcendent af Ordnen $n-1$. Vi sætte da

$$\varphi=F(x,y,\theta),$$

hvor F er en algebraisk Funktion af x og y, af Transcendenter af lavere Orden end den n^{te}, af θ og muligvis endnu andre Transcendenter af n^{te} Orden, som vi foreløbig intet Hensyn tage til; men hvis Antal antages reduceret til det mindst mulige. Forsaavidt der gives flere Integrationsfaktorer, som kunne udtrykkes ved bekjendte Funktioner af x og y, ville vi antage, at $\varphi=F(x,y,\theta)$ er den, som er den simpleste. Sætter man:

$$\frac{d\varphi}{dx}=F_2,\quad \frac{d\varphi}{dy}=F_1,$$

saa skal man altsaa have:

$$MF_1(x,y,\theta)-NF_2(x,y,\theta)+F(x,y,\theta)\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0.$$

Denne Ligning skal være identisk, selv om man for θ indfører $\theta+\mu$, hvor μ er en arbitrær Konstant, saa at man ogsaa skal have:

$$MF_1(x,y,\theta+\mu)-NF_2(x,y,\theta+\mu)+F(x,y,\theta+\mu)\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0. \qquad (10)$$

Men den samme Ligning vilde fremkomme ved i (2) at sætte

$$\varphi=F(x,y,\theta+\mu)$$

Hvis altsaa $F(x, y, \theta)$ er en Integrationsfaktor, saa er $F(x, y, \theta + \mu)$ det ogsaa. Ved at differentiere (10) m. H. t. μ og bagefter sætte $\mu = 0$, vil man se, at de partielle Differentialkoefficienter af F m. H. t. θ, som vi her ville betegne ved:

$$F_\theta'(x, y, \theta),\quad F_\theta''(x, y, \theta),\ \ldots\ldots$$

alle ere Integrationsfaktorer, hvis $F(x, y, \theta)$ er det. Forholdet mellem $F(x, y, \theta)$ og $F_\theta'(x, y, \theta)$ kan ikke være uafhængigt af θ. Betegner man nemlig med A en Funktion af x og y, som ikke indeholder θ og ikke indeholder Transcendenter af højere Orden end den n^{te}, og man sætter:

$$F_\theta'(x, y, \theta) = A\,F(x, y, \theta),$$

saa vil det være tilladt i denne Ligning at erstatte θ ved en vilkaarlig Størrelse i. Altsaa har man:

$$\frac{d F(x, y, i)}{di} = A\,F(x, y, i).$$

Er nu i_0 en speciel Værdi af i, saa følger heraf

$$F(x, y, i) = F(x, y, i_0)\, e^{A(i - i_0)}.$$

Men den ene Side af denne Ligning er m. H. t. i en algebraisk Funktion, den anden en Exponentialfunktion, og Ligningen indeholder altsaa en Urimelighed. Striden kan ikke hæves ved at gjøre A til Nul, thi da blev $F(x, y, \theta)$ uafhængig af θ.

Heller ikke kan man have

$$\frac{F_\theta''(x, y, \theta)}{F_\theta'(x, y, \theta)} = B,$$

hvor B er uafhængig af θ. Thi ogsaa her vilde det være tilladt at erstatte θ ved et vilkaarligt Bogstav i, saa at man fik:

$$\frac{d^2 F(x, y, i)}{di^2} - B\,\frac{d F(x, y, i)}{di} = 0.$$

Men heraf vilde følge:

$$F(x, y, i) = \alpha\, e^{B i} + \beta,$$

hvor α og β ere uafhængige af i; men denne Ligning er urimelig. Resultatet gjælder ikke, hvis $B = 0$, i hvilket Tilfælde man faar:

$$F_\theta'(x, y, \theta) = \gamma,$$

hvor γ ikke indeholder θ. Da nu $F_\theta'(x, y, \theta)$ er en Integrationsfaktor ligesaa vel som $F(x, y, \theta)$, saa ser man, at Antagelsen

$$F_\theta''(x, y, \theta) = 0$$

medfører den Konsekvens, at der maa være Faktorer, som indeholde et ringere Antal Tran-

scendenter end $F(x, y, \theta)$, hvilket strider mod den Antagelse, vi her ere gaaede ud fra.

Da Forholdet mellem $F(x, y, \theta)$ og $F_\theta'(x, y, \theta)$ ikke kan være uafhængigt af θ, kan det heller ikke være identisk lig en Konstant, og altsaa maa:

$$\frac{F(x, y, \theta)}{F_\theta'(x, y, \theta)} = \text{Konstant}$$

være det fuldtændige Integral af den forelagte Ligning. Alle andre Integrationsfaktorer kunne udledes af de to ovenfor nævnte, og man maa f. Ex. have:

$$F_\theta''(x, y, \theta) = F_\theta'(x, y, \theta)\, \psi\left(\frac{F_\theta'(x, y, \theta)}{F(x, y, \theta)}\right),$$

hvor ψ er en ubekjendt Funktion. Men da

$$\frac{F_\theta'(x, y, \theta)}{F(x, y, \theta)} \quad \text{og} \quad \frac{F_\theta''(x, y, \theta)}{F_\theta'(x, y, \theta)}$$

begge indeholde θ, og begge ere algebraiske Funktioner af θ, saa maa ψ være et algebraisk Funktionstegn, da Ligningen ellers er urimelig.

Altsaa maa det være tilladt at erstatte θ ved et vilkaarligt Bogstav i. Man faar da:

$$\frac{d^2 F}{di^2} = \frac{dF}{di}\psi\left(\frac{\frac{dF}{di}}{F}\right) \tag{11}$$

Ved her at sætte

$$\frac{dF}{di} = p,$$

faar man

$$\frac{dp}{dF} = \psi\left(\frac{p}{F}\right).$$

Her sættes

$$\frac{p}{F} = z,$$

hvorved erholdes:

$$\frac{dz}{\psi - z} = \frac{dF}{F}.$$

Man faar ved Integration:

$$C_1 F = \psi_0(z), = \psi_0\left(\frac{C_1 p}{C_1 F}\right),$$

idet

$$\psi_0(z) = e^{\int\frac{az}{\psi - z}},$$

og C_1 er en af i uafhængig Størrelse.

Oploses denne Ligning m. H. t. $C_1 p$, erholder man en Ligning af Formen:

$$C_1 \frac{dF}{di} = \psi_1 (C_1 F), \tag{12}$$

hvor ψ_1 er en ny algebraisk Funktion. Denne Ligning er en af de fuldstændige Differentialligninger af første Orden, som tilfredsstiller (11); men da det kunde tænkes, at der til (11) ogsaa kunde svare en anden Differentialligning af første Orden, der tilfredsstillede den som en partikulær Oplosning, saa differentierer man (12) m. H. t. C_1, hvilket giver

$$\frac{dF}{di} = F \psi_1' (C_1 F).$$

Kombination af denne Ligning med (12) giver

$$C_1 F \psi_1' (C_1 F) = \psi_1 (C_1 F),$$

hvoraf man udleder

$$C_1 F = \alpha,$$

hvor α er en Konstant. Altsaa er den søgte partikulære Opløsning

$$\alpha \frac{dF}{di} = F \psi_1 (\alpha).$$

Men da

$$\frac{F_\theta' (x, y, \theta)}{F (x, y, \theta)}$$

ikke kan være uafhængig af θ, maa denne Opløsning forkastes.

Det fuldstændige Integral af (12) er af Formen

$$C_1 F = \chi (i + C_2), \tag{13}$$

hvor C_2 er en ny af i uafhængig Størrelse.

Vil man have den partikulære Opløsning til (12), maa man eliminere C_2 mellem (13) og

$$\chi' (i + C_2) = 0.$$

Men da man derved kommer til en Form for $F(x, y, \theta)$, som er uafhængig af θ, saa har denne Opløsning ingen Betydning i nærværende Sammenhæng. Med en lille Forandring i Betegnelsen kan (13) skrives

$$F = C_1 \chi (i + C_2),$$

saa at man har:

$$F (x, y, \theta) = C_1 \chi (\theta + C_2),$$

hvilken Formel bestemmer den Maade, hvorpaa θ indgaar i $F (x, y, \theta)$. χ maa være et algebraisk Funktionstegn. — Indsættes nu dette Resultat i Faktorens Bestemmelsesligning (2), saa finder man:

$$\left.\begin{array}{l} C_1\, \chi'\,(\theta + C_2) \left[M \dfrac{d\,(\theta + C_2)}{dy} - N \dfrac{d\,(\theta + C_2)}{dx}\right] \\ + \chi\,(\theta + C_2) \left[M \dfrac{d\,C_1}{dy} - N \dfrac{d\,C_1}{dx} + C_1 \left(\dfrac{d\,M}{dy} - \dfrac{d\,N}{dx}\right)\right] \end{array}\right\} = 0.$$

Men nu kan

$$\frac{\chi'\,(\theta + C_2)}{\chi\,(\theta + C_2)}$$

ikke være uafhængig af θ, og den ovenstaaende Ligning kan da alene bestaa, dersom Koefficienterne til χ' og χ blive Nul hver for sig. Altsaa maatte man have:

$$M \frac{d\,C_1}{dy} - N \frac{d\,C_1}{dx} + C_1 \left(\frac{d\,M}{dy} - \frac{d\,N}{dx}\right) = 0,$$

saa at C_1, der indeholder mindst én Transcendent af n^{te} Orden færre end F, maatte være Integrationsfaktor.

Som Resultat af disse Undersøgelser ses det da, *at den simpleste Integrationsfaktor aldrig kan indeholde en Logarithme blandt Transcendenterne af højest Orden.*

4.

Det skal derefter undersøges, hvorvidt Integrationsfaktorens Bestemmelsesligning kan tilfredsstilles, dersom man for φ indsætter

$$\varphi = F\,(x, y, \theta),$$

hvor nu

$$\theta = e^v$$

er en Exponentialfunktion af n^{te} Orden. F indeholder algebraisk andre monome Exponentialfunktioner af n^{te} Orden, Transcendenter af lavere Ordner og endelig algebraiske Funktioner af x og y.

Vi sætte som før:

$$\frac{d\varphi}{dy} = F_1\,(x, y, \theta), \quad \frac{d\varphi}{dx} = F_2\,(x, y, \theta).$$

Man har da:

$$M\,F_1\,(x, y, \theta) - N\,F_2\,(x, y, \theta) + F\,(x, y, \theta) \left(\frac{d\,M}{dy} - \frac{d\,N}{dx}\right) = 0.$$

Denne Ligning skal være identisk m. H. t. θ, og man kan derfor erstatte θ ved $\mu\theta$, hvor μ er en arbitrær Konstant. Derved erholder man:

$$M F_1(x, y, \mu\theta) - N F_2(x, y, \mu\theta) + F(x, y, \mu\theta)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0. \tag{14}$$

Men den samme Ligning vilde være udkommet, hvis man fra Begyndelsen af havde sat

$$\varphi = F(x, y, \mu\theta),$$

saa at denne Funktion er en Integrationsfaktor, hvis $F(x, y, \theta)$ er det. Ved at differentiere Ligningen (14) m. H. t. μ og derefter sætte $\mu = 1$, finder man desuden følgende nye Faktorer:

$$\varphi_1 = \theta F_\theta'(x, y, \theta),$$
$$\varphi_2 = \theta^2 F_\theta''(x, y, \theta).$$

Lad os antage, at Forholdet mellem φ og φ_1 var uafhængigt af θ og lig A, saa at man havde

$$\theta F_\theta'(x, y, \theta) = A F(x, y, \theta).$$

Det maatte da her være tilladt at erstatte θ ved et vilkaarligt Bogstav i, hvorefter Integration af Ligningen

$$i\frac{dF}{di} = AF \tag{15}$$

giver

$$F = \alpha i^A,$$

saa at:

$$F(x, y, \theta) = \alpha\theta^A. \tag{16}$$

I denne Ligning er α en af θ uafhængig Størrelse; men da venstre Side er en algebraisk Funktion af θ, maa højre Side være det samme, og dette finder kun Sted, hvis A er en rational Konstant. Men dersom A er en saadan Størrelse, er der foreløbig intet urimeligt i at antage Existensen af Faktorer af den ved (15) bestemte Form.

Dersom Forholdet mellem φ_2 og φ_1 var uafhængigt af θ og lig med B, vilde man paa lignende Maade let finde, at Funktionen F maatte have Formen:

$$F(x, y, \theta) = \alpha + \beta\theta^{B+1}, \tag{17}$$

hvor α og β ere uafhængige θ. Skal denne Ligning ikke indeholde en Urimelighed, maa B være en rational Konstant. Har man tillige $\alpha = 0$, vil (17) falde sammen med (16). Dersom α er forskjellig fra Nul, finder man ved at indsætte den fundne Værdi for $F(x, y, \theta$ i Faktorens Bestemmelsesligning:

$$M\left[\frac{d\alpha}{dy} + \theta^{B+1}\left(\beta(B+1)\frac{dv}{dy} + \frac{d\beta}{dy}\right)\right] - N\left[\frac{d\alpha}{dx} + \theta^{B+1}\left(\beta(B+1)\frac{dv}{dx} + \frac{d\beta}{dx}\right)\right]$$
$$+ (\alpha + \beta\theta^{B+1})\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Men for at denne Ligning kan være identisk, maa man have

$$M \frac{d\alpha}{dy} - N \frac{d\alpha}{dx} + \alpha \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) = 0,$$

saa at Funktionen α, som er simplere end $F(x, y, \theta)$, ogsaa maa være Integrationsfaktor. Men man kan naturligvis i dette Tilfælde ligesom i det foregaaende antage, at $F(x, y, \theta)$ er den Faktor, som indeholder det ringeste Antal af Transcendenter af n^{te} Orden, og det vil da være tilladt at abstrahere fra Formen (17).

Antages det derefter, at Forholdet mellem $F(x, y, \theta)$ og $\theta F_\theta'(x, y, \theta)$ er afhængigt af θ, saa maa

$$\frac{\theta F_\theta'(x, y, \theta)}{F(x, y, \theta)} = \text{Konstant}$$

være det fuldstændige Integral af den forelagte Ligning. Det følger heraf, at Integrationsfaktoren $\theta^2 F_\theta''(x, y, \theta)$ maa afhænge af de to andre Faktorer $\theta F_\theta'(x, y, \theta)$ og $F(x, y, \theta)$ ved en Ligning af Formen:

$$\theta^2 F_\theta''(x, y, \theta) = \theta F_\theta'(x, y, \theta)\, \psi \left(\frac{\theta F_\theta'(x, y, \theta)}{F(x, y, \theta)} \right).$$

Da nu

$$\frac{\theta^2 F_\theta''(x, y)\, \theta)}{\theta F_\theta'(x, y, \theta)} \text{ og } \frac{\theta F_\theta'(x, y, \theta)}{F(x, y, \theta)}$$

begge indeholde θ, og begge ere algebraiske Funktioner af θ, saa maa ψ være et algebraisk Funktionstegn. Det er da tilladt at erstatte θ ved et vilkaarligt Bogtsav i, hvorved man faar:

$$i^2 \frac{d^2 F}{di^2} = i \frac{dF}{di}\, \psi \left(\frac{i \frac{dF}{di}}{F} \right). \tag{18}$$

I denne Ligning substitueres:

$$i \frac{dF}{di} = u,$$

hvorved man faar

$$\frac{du}{dF} = 1 + \psi \left(\frac{u}{F} \right).$$

Her substitueres paany

$$\frac{u}{F} = z,$$

hvorved erholdes:

$$F \frac{dz}{dF} = \psi(z) + 1 - z,$$

som ved Integration giver et Resultat af Formen:

$$C_1 F = \psi_1 \left(\frac{C_1 i \frac{dF}{di}}{C_1 F} \right),$$

som atter omskrives til Formen:

$$C_1 i \frac{dF}{di} = \psi_2 (C_1 F), \tag{19}$$

hvor C_1 er en af i uafhængig Størrelse.

Denne Ligning er en Differentialligning af første Orden, som tilfredsstiller (18) som et første fuldstændigt Integral. For at undersøge om der skulde gives nogen Differentialligning af 1ste Orden, der tilfredsstiller (18) som partikulær Opløsning, maa man differentiere (19) m. H. t. C_1. Derved erholder man:

$$i \frac{dF}{di} = F \psi_2' (C_1 F),$$

som kombineret med (19) giver:

$$C_1 F \psi_2' (C_1 F) = \psi_2 (C_1 F);$$

heraf udledes $C_1 F = \alpha =$ Konstant.

Indsættes dette Resultat i (19), faar man:

$$i \frac{dF}{di} = \frac{\psi_2 (\alpha)}{\alpha} F;$$

men dette Resultat maa forkastes, da man ifølge den ovenfor gjorte Antagelse her alene betragter saadanne Former af Funktionen F, som ikke gjøre Forholdet:

$$\frac{\theta F_\theta' (x, y, \theta)}{F (x, y, \theta)}$$

uafhængigt af θ. — Formlen (19) gjælder ikke, hvis ψ har en saadan Form, at:

$$\psi (z) = z - 1.$$

Men man kan abstrahere fra dette Tilfælde, da det leder til et ubrugeligt Resultat.

Integration af (19) giver et Resultat af Formen:

$$C_1 F = \chi (C_2 i),$$

hvor C_2 er uafhængig af i. Med en Forandring i Betegnelsen kan dette ogsaa skrives:

$$F = C_1 \chi (C_2 i). \tag{20}$$

Man kunde vel nu her lade C_2 variere; men dette vilde her ligesaa lidt som i det foregaaende Tilfælde lede til noget brugbart Resultat.

Ifølge (20) maa da Faktoren φ have Formen:

$$\varphi = F (x, y, \theta) = C_1 \chi (C_2 \theta),$$

hvor C_1 og C_2 ikke indeholde θ. Indsætter man dette Resultat i φ's Differentialligning, finder man:

$$\left.\begin{aligned} M\left(C_1\,\chi'(C_2\,\theta)\left[C_2\,\theta\frac{dv}{dy}+\theta\frac{dC_2}{dy}\right]+\chi(C_2\,\theta)\frac{dC_1}{dy}\right) \\ -N\left(C_1\,\chi'(C_2\,\theta)\left[C_2\,\theta\frac{dv}{dx}+\theta\frac{dC_2}{dx}\right]+\chi(C_2\,\theta)\frac{dC_1}{dx}\right) \\ +C_1\,\chi(C_2\,\theta)\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Da nu Forholdet mellem $F(x, y, \theta)$ og $\theta F_\theta'(x, y, \theta)$ ikke er uafhængigt af θ, maa i den nys opskrevne Ligning Koefficienterne til χ og χ' forsvinde hver for sig. Koefficienten til χ giver:

$$M\frac{dC_1}{dy}-N\frac{dC_1}{dx}+C_1\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0.$$

Men denne Ligning viser, at der maa være en simplere Faktor C_1, som gjør Differentialligningen integrabel, og da dette Resultat strider mod den fra Begyndelsen af gjorte Antagelse, saa udtrykker (16) den eneste mulige Form for Faktorer af denne Art. Der er vel her kun taget Hensyn til en enkelt af de exponentielle Transcendenter, som Funktionen F kan indeholde, men de andre maa indgaa deri paa samme Maade som θ, og hvis man derfor betegner samtlige Exponentialfunktioner ved θ_1, θ_2, ... θ_p, saa maa man have:

$$\varphi = \alpha\,\theta_1^{m_1}\,\theta_2^{m_2}\ldots\theta_p^{m_p},$$

hvor α er en Funktion, som ikke indeholder Transcendenter af n^{te} Orden, og m_1, m_2 ... m_p ere rationale Konstanter. Man kan derfor skrive:

$$\varphi = u\,e^v, \tag{21}$$

hvor u og v ere Transcendenter af Ordnen $n-1$, hvis nærmere Beskaffenhed det nu kommer an paa at undersøge. Indsætter man Udtrykket (21) for φ i (2), finder man, da e^v ikke kan være Nul:

$$M\left(u\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dy}\right)-N\left(u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}\right)+u\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0. \tag{22}$$

5.

Man sætter først i (21)

$$u = F(x, y, \theta), \qquad v = f(x, y, \theta),$$

hvor $\theta = e^{\omega}$ er en Exponentialfunktion af Ordnen $n-1$. F og f ere som sædvanlig algebraiske Funktioner af θ og andre Transcendenter af samme Orden. De kunne desuden indeholde saavel Transcendenter af lavere Ordner som algebraiske Funktioner af x og y. Ifølge (22) skal man da have:

$$\left.\begin{array}{c} M\left[F\left(\frac{df}{dy}+\theta\frac{d\omega}{dy}\frac{df}{d\theta}\right)+\frac{dF}{dy}+\theta\frac{d\omega}{dy}\cdot\frac{dF}{d\theta}\right] \\ -N\left[F\left(\frac{df}{dx}+\omega\frac{d\omega}{dx}\frac{df}{d\theta}\right)+\frac{dF}{dx}+\theta\frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{dF}{d\theta}\right] \\ +F\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Men dersom denne Ligning skal være identisk, maa det være tilladt at erstatte θ ved $\mu\theta$. Multiplicerer man den saaledes fremkomne Ligning med $e^{f(x,y,\mu\theta)}$, faar man det samme Resultat, som vilde være fremkommet ved i Faktorens Bestemmelseligning (2) at sætte

$$\varphi = \varphi_1 = F(x, y, \mu\theta)\, e^{f(x, y, \mu\theta)},$$

som altsaa er en ny Integrationsfaktor, og man har som Identitet:

$$\left.\begin{array}{c} M\frac{dF(x,y,\mu\theta)\,e^{f(x,y,\mu\theta)}}{dy} - N\frac{dF(x,y,\mu\theta)\,e^{f(x,y,\mu\theta)}}{dx} \\ +F(x,y,\mu\theta)\,e^{f(x,y,\mu\theta)}\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Dersom man differentierer denne Ligning m. H. t. μ og derefter sætter $\mu = 1$, finder man som en tredie Faktor

$$\varphi_2 = \left(\frac{dF(x,y,\mu\theta)\,e^{f(x,y,\mu\theta)}}{d\mu}\right)_{\mu=1}$$
$$= \left(\theta\frac{dF(x,y,\theta)}{d\theta} + \theta F(x,y,\theta)\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}\right)e^{f(x,y,\theta)}.$$

Antager man nu, at Forholdet mellem φ_1 og φ_2 er identisk lig med en Konstant C, saa kar man

$$\frac{\theta\frac{dF(x,y,\theta)}{d\theta} + \theta F(x,y,\theta)\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}}{F(x,y,\theta)} = C,$$

og Identiteten maa ikke forstyrres, selv om man for θ sætter et vilkaarligt Bogstav i. Efter Tilføjelse af en Faktor i Tæller og Nævner bliver da den ovenstaaende Ligning til:

$$\frac{e^{f(x,y,i)}\frac{dF(x,y,i)}{di} + F(x,y,i)\,e^{f(x,y,i)}\frac{df(x,y,i)}{di}}{F(x,y,i)\,e^{f(x,y,i)}} = \frac{C}{i}.$$

Integration af denne Ligning giver:

$$F(x, y, i)\, e^{f(x, y, i)} = C' e^{Cli},$$

hvor C' ikke indeholder i. Erstatter man nu i ved $\theta = e^{\omega}$, finder man:

$$F(x, y, \theta)\, e^{f(x, y, \theta)} = C' e^{C\omega},$$

som er urimelig, da den ene Side indeholder θ og den anden ikke. — Naar nu Forholdet $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ ikke kan være identisk lig en Konstant, saa maa

$$\frac{\theta \frac{dF(x, y, \theta)}{d\theta} + \theta F(x, y, \theta) \frac{df(x, y, \theta)}{d\theta}}{F(x, y, \theta)} = C$$

være det fuldstændige Integral af den forelagte Differentialligning. Men dersom man af dette Integral ved Differentiation skal kunne frembringe Ligningen

$$M + N \frac{dy}{dx} = 0,$$

saa seer man let, at denne Ligning tværtimod den ovenfor gjorte Antagelse maa have en Faktor, som er transcendent af lavere Orden end φ. Man kan da slutte, at F og f ikke kunne indeholde nogen Exponentialfunktion af Ordnen $n-1$.

Det skal derefter undersøges, om man da kan have i (21)

$$u = F(x, y, \theta), \qquad v = f(x, y, \theta),$$

hvor nu

$$\theta = l . \omega$$

er en monom logarithmisk Transcendent af Ordnen $n-1$. Insættelse i (22) giver:

$$M\left[F(x, y, \theta)\left(\frac{df(x, y, \theta)}{dy} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dy} \cdot \frac{df(x, y, \theta)}{d\theta}\right) + \frac{dF(x, y, \theta)}{dy} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dy} \cdot \frac{dF(x, y, \theta)}{d\theta}\right]$$
$$- N\left[F(x, y, \theta)\left(\frac{df(x, y, \theta)}{dx} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dx} \cdot \frac{df(x, y, \theta)}{d\theta}\right) + \frac{dF(x, y, \theta)}{dx} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dx} \cdot \frac{dF(x, y, \theta)}{d\theta}\right]$$
$$+ F(x, y, \theta)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Skal denne Ligning være identisk m. H. t. θ, maa det være tilladt at erstatte θ ved $\theta + \mu$, og dersom man multiplicerer den saaledes fremkomne Ligning med $e^{f(x, y, \theta + \mu)}$, faar man det samme Resultat, som vilde være fremkommet ved i (2) at sætte:

$$\varphi = \varphi_1 = F(x, y, \theta + \mu)\, e^{f(x, y, \theta + \mu)},$$

som altsaa er en ny Integrationsfaktor, og man har som Identitet

$$\left.\begin{array}{r} M\dfrac{dF(x,y,\theta+\mu)\,e^{f(x,y,\theta+\mu)}}{dy} - N\dfrac{dF(x,y,\theta+\mu)\,e^{f(x,y,\theta+\mu)}}{dx} \\ + F(x,y,\theta+\mu)\,e^{f(x,y,\theta+\mu)}\left(\dfrac{dM}{dy}-\dfrac{dN}{dx}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Dersom man differentierer denne Ligning m. H. t. μ og derefter sætter $\mu = 0$, finder man som en ny Integrationsfaktor

$$\varphi_2 = \left(\frac{dF(x,y,\theta+\mu)\,e^{f(x,y,\theta+\mu)}}{d\mu}\right)_{\mu=0.} = e^{f(x,y,\theta)}\frac{dF(x,y,\theta)}{d\theta}$$
$$+ F(x,y,\theta)\,e^{f(x,y,\theta)}\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}.$$

Det antages nu, at Forholdet mellem φ_1 og φ_2 er identisk lig en Konstant C, og man maa da have som før:

$$\frac{e^{f(x,y,i)}\dfrac{dF(x,y,i)}{di} + F(x,y,i)\,e^{f(x,y,i)}\dfrac{df(x,y,i)}{di}}{F(x,y,i)\,e^{f(x,y,i)}} = C,$$

hvor i er et for θ indført vilkaarligt Bogstav. Integration af denne Ligning giver:

$$F(x,y,i)\,e^{f(x,y,i)} = e^{Ci+C'},$$

hvor C' er en af i uafhængig Størrelse. Som en mulig Form for Faktorer af den her betragtede Slags har man da:

$$\varphi = e^{C_1 lu_1 + C_2 lu_2 + \ldots\ldots C_m lu_m + v},$$

hvor $C_1, C_2 \ldots C_m$ ere konstante Størrelser, $u_1, u_2, \ldots u_m$, v Transcendenter af Ordnen $n-2$. Hvis Forholdet mellem φ_2 og φ_1 ikke er identisk lig med en Konstant, kommer man i Strid med den gjorte Forudsætning, at den betragtede Faktor er den simpleste.

Det kan nu vises, at v og alle u'erne ere algebraiske Funktioner.

Vi sætte:

$$\varphi = e^{\Sigma Clu + v}$$

og antage, at u og v kunne indeholde en Logarithme θ af Ordnen $n-2$. Man sætter:

$$u = F(x,y,\theta), \qquad v = f(x,y,\theta).$$

Man har da foruden Faktoren

$$\varphi = e^{\Sigma Cl\,.\,F(x,y,\theta) + f(x,y,\theta)}$$

ogsaa

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi}{d\theta} = \varphi\left[\Sigma C\frac{\dfrac{dF(x,y,\theta)}{d\theta}}{F(x,y,\theta)} + \frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}\right].$$

Hvis nu Forholdet mellem φ_1 og φ ikke er konstant, maa der være simplere Faktorer. Hvis dette Forhold er konstant, finder man:

$$\Sigma\, C\, l\, F(x, y, \theta) + f(x, y, \theta) = C'\theta + C'',$$

hvor C' er konstant og C'' uafhængig af θ. Men denne Ligning er urimelig, og Funktionerne u og v kunne altsaa ingen Logarithme indeholde.

Dersom Funktionerne u og v indeholdt en Exponentialfunktion θ, fik man som Faktorer:

$$\varphi = e^{\Sigma\, C l F(x, y, \theta) + f(x,y,\theta)}$$

og

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi}{d\theta} = \varphi\left[\Sigma\, C\, \frac{\theta \dfrac{dF(x,y,\theta)}{d\theta}}{F(x,y,\theta)} + \theta\,\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}\right].$$

Var nu Forholdet mellem φ og φ_1 konstant, fik man:

$$\Sigma\, C l F(x,y,\theta) + f(x, y, \theta) = C' l\theta + C'',$$

hvor C' er konstant og C'' uafhængig af θ. Men denne Ligning er urimelig, fordi θ er en Exponentialfunktion, og højre Side altsaa er uafhængig af θ. Dersom Forholdet mellem φ og φ_1 ikke var konstant, maatte der være simplere Faktorer, og da u_1, u_2 ... u_m, v saaledes hverken kunne indeholde Logarithmer eller Exponentialfunktioner, maa de nævnte Størrelser være algebraiske Funktioner af x og y. —

Af Hensyn til en senere Anvendelse bemærkes det her, at der i hele den Del af den foregaaende Udvikling, som angaar Undersøgelse af transcendente Integrationsfaktorer, ikke har været gjort Brug af den Omstændighed, at M og N ere rationale Funktioner af x og y. Den hele Bevisførelse vilde vedblive at gjælde, selv om M og N blot forudsattes algebraiske.

Med Hensyn til Funktionerne v, u_1, u_2, ... u_m kan det endelig til Slutning bevises, at naar M og N ere rationale, saa kan det samme forudsættes om v, u_1, u_2 ... u_m.*)

Man forestille sig en algebraisk Funktion θ af x og y af den Beskaffenhed, at man kan udtrykke v, u_1, ... u_m rationalt ved θ, x og y. En saadan Funktion er f. Ex. Summen af alle Størrelserne v, u_1, u_2 ... u_m multiplicerede hver især med sin ubestemte, konstante Størrelse. Lad

$$\Theta = 0$$

være den algebraiske Ligning, ved hvilken θ bestemmes.

---

*) Bevisformen skyldes Abel: Oeuvres compl. Tome I, p. 351.

Den antages irreduktibel af Graden δ. Indsættes

$$\varphi = e^{\Sigma Clu + v}$$

i Faktorens Bestemmelsesligning, finder man:

$$M \Sigma C \frac{1}{u} \frac{du}{dy} - N \Sigma C \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + M \frac{dv}{dy} - N \frac{dv}{dx} + \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 0. \quad (22)$$

Venstre Side kan her gjøres til en algebraisk rational Funktion af θ, x og y, og Ligningen maa blive identisk ved Indsættelse af Udtrykket for θ ved x og y. Men da $\Theta = 0$ er forudsat irreduktibel, ville alle dens Rødder tilfredsstille den ovenstaaende Ligning, hvis blot én gjør det. Rødderne i $\Theta = 0$ betegnes ved:

$$\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots \theta_\delta.$$

De tilsvarende Udtryk for v, u_1, u_2, ... u_m betegnes ved:

$$\begin{array}{l} v', u'_1, u'_2 \ldots\ldots u'_m, \\ v'', u''_1, u''_2 \ldots\ldots u''_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v^{(\delta)}, u^{(\delta)}_1, u^{(\delta)}_2 \ldots\ldots u^{(\delta)}_m; \end{array}$$

Disse Systemer af Værdier, δ i Antal, af v, u_1 ... u_m indsættes efterhaanden i (22); Resultaterne adderes, hvorefter man dividerer med δ. Man vil da finde:

$$M \Sigma \frac{C}{\delta} \frac{dlu'u'' \ldots u^{(\delta)}}{dy} - N \Sigma \frac{C}{\delta} \frac{dlu'u'' \ldots u^{(\delta)}}{dx}$$

$$+ M \frac{d\frac{v' + v'' + \ldots v^{(\delta)}}{\delta}}{dy} - N \frac{d\frac{v' + v'' + \ldots v^{(\delta)}}{\delta}}{dx} + \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 0.$$

Multiplicerer man her med

$$e^{\Sigma \frac{C}{\delta} lu'u'' \ldots u^{(\delta)} + \frac{v' + v'' + \ldots v^{(\delta)}}{\delta}},$$

saa har man netop, hvad der vilde være udkommet ved i Faktorens Bestemmelsesligning at substituere det nys angivne Udtryk for φ.

Men her er

$$u' u'' u''' \ldots u^{(\delta)}$$

en rationel Funktion af x, y, θ_1, ... θ_δ, og m. H. t. de sidstnævnte Størrelser er den tillige symmetrisk, og den kan da ved Hjælp af Ligningen $\Theta = 0$ udtrykkes som en rational Funktion af x og y. Paa lignende Maade ser man, at

$$\frac{v' + v'' + \ldots\ldots v^{(\delta)}}{\delta}$$

er en rational Funktion af x og y. Med en lille Forandring i Betegnelsen har man altsaa

$$\varphi = e^{\Sigma Cl.U + V},$$

hvor U og V ere rationale Funktioner af x og y som den simpleste Form for en Integrationsfaktor til en Ligning af Formen

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

hvor M og N ere rationale Funktioner af x og y, under Forudsætning af, at der overhovedet gives en Faktor, som kan udtrykkes ved bekjendte Funktioner, og at denne Faktor ikke er en algebraisk Funktion af x og y.

Da man i det foregaaende har fundet

$$\varphi = \sqrt[r]{k},$$

hvor k er en rational Funktion af x og y og r et rationalt Tal, som den simpleste Form for algebraiske Faktorer, hvis saadanne existere, og da kan man skrive:

$$\sqrt[r]{k} = e^{\frac{1}{r} lk},$$

saa seer man, at den algebraiske Funktionsform er indbefattet som et specielt Tilfælde under den transcendente, og Resultatet af Undersøgelsen kan nu sammenfattes i følgende

Theorem.

Dersom Differentialligningen

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

hvor M og N ere rationale Funktioner af x og y, har Integrationsfaktorer, som kunne udtrykkes ved bekjendte Fnnktioner af x og y, saa maa der blandt disse være én af Formen

$$\varphi = e^{C_1 l U_1 + C_2 l U_2 + \ldots C_m l U_m + V},$$

hvor U_1, U_2, ... U_m, V ere rationale Funktioner af x og y.

Dersom man nu vilde anvende de ubekjendte Koefficienters Methode til at bestemme Faktoren, kunde man sætte:

$$C_1 l U_1 + C_2 l.U_2 + \ldots\ldots C_m l.U_m + V = \psi,$$

og ψ skulde da tilfredsstille Differentialligningen:

$$M\frac{d\psi}{dy} - N\frac{d\psi}{dx} + \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 0.$$

Her maa man bemærke, at $\frac{d\psi}{dx}$ og $\frac{d\psi}{dy}$ ere rationale Funktioner af x og y, og man kunde altsaa for disse to Differentialkoefficienter indsætte to rationale Funktioner af x og y med ubekjendte Koefficienter. Man kunde altid forudsætte, at de havde den samme Nævner; men de maatte foruden den ovenstaaende Ligning endnu tilfredsstille

$$\frac{d\frac{d\psi}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{d\psi}{dy}}{dx}.$$

Naar $\frac{d\psi}{dx}$ og $\frac{d\psi}{dy}$ ere fundne, kan man finde ψ ved Integration. Men de med Koefficienternes Bestemmelse forbundne Regninger ere, selv hvor Talen er om meget simple Differentialligninger, saa sammensatte, at Methoden maa betragtes som ubrugelig.

I de Tilfælde, hvor man kjender partikulære Integraler i den forelagte Differentialligning, lykkes det undertiden ved at slaa ind paa en ganske anden Vej at naa til en Bestemmelse af Faktoren. Dette er allerede tidligere udførligt paavist. (C. Tychsen: Om Integration af Differentialligningen $P\frac{dy}{dx} + Q = 0$, hvor P og Q ere bekjendte Funktioner af x og y. Tidsskr. for Math. 1866).

6.

Har man til Integration forelagt Ligningen

$$\frac{dy}{dx} = P, \tag{23}$$

hvor P er en algebraisk Funktion af x og y, saa bestemmes Integrationsfaktoren φ ved Ligningen

$$P\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dx} + \varphi\frac{dP}{dy} = 0. \tag{24}$$

Naar man nu vil undersøge, hvorvidt Differentialligningen (24) har partikulære Integraler, som ere algebraiske Funktioner af x og y, vil det være bekvemmest at tænke sig φ udtrykt ikke som Funktion af x og y alene, men som Funktion af x, y og $\frac{dy}{dx} = p$. Ifølge (23) maa $\frac{dy}{dx}$ eller p være Rod i en irreduktibel algebraisk Ligning, hvis Koefficienter ere rationale Funktioner af x og y. Vi betegne denne Ligning ved:

$$U = p^n + P_1 p^{n-1} + P_2 p^{n-2} \ldots\ldots P_{n-1} p + P_n = 0. \tag{25}$$

Da φ betragtes som Funktion af x, y og p, maa man i (24) indsætte:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} \text{ istedetfor } \frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{dp}{dy} \text{ istedetfor } \frac{d\varphi}{dy},$$

$$p \text{ istedetfor } P.$$

dx og $\frac{dp}{dy}$ bestemmes ifølge (25) ved Ligningerne

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = 0,$$

$$\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dp} \cdot \frac{dp}{dy} = 0.$$

Derved bliver Faktorens Bestemmelsesligning til

$$-\frac{dU}{dp} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - p\frac{dU}{dp} \cdot \frac{d\varphi}{dy} + \left(p\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx}\right)\frac{d\varphi}{dp} + \varphi\frac{dU}{dy} = 0. \tag{26}$$

Problemet er altsaa at finde den simpleste Form af en algebraisk Funktion af x, y, p, som tilfredsstiller den ovenstaaende Ligning, idet p er en algebraisk Funktion af x og y, som tilfredsstiller (25).

Har nu Ligningen (26) et partikulært Integral, som er en algebraisk Funktion af x, y, p, saa maa det dertil svarende φ være en Rod i en irreduktibel algebraisk Ligning

$$f(x, y, p, \varphi) = 0. \tag{27}$$

Ifølge denne Ligning kunne $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dp}$ udtrykkes rationalt ved x, y, p, φ, og dersom man indsætter de erholdte Udtryk i (26), bliver denne Ligning til en algebraisk Ligning i φ med Koefficienter, som ere rationale Funktioner af x, y, p. Man slutter deraf, at hvis én af Rødderne i (27) kan bruges som Integrationsfaktor, saa kunne de alle bruges. Indsætter man i (26) en vilkaarlig af disse Rødder φ_r, og multiplicerer man derefter Ligningen med: $\mu\varphi_r^{\mu-1}$, finder man:

$$-\frac{dU}{dp} \cdot \frac{d\varphi_r^\mu}{dx} - p\frac{dU}{dp} \cdot \frac{d\varphi_r^\mu}{dy} + \left(p\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx}\right)\frac{d\varphi_r^\mu}{dp} + \mu\varphi_r^\mu\frac{dU}{dy} = 0.$$

Betegner man nu med S_μ Summen af de μte Potenser af Rødderne i (27), saa har man ogsaa:

$$-\frac{dU}{dp} \cdot \frac{dS_\mu}{dx} - p \cdot \frac{dU}{dp} \cdot \frac{dS_\mu}{dy} + \left(p\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx}\right)\frac{dS_\mu}{dp} + \mu S_\mu\frac{dU}{dy} = 0.$$

Altsaa tilfredsstille S_μ og φ_r^μ den samme Differentialligning. S_μ er ifølge (27) en rational Funktion af x, y, p, og dersom Ligningen (27) overhovedet existerer, saa maa der altid være mindst én Værdi af S_μ, som er forskjellig fra Nul, idet man lader μ gjennemløbe de positive hele Tal fra 1 indtil det, som angiver Graden af (27). Kan man altsaa finde en Værdi af μ og en tilsvarende af S_μ, som tilfredsstille den ovenstaaende Differentialligning, saa kan man som Integrationsfaktor bruge:

$$\varphi = \sqrt[\mu]{S_\mu}.$$

Da Værdien af S_μ er en rational Funktion af x, y, p, kan man sætte

$$S_\mu = \frac{\theta(x, y, p)}{\psi(x, y, p)},$$

hvor θ og ψ ere hele Funktioner; det skal nu vises, at Udtrykket for S_μ altid kan omformes saaledes, at det ikke indeholder p i Nævneren. p er én af Rødderne i (25), de andre Rødder betegnes ved p_1, p_2, ... p_{n-1}. Multiplicerer man nu Tæller og Nævner i Udtrykket for S_μ med:

$$\psi(x, y, p_1)\,\psi(x, y, p_2)\ \ldots\ldots\ \psi(x, y, p_{n-1}),$$

saa bliver Nævneren en symmetrisk Funktion af p, p_1, ... p_{n-1}, og den kan følgelig udtrykkes ved en rational Funktion af x og y. Tælleren bliver til en rational Funktion af x, y, p, p_1 ... p_{n-1}, som er symmetrisk m. H. t. p_1, p_2, ... p_{n-1}. En saadan Funktion kan udtrykkes rationalt ved:

$$p_1 + p_2 + \ldots p_{n-1},$$
$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots p_{n-1}^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_1^n + p^n + \ldots p_{n-1}^n.$$

Men betegner man:

$$p^r + p_1^r + p_2^r \ldots\ldots p_{n-1}^r$$

ved s_r, saa ere de nævnte Funktioner

$$s_1 - p,\ s_2 - p^2,\ s_3 - p^3\ \ldots\ldots\ s_n - p^n,$$

og følgelig ere de hele Funktioner af p.

Paa Grund af Ligningen (25) kan altsaa S_μ fremstilles under Formen:

$$S_\mu = \alpha + \beta p + \gamma p^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Om dette Udtryk er det endvidere tilladt at forudsætte, at det ikke indeholder p i Potenser højere en den $(n-1)^{te}$; thi alle andre kunne bortskaffes ved Ligningen (25). Altsaa kan man skrive:

$$S_\mu = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \ldots\ldots \alpha_{n-1} p^{n-1},$$

hvor α_0, α_1, ... α_{n-1} ere rationale Funktioner af x og y. Dersom man indsætter dette Udtryk i (26) og atter bortskaffer alle Potenser af p højere end den $(n-1)^{te}$, faar man en Ligning af Formen:

$$A_0 + A_1 p + A_2 p^2 + \ldots\ldots \quad A_{n-1} p^{n-1} = 0, \tag{28}$$

hvor A_0, A_1, A_2, ... A_{n-1} ere at betragte som rationale Funktioner af x og y, idet de indeholde x, y, α_0, ... α_{n-1} og Differentialkoefficienter af disse Størrelser m. H. t. x og y. Men en Ligning som (28) kan, da (25) er irreduktibel, ikke existere med mindre den er identisk, og altsaa faar man til Bestemmelse af α_0 ... α_{n-1} de n Ligninger:

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ \ldots\ldots\quad A_{n-1} = 0.$$

7.

Desom Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = P$$

ikke kan integreres ved en algebraisk Faktor, bliver der Spørgsmaal om, hvorvidt den da kan integreres ved en Faktor, som indeholder transcendente Funktioner af de Variable. Ifølge det Foregaaende, maa, da P er en algebraisk Funktion af x og y, den simpleste Form for en saadan Faktor være:

$$\varphi = e^{c_1 lu_1 + c_2 lu_2 + \ldots c_m lu_m + v} = e^{\Sigma clu + v},$$

hvor $u_1, u_2, \ldots u_m, v$ ere algebraiske Funktioner af de Variable, $c_1, c_2, \ldots c_m$ ere Konstanter.

Men da p ogsaa er en algebraisk Funktion af x og y, vil det være tilladt at betragte $u_1, \ldots u_m, v$ som algebraiske Funktioner af x, y, p, og det kan vises, at de paa denne Maade kunne skrives under rational Form. —

Man tænker sig da en algebraisk Funktion θ af x, y og p af den Beskaffenhed, at man kan udtrykke $v, u_1, \ldots u_m$ rationalt ved θ, x, y, p.

$$\Theta = 0$$

er den Ligning, ved hvilken θ bestemmes. Den antages irreduktibel. Indsættes

$$\varphi = e^{\Sigma clu + v}$$

i Faktorens Bestemmelsesligning (26)

$$-\frac{dU}{dp} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - p\frac{dU}{dp}\frac{d\varphi}{dy} + \left(p\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx}\right)\frac{d\varphi}{dp} + \varphi\frac{dU}{dy} = 0,$$

faar man efter Division med φ:

$$-\frac{dU}{dp}\left[\Sigma\frac{c}{u}\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right] - p\frac{dU}{dp}\left[\Sigma\frac{c}{u}\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy}\right] + \left(p\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx}\right)\left[\Sigma\frac{c}{u}\frac{du}{dp} + \frac{dv}{dp}\right] + \frac{dU}{dy} = 0.$$

Her kan venstre Side gjøres til en rational Funktion af θ, x, y, p, og Ligningen maa da blive identisk ved Indsættelse af Udtrykket for θ ved x, y, p. Fra dette Punkt kan Beviset føres videre ganske paa samme Maade som i § 5, og man kommer til Slutning til følgende

Theorem.

Dersom Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = P,$$

hvor P er en algebraisk Funktion af x og y, har Integrationsfaktorer, som kunne udtrykkes ved bekjendte Funktioner af x og y, saa maa der blandt disse være én af Formen

$$\varphi = e^{C_1 lU_1 + C_2 lU_2 + \ldots C_m lU_m + V},$$

hvor $U_1, U_2, \ldots U_m, V$ ere rationale Funktioner af x, y og P, og $C_1, C_2, \ldots C_m$ ere Konstanter.

Hemisepius,

en ny Slægt af *Sepia*-Blæksprutternes Familie,

med Bemærkninger om *Sepia*-Formerne i Almindelighed.

Ved

Japetus Steenstrup,
Prof. ordin. i Zoologi ved Kjøbenhavns Universitet.

Hertil to lithographerede Tavler.

Avec un Résumé en français.

Vidensk. Selsk. Skr., 5te Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10de Bd. VII.

Kjøbenhavn.
Bianco Lunos Bogtrykkeri.
1875.

Under Navnet *Sepia* indbefattede Linné i de senere Udgaver af Systema naturæ (den Xde fra 1758 og XIIte fra 1766) igrunden alle de ham bekjendte Blæksprutter (Cephalopoder), og dette Linnéiske Slægtnavn kunde da endogsaa siges at omfatte hele Blæksprutte-Klassen i Nutidens Forstand.

Linné kjendte vel et Par Blæksprutter, som han ikke ligefrem i Systemet havde opført i sin Slægt *Sepia*, men paa Vis og Maade havde han dog erklæret dem for at være Sepier, nemlig de to Slægtformer *Argonauta* og *Nautilus*, begge adskilte fra hans egentlige Sepier ved at bære en ydre Kalkskal, der lignede Sneglenes, den sidste endog en Kalkskal, som ansees for aldeles homolog med Snegleskallen.

Den Skal, hvori *Argonauta*-Dyret findes, betragtedes af Linné, ligesom af mange Flere længe efter hans Tid, urigtigen som noget, der ikke hørte det Dyr til, der boede i Skallen, men som et Dække, der ikke stod i andet Forhold til Dyret, end det, hvori den tomme Snegleskal staar til Eremitkrebsen (*Pagurus bernhardus (Lin.)*), hvilken jo, som bekjendt, kun bruger Snegleskallen til Skjul eller Hus for sin nøgne, blødhudede Bagkrop. Det Bløddyr, der efter hans Mening førte samme Levevis som Eremitkrebsen, erklærede han ganske rigtigen at høre til hans *Sepiæ**). Selv for Nautilens Vedkommende var Linné ved Hjælp af Rumphs kun meget lidet nøiagtige Figur kommen til den fuldkommen rigtige Formodning, at Dyret i Skallen var en Cephalopod (»Animal: *Sepia?*«), og under Slægten *Nautilus* havde Linné ogsaa sat *Spirula*en, paa Grund af Skallens Dannelse. Følgelig har man saa meget større Grund til den Yttring, at for Linné var Begrebet *Sepia* igrunden Indbegrebet af hele vor nuværende Cephalopod-Klasse. Ja indenfor selve hans *Sepia*-Slægt vare endog de fleste af de større Hovedgrupper, som vi nu erkjende i Klassen, repræsenterede ved de faa da kjendte Arter, saaledes som et meget kort Tilbageblik paa Slægtens Historie kan vise det.

*) Syst. Naturæ, X. p. 708. Genus 282 »Argonauta. Animal Sepia. Testa univalvis etc.«

Linné havde vel kun opført fem*) Arter af sin *Sepia*-Slægt, selv i de nævnte sidste Udgaver af hans Systema, i hvilke de ere benævnede *Sepia officinalis*, *S. loligo*, *S. media*, *S. sepiola* og *S. octopodia*, og alene med disse faa Arter henstod Slægten i fulde 30 Aar, indtil henimod Aarhundredets Slutning, da den mindre paalidelige chilesiske Abbed J. J. Molina føiede sin *Sepia ungviculata* til, og Lamarck**) nogle Aar senere (1799) forøgede Arternes Antal til det næsten dobbelte (10). Idet Lamarck korteligen beskrev sine nye Arter, fremhævede han tillige de meget forskjellige Typer, der fandtes i Slægten og som efter hans aldeles rigtige Opfattelse maatte naturligen betegne særegne Slægter. Han kløvede da Linnés *Sepia* i tre Slægter: *Sepia*, *Loligo* og *Octopus*, hver for Øieblikket modsvarende i vore nugjældende Sammenstillinger af Klassens Former***) enten een eller flere Familier, eller endog en hel Orden.

Dette sidste er Tilfældet med Lamarcks Slægt *Octopus*, som foruden den Linnéiske Art *Sepia octopodia*, der i den nye Slægt fik Navnet *Oct. vulgaris*, omfattede tre Arter: *Oct. granulatus*, *Oct. cirrhosus* og *Oct. moschatus*. De to førstnævnte Arter repræsentere nu det store Antal af littorale Octopoder med to Rækker af Sugekopper, de to sidstnævnte Arter have kun én Række og ere Typer for Slægten *Eledone* eller de monocotyle Former iblandt disse. Til disse sidstnævnte mente Lamarck iøvrigt, at den i *Argonauta*-Skallen boende Blæksprutte — der just er Repræsentanten for de ved deres afløsnende Hektocotyler udmærkede pelagiske Octopoder — sluttede sig nærmest og saa nær, at den efter ham endog rimeligvis var samme Art som *Oct. moschatus*; heri havde han Uret, og

---

*) At Linné dog endnu paa en Maade havde en sjette Art af disse Blæksprutter i Syst. Nat. X., tilføier jeg for en Slags Fuldstændigheds Skyld. En stærk sammenfoldet, tørret Rygskal af en *Loligo*, sandsynligvis *Loligo vulgaris* fra Middelhavet, var i denne Tilstand under Artsnavnet: *Pinna pennacea* bleven indsat mellem hans *Pinnæ*. — Originalstykket, der var i Museum Tessini, findes endnu i Universitetets Zoologiske Museum (cfr. Syst. nat. XII, hvor Linné rigtig har erkjendt Sammenhængen).

**) Mémoires de la Société d'Histoire Naturelle de Paris. An VII. (1799). 4to. p. 1—25. Pl. I. et II.

***) Disse Hovedgrupper ville sees i Oversigterne over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger for Februar 1861, hvor jeg har givet følgende:

Oversigt over Cephalopodklassens Familier:

Cephalopodes.

A. Decapodes.

I. *D. pelagici* = »Décapodes Oigopsidés«. D'Orb.
- { 1. Fam. Cranchiæformes.
- 2. Fam. Taonoteuthi. }
- { 3. Fam. Onychii.
- 4. Fam. Ommastrephini. }

II. *D. littorales* = »Décap. Myopsidés«. D'Orb.
- 5. Fam. Loliginei.
- 6. Fam. Sepiarii.
- 7. Fam. Sepiolini.
- ? 8. Fam. Lituini (Spirula).

B. Octopodes.

I. *Octop. pelagici* = »Octop. Philonexidæ«. D'Orb.
- { Fam. Tremoctopi.
- Fam. Argonautei. }

II. *Octop. littorales* = »Octop. typici«.
- { Fam. Octopini s. Dicotyli.
- Fam. Monocotyli. }

ogsaa deri, at han hævdede den samme Opfattelse, som Linné, at Skallen var fremmed for Dyret.

I sin Slægt *Loligo* beskrev Lamarck fire Arter: *Lol. vulgaris* og *Lol. subulata* (rimeligvis Linné's *Sepia media*), hvilke begge modsvare de egentlige Loliginer eller Loligo-Familien, endvidere *Lol. Sepiola*, Hovedtypen for *Sepiola-Rossia*-Familien og endelig *Lol. sagittata**), der i sit collective Indhold repræsenterer Ommatostreph-Familien blandt de oceaniske tiarmede Blæksprutter, ligesom Linnés egen Art, *Sep. loligo*. Hele tre større Familier af de dekapode Cephalopoder, og navnligen én af de oceaniske og to af de littorale, fandtes altsaa betegnede ved disse fire Arter, men netop dette havde igrunden allerede været Tilfældet med Linnés tre Arter (*Sep. loligo, S. media* og *S. sepiola*).

I den Slægt, for hvilken Lamarck bibeholdt det Linnéiske Slægtnavn *Sepia* i indskrænket Betydning, indførte han, foruden Linnés ældre Art *Sep. officinalis* fra Europas Kyster, kun én eneste Art til: *Sep. tuberculata* fra de sydlige Have. I Modsætning til de to andre Slægter repræsenterer hans *Sepia*-Slægt kun en enkelt naturlig Gruppe, Sepie-Familien i vort nuværende System. Den er ikke bleven delt i flere Slægter, idet den har vist sig fra Begyndelsen af opstillet paa et ensartet Indhold og senere kun har optaget i sig nærbeslægtede Former. Nøiere beseet, var den ogsaa opstillet paa snevrere Karakterer, end de to andre. Medens disse vare karakteriserede i al Almindelighed ved Mangel eller Tilstedeværelse af tvende Organer, en hornagtig Rygskal og Svømmefinner paa Siderne, blev denne opstillet paa de Enkeltheder ved Organerne, at Svømmefinnerne strække sig langs med hele Kropsidens Længde og at Rygskallen er udstyret med et eiendommeligt, svampetcellet Kalklag paa Undersiden.

Siden dette Lamarcks første Arbeide over disse Dyr (1799) og indtil nu, følgelig igjennem hele dette Aarhundrede, har altsaa den af hans Slægter, som her særlig skal beskjæftige os, staaet med den selvsamme Begrændsning, hvormed den da opstilledes. Indholdet af Slægten *Sepia* er imidlertid efterhaanden blevet fyldigere, da Arternes Antal nu overstiger tredive. Herved maa det dog ikke oversees, at disse Arter ikke alle ere lige godt kjendte eller blevne optagne i Systemet paa lige gode Karakterer. Mindst ti af dem ere opstillede paa Rygskallen alene, og saa fortræffeligt et Mærke denne end er, maa det dog indrømmes, at det trænger til Understøttelse af Karakterer, hentede fra Dyrets øvrige Forhold; kun to Trediedele af Arterne kjender man altsaa efter fuldstændige Exemplarer.

---

*) Det er ved en stærk Mistydning af Lamarcks Text og de dertil anførte Figurer, at man har regnet Middelhavets og vor europæiske Vestkysts saakaldte *L. sagittatus (Ommatostrephes)* som Type for Lamarcks Art; den er saa langt fra at være dette, at den neppe var af ham indbefattet under Arten. Lamarcks første Form α, der burde have beholdt Artsnavnet, er aldeles sikkert *Omm. todarus* (Chiaje. D'Orb.), og Formen β ligesaa sikkert *Omm. Bartramii* Les. D'Orb. Den af Malacologerne og Faunisterne saakaldte «*Omm. sagittatus* Lmk.» er *O. Coindeti* (Ver. sec. D'Orb.), hørende til en anden Gruppe.

Det anførte Antal af kjendte Arter er geographisk fordelt saaledes, at der fra Amerikas udstrakte Kyster kun er angivet 2—3 Arter, en eller to fra hver Side af denne Verdensdel. Det store Antal tilhører altsaa den østlige Halvkugle og synes næsten ligelig fordelte langs med Europas, Africas, Asiens, de indiske Øers, Sydhavsøernes og Australiens Kyster. Paa den europæiske Kyst gaaer vor *Sepia officinalis* nordligst af alle Arterne, idet den naaer fra Middelhavet og Nordafrica op med Europas Vestkyst indtil den sydlige Halvdel af Nordsøen. Nordligere gaae Arterne derimod i det stille Hav.

Da *Sepia*-Slægten holder sig om ikke til Kysterne, saa dog ikke fjærnt fra Kyststrækningen af de større Landmasser, skulde man antage, at dens Arter temmelig let kom i Naturforskernes Hænder og derfor vare blevne nogenlunde bekjendte; men dette er sikkert ikke Tilfældet; ellers vilde Antallet af bekjendte Arter vistnok nu have været langt større. Arterne af de littorale Blæksprutter synes nemlig ikke at have nogen meget stor geographisk Udbredning — skjøndt dette før har været antaget om ikke faa af dem — og med en saa almindelig Forekomst, som den, *Sepia*-Slægten frembyder, kan det derfor neppe slaae feil, at Antallet af Arterne meget vil forøges, naar en større Opmærksomhed henvendes paa disse Dyrs Indsamling og Opbevaring, og en større Omhu og Nøiagtighed anvendes paa deres Undersøgelse. Enkelte saadanne Forøgelser, stottede til det Materiale, Universitetets Zoologiske Museum i det sidste Decennium har erholdt, fornemmelig ved velvillig Understøttelse af Danske Søfarende, vil jeg allerede i denne Meddelelse faae Leilighed til at omtale, især forsaavidt som de tillige tjene til at udvide vore Kundskaber om de Uddannelser i forskjellige Retninger, som Arterne frembyde indenfor *Sepia*-Slægten. Men at der foruden nye Arter da ogsaa vil komme til vor Kundskab nye Slægtformer af *sepia*lignende Dyr, kan vel saa meget mindre betvivles, som jeg allerede for denne Meddelelse har til Hovedgjenstand en saadan ny Form, der stiller sig saa eiendommelig overfor de samtlige i 80 Aar til vor Kundskab komne *Sepia*-Arter, at den synes at maatte hævdes som en egen Slægt ved Siden af *Sepia*. Denne Form har jeg kaldt:

Hemisepius (n. g. et n. sp.)

og ladet den aftegne i naturlig Størrelse paa medfølgende Tavle I, fra Rygsiden fig. 1, og fra Bugsiden fig. 2, og nedenunder ligeledes i naturlig Størrelse fremstillet dens Rygskal, udtaget af Dyret, fig. 3, medens Figurerne 4—10 i forstørret Maalestok gjengive forskjellige Partier af Dyret.

Navnet Hemisepius*) har jeg givet Dyret i Lighed med gængse systematiske Slægtnavne, for derved strax at lede Tanken hen paa, at vi her havde med en Blæksprutteform at gjøre, der ikke alene stod den gamle *Sepia*slægt nær, men paa den anden Side ogsaa

*) Af det Græske *ἡμι*, og *σηπίον*, Kalkskallen i en Sepie.

afveg fra dennes Arter just derved, at den ikke havde disses fulde Udvikling af det Parti, der udgjør Slægtens væsenlige Særkjende, den i Rygsiden indleirede, kalkklædte Skal, Grækernes saakaldte *Sepion*. Med denne Eiendommelighed forener den tillige flere andre, som det af den følgende Beskrivelse vil sees.

Denne lille nye Blæksprutteform er fanget af Hr. Kapt. A. F. Andréa, R. af Dbg., i Havnen Tafelbay nær Kapstaden i dette Aar (1874), og sammesteds var denne Museets Velynder ogsaa saa heldig at erholde tvende større Individer af en *Sepia*-Blæksprutte, hvilke han formodede vilde være ældre Dyr af samme Art, som den lille. Man kan heller ikke nægte, at de alle tre ved første Øiekast frembød megen Lighed i Udseende; men ved nøiere Undersøgelse erkjendtes imidlertid de to større, der heldigvis vare af forskjelligt Kjøn, at være Han og Hun af Lamarcks *Sepia tuberculata* eller af en ialtfald meget nærstaaende Art, og da vort Museum ikke besad denne Form, der i Literaturen heller ikke synes at være bleven bekjendt uden efter de i «Jardin des Plantes» opbevarede Exemplarer, var denne Forøgelse ogsaa en særdeles velkommen. Om disse to større Individer skal jeg senerehen give nogle faa Oplysninger, her maa jeg indskrænke mig til at meddele, at fra dem var vort lille kapske Individium helt forskjelligt, men tillige helt forskjelligt fra alt hvad der hidtil var mig bekjendt af sepieagtige Dyr.

Henvisende til de nævnte Figurer 1 og 2 med Hensyn til Dyrets almindelige Udseende, behøver jeg neppe at tilføie, at det meget lignede en kort og stærkbygget Sepie med temmelig korte Arme, og navnlig kunne Individer af vor europæiske *Sepia officinalis* L. ofte antage en aldeles tilsvarende Form. Længden af hele Dyret fra Bugarmenes Spidse til Finnekløften ɔ: Bagenden af Kappen, fandtes at være: 53^{mm}; af Kappen fra Forranden til samme Punkt 28^{mm}; af Hovedet og Armene tilsammen: 25^{mm}. Tentaklerne maalte fra Roden til Spidsen 26^{mm} og vare aldeles indtrækkelige. Største Bredde af Kappen: 22^{mm}, af Hovedet, maalt midt over Øinene: 18^{mm}; midt over den brede Del af de stærkt udviklede Bugarme: 22^{mm}. De 3 øverste Par af Armene — Rygarmen og de to Sidearme — ere næsten lige lange og forenede ved Grunden i to Femtedele af deres Længde (indtil 8de Par af Kopper); sete fra Rygsiden synes de derfor saa meget korte, og Hovedet i Forhold dertil og til Kappen saa stort. Bugarmene ere derimod spaltede meget dybt ned, og dette i Forbindelse med den meget store Udvikling af deres ydre Siderand giver dem den meget betydelige Overvægt over de andre Arme, som slaaer Øiet saa stærkt, enten Dyret sees fra Rygsiden eller fra Bugsiden, men især dog fra denne sidste, hvad Figurerne 1 og 2 tilstrækkeligen antyde. Det vil være umiskjendeligt, at Dyret og de nævnte Figurer af dette heri minde om saadanne gode Fremstillinger af *Sepia officinalis* L., som dem Verany i sit smukke Værk*) har givet pl. 24 fig. a og b; men disse ere efter Hannen, vort Dyr er en Hun.

*) Les Céphalopodes de la Méditerranée. Gènes. 1847—51.

Hovedets og Armenes Overflade havde overalt et meget rynket Udseende, og Mellemrummene mellem Furerne stode ofte knudeformig eller poseformig frem, saaledes som det er søgt gjengivet i den forstørrede Figur af Armen (fig. 6), navnlig paa Armens Sider. Her er det endog noget vanskeligt at skjelne den smalle Randhud langs med Sugekop-Rækken (membrana cupulorum) fra de lange valkeagtige Rynker. Stærkest og mest eiendommelig var Rynkningen paa Bugarmenes Bugflade, hvor det næsten fik Udseende af at den frembragtes ved et Næt af Kjertler.

Ingen af de otte Arme havde flere end to Rækker af Sugekopper i Armens hele Udstrækning; i Forhold til Dyrets ringe Størrelse vare disse derimod meget store; de fjernede sig meget fra Kugle- eller Halvkugleformen og kunde snarest kaldes brikke- eller skiveformede (fig. 8). Da de lodret paa Randen havde meget stærke Furer, lignede de næsten en Katte-Ost (Spaltefrugten af *Malva*). Hornringen var tandet paa Randen og Aabningen paa Sugekoppen kun liden.

Antallet af Sugekopper paa de tre øverste Armpar var omtr. 30 Par, paa Bugarmene nogle flere (omtr. 36); de nederste 8—9 Par vare heftede paa den Del af Armene, der var forbunden ved Svømmehud; de øvrige paa den frie Del, og her stode de saa tætte, at de paa Grund af en ganske svag Forkortning af Armene, for en Del tagformig dækkede hinanden (see fig. 6).

Fangearmene eller Tentaklerne, maalte fra deres Rod ved Mundlæberne indtil deres Spids, vare rigelig saa lange som Hoved og Arme tilsammen; de endte i en kort, men temmelig bred Tentakelkølle, hvis halvmaanedannede indre Flade var besat med 6 Rækker meget smaa, næsten énsstore Sugekopper, og hvis ydre Rand bar en kort, men temmelig bred Hudkam eller Vinge (see Fig. 7). Sugekopperne vare endnu mere brikkeformede end Armenes, i Omfang lige saa smaa som dem, der sad paa Armenes yderste Tiendedel.

Kroppen, der var bred og kort, som hos de mest kroptunge Sepier, var omgiven af en Finne saa at sige i hele dens Længde, da nemlig den i sin Forrand noget afrundede Finne baade fortsatte sig (paa 3^{mm} nær) til den øverste Rand af Kappen, og, uden at aftage synderlig i Bredde bagtil, stødte der saa tæt sammen med Finnen paa den modsatte Side, at der mellem de to Finner kun fandtes et snevert Udsnit i Dyrets Midtlinie. Paa Rygsiden var Kappen noget rynket, men stærkere rynket var den paa Bugfladen, især langs med Kroppens Sider og imod Bagenden, og her antog Rynkningen et noget dendritisk eller druet Præg — Figuren 2. har søgt at gjengive dette — somom Huden udbredte sig over smaa kjertelagtige Masser. Langs med hver Side, i nogen Afstand fra Finnernes Tilhæftningslinie, findes der desuden en noget ophøiet Valk; denne er af 15^{mm} Længde og deles ved svagtfordybede Tver-Linier i en Række paa hinanden følgende Partier, der hvert danner ligesom en svagt hvælvet Forhøining, i hvis Midte der altid findes en dyb

Pore eller Grube. Af saadanne Porer talte jeg i hver Længderække 12, og alle disse vare ved en smal Længdefure satte i Forbindelse med hinanden (sé fig. 10); da jeg modtog Dyret, vare de fyldte med en noget hærdet Slimmasse. — Endnu maa mærkes, at Kappens Forrand paa Rygsiden kun viste en svag Convexitet op imod Nakken, medens den paa Bugsiden dannede et stærkt og dybt Udsnit, der optog den nederste Del af Tragten (sé fig. 2).

Tragten selv var middellang og veludviklet, havde ingen »Tømmer« (brides supérieures), men en bred og omrullet indre Klap eller saakaldt Tunge.

Rygskallens svage Udvikling antydedes allerede ved den Blødhed og Eftergivenhed, som bemærkedes paa Dyrets Rygflade. Efterat Kappens ydre Væg var gjennemskaaret i Midtlinien og Skallen forsigtig udtaget, viste det sig ogsaa, at denne i flere Henseender var eiendommelig: Den var papirtynd og gjennemsigtig, af et ægdannet, men dog svagt femkantet Omrids, ligesaa lang som Kappen, men ikke fuldt saa bred. Talrige fine Vækststriber, der løb langs med dens Rand, viste, at Pladen ligefra en tidlig Alder af havde havt væsenlig den samme Form. Uagtet Tyndheden kunde man tydelig under en stærk Lupe skjelne mellem de to Lag, der yderst beklæde Sepiernes Skal, nemlig et overordenligt tyndt og næsten hindeagtigt mellemste Lag, svarende til det sædvanlige Hornblad, og et fernisagtigt Overtræk derover, der i tørret Tilstand viste sig perlemorglindsende og svagt nupret, modsvarende den grynede, rynkede Kalkskorpe hos Sepien. Paa Underfladen var afsat en meget tynd, cellet Kalkmasse, svarende til den, som er saa eiendommelig hos *Sepia*, men kun over en lille Del af Skallen udbredte denne tynde og triangulære Beklædning sig; de taglagte Afsætninger, hvoraf den var dannet, vare meget korte i Forhold til deres Bredde, og den største eller forreste af dem naaede ikke nær til Rygskallens Forrand, saa at den slet ikke beklædte noget af Pladens forreste Femtedel; det mest Besynderlige var dog, at Kalkmassens Forrand ikke er parallel med Skallens Rand, men overskjærer dennes Vækststriber under en meget betydelig Vinkel. Afseet fra en svag Bølgning i Contouren, kunde man betegne denne Kalkmasses Forrand som staaende næsten lodret paa Dyrets Længdeaxe, og derved fremkommer netop Massens ovennævnte triangulære Skikkelse.

Paa Grund af samtlige disse Forhold kan jeg ikke andet end betegne min nye kapske Blæksprutte, saa nær den end staaer Sepiaerne, som en egen Slægt, der foreløbigen, saalænge kun én Art er kjendt, maaske kunde karakteriseres saaledes:

Hemisepius n. g.

Animal e Sepiarum familia et ipsi *Sepiæ* generi valde affine et habitu simillimum, sed differt:

1. *forma et textura* testæ internæ s. *Sepii*, qvod latum, tenerum, submembranaceum, subpellucidum, fragilissimum, subtus rudimentis solummodo loculamentorum calcareorum vestitum est.
2. *armis brachiorum*, brachiis omnibus per totam longitudinem serie modo duplici cupularum instructis; cupulis singulis disciformibus.
3. *structura pallii*, ad utrumqve latus in superficie ventrali seriem longitudinalem pororum s. cavernularum præbentis.

Min nye Forms Berettigelse til at optræde som egen Slægt ligeoverfor de hidtil kjendte talrige Arter af Sepier, kan dog ikke staae fuldelig klar, forend det tillige oplyses, hvorvidt der hos denne store Række af Arter findes eller ikke findes væsentlige Modificationer i de Bygningsforhold, paa hvilke der ovenfor ved Hemisepiens Karakteristik blev lagt nogen særlig Vægt, eller som i Beskrivelsen bleve nærmere fremhævede som Afvigelsespunkter fra Sepiaformerne. Vi kunne derfor ikke undgaae at kaste et Blik tilbage paa Arterne indenfor selve *Sepia*-Sægten, forsaavidt disse ere os fuldstændig bekjendte, men ville da tillige tage Hensyn til de enkelte nye Arter, der findes i vort Museum og som endnu ikke maatte være blevne beskrevne.

Kjertelgruber eller Kjertelporer, som dem der ovenfor omtaltes hos vor Hemisepie at ligge i to Længderækker paa Bugfladen i nogen Afstand fra Kropsiderne, kjendes aldeles kke hos noget sepiaagtigt Dyr, ja heller ikke hos nogetsomhelt andet Dyr af den store Gruppe af Dekapoder, hvortil Sepierne og deres Frænder Loliginerne høre. Den eneste Blæksprutte i det Hele, der er mig bekjendt at frembyde lignende Porer og Gruber, og just paa Dyrets Underflade, men talrigere og i større Udbredning, er et Medlem af Sepiola-Rossiafamilien, *Sepiola lineola* *Quoy & Gaimard*. Denne Kappens eiendommelige Udstyr med dybe Porer fremtræder der i Forbindelse med andre Eiendommeligheder, som utvivlsomt maae stemple Formen som en egen, fra *Sepiola* vel adskilt Slægt, og den har ogsaa af D'Orbigny faaet et eget, men destoværre slet dannet Slægtsnavn: *Sepioloidea* *). Allerede paa Grund af denne Analogi turde man formode', at Tilstedeværelsen af de i Længderækker stillede Gruber hos *Hemisepius* ville være af en større Betydning og optræde i Forening med andre Eiendommeligheder.

Fra Kappens Ydre vende vi os til Armenes Længdeforhold og Udstyr med Sugekopper.

---

*) Smlgn. Férussac et D'Orbigny: Céphalopodes Acétabulifères, Sepiola pl. 3 (fig. 11 *Sepioloidea lineolata* (Q. Gm.), copieret i Mollusques Fossiles et Vivants pl. 9 fig. 1); men jeg sammenstiller Grubesystemet hos min *Hemisepius* med det hos *Sepioloidea* ikke alene ifølge Figuren, skjøndt denne er meget betegnende, men ifølge Undersøgelser, anstillede i Aaret 1859 paa Originalexemplaret, der findes i Pariser-Museet.

Hvad for det Første Armenes gjensidige Længde og Førhed angaaer, da finde vi som almindelig Regel hos Arterne af Slægten *Sepia*, at fjerde Par, eller Bugarmene, baade ere de længste og de føreste, at derefter kommer tredie Par, medens Rygarmene og de øverste Sidearme pleie at være de korteste. Den nedenforstaaende af D'Orbignys store Cephalopodværk uddragne Sammenstilling*) er tilstrækkelig til at gjøre dette anskueligt i sin Almindelighed. Afvigelser i dette Forhold ere hos D'Orbigny egentlig kun anførte for een Art, hvis første Armpar (Rygarmene) er længere end fjerde, om end ikke betydeligt (nemlig hos *Sep. Orbignyana* Fér. = *elegans* Blv.). Men en væsenlig og mere paafaldende Afvigelse i dette Forhold viser en af vort Museums nye Arter, hvilken jeg ligeledes skylder den forannævnte Velynders Iver og Interesse, men som er fra Japan og der indsamlet af Kapt. Andréa i Aaret 1869 i flere Individer. Denne nye Art har nemlig det andet Armpar (øvre Sidearme), der ellers hører til de kortere, ikke alene længere end de øvrige, men ogsaa betydeligt længere; den har dernæst det forlængede Parti af Armen aftrindet og udstyret med smaa Dvergsugekopper, som om dette Armpar var delvis traadt over i en anden Funktion (maaskee som et Slags Føleredskaber?). Det er næsten, som om denne smukke *Sepia* derved gjorde et begyndende Tilløb til de saa aldeles abnormt og pidskeformigt forlængede Armpar, som findes hos en oceanisk Blæksprutte fra det samme store Verdenshav, hvilken jeg i Museet har foreløbig opstillet under Navnet *Onychoteuthis (??) lorigera;* men sandsynligvis er den en ny Slægt. Dennes andet Armpar ere dobbelt saa lange som Kroppen og de andre Arme**). For at give Læserne et Begreb om denne Arms særegne Uddannelse og og det fremmede Udseende, den paatrykker vor japanske *Sepia*-Art, henviser jeg til T. 1. fig. 11, hvor Arten under Navn af *Sepia Andreana Stp.* findes af denne Grund just frem-

---

*) Betegnes Armparrene paa den gængse Maade, saa at de tælles fra Rygsiden (1) til Bugsiden (4), ville de 13 med fire ligelig udviklede Sugekoprækker udstyrede Arter, som D'Orbigny har optaget i sit store Værk, give følgende Forhold:

S. Bertheloti	D'Orb.	4. 2. 1. 3.
S. Hieredda	Rang.	4. 3. 1. 2.
S. Rouxii	D'Orb.	4. 3. 2. 1.
S. Savignyi	Blv	4. 3. 2. 1.
S. latimanus	Q. G.	4. 3. 2. 1.
S. officinalis	Linn.	4. 3. 2. 1.
S. tuberculata	Lmk.	4. 3. 2. 1.
S. vermiculata	Q. G.	4. 3. 2. 1.
S. aculeata	v. Hass.	4. 3. 2. 1.
S. Blainvillei	D'Orb.	4. 3. 1. 2.
S. inermis	v. Hass.	4. 3. 1. 2.
S. ornata	Rang.	4. 3. 1. 2.
S. rostrata	D'Orb.	4. 3. 2. 1.

**) Individet er udskaaret af en Kaskelot, derfor kan det ikke fuldstændigen beskrives, da Armene ere blevne stærkt angrebne af Mavesaften og derved have mistet med faa Undtagelser sine Sugekopper.

stillet fra Siden. Forholdet mellem Armenes Længde er iovrigt hos denne Art efter Formlen: 2, 1, 3, 4.

I de otte Armes Uddannelse i Længde og Styrke frembyder altsaa den nye Form, jeg har kaldt Hemisepius, ikke noget afvigende Forhold fra det, der findes hos *Sepia*-Arterne; meget mere, den stemmer just heri overens med det, der findes som Norm hos det overveiende Flertal af de kjendte Arter. Men helt anderledes stiller Sagen sig, naar hensees til Armenes Udstyr med Sugekopper. Det er i den Henseende Regel hos *Sepia*-Arterne, at alle Armene bære fire, ligelig udviklede Længderækker af Sugekopper. De mindre Afvigelser herfra, som vore systematiske Værker hidtil i deres Beskrivelse af Arterne have fremhævet, ere kun tre, idet

1. *Sepia capensis D'Orb.* har vel paa alle sine Arme fire Rækker af Sugekopper, men Rækkerne ere uligestore; de to midterste beskrives og afbildes ikke lidet større end Siderækkerne. (Sé Fér. & D'Orb. Céphalop. acét. pl. 17 fig. 19.)
2. *Sepia Orbignyana Fér.* har et lignende Forhold af to større og to mindre Rækker paa sine Bugarme, medens de tre andre Armpar nok have fire ligestore Rækker paa den nederste Halvpart, men i den ydre kun to Rækker. (Sé Fér. & D'Orb. Céph. acét. pl. 27 fig. 1.)
3. *Sepia elegans D'Orb.* (= *biserialis Mntf.*) har fire Rækker i den ydre Halvdel af de tre Arme, og kun to Rækker ved Grunden eller i den indre Halvdel, medens det ene Armpar (Rygarmene) helt igjennem kun har to Rækker. (Sé Fér. & D'Orb. Céph. acét. pl. 27 fig. 5.)

Til disse 3 Afvigelser seer jeg mig imidlertid istand til at foie tvende andre, hentede fra vort eget Museums Materiale, nemlig:

4. *Sepia Andreana*, den foran nævnte nye Art fra Japan med de forlængede, pegefingerlignende øverste Sidearme, har paa den forlængede Del af disse Arme kun to Rækker af Sugekopper, og en svag Tilnærmelse dertil synes ogsaa at findes i Spidsen af de andre Arme; men ellers have Armene, alle fire, i hele deres øvrige Udstrækning fire ligelig udviklede Koprækker (sé T. 1 fig. 15 og 16). — Og endelig vil
5. *Sepia tuberculata Lmk.* — hvis mine to foran omtalte større Individer fra Cap virkeligen, som jeg antager, høre til denne Art — findes at have, som alle Sepierne, fire ligeligen udviklede Sugekop-Rækker paa den indre Halvpart af alle Armene, men i den ydre derimod at have otte Længderækker. (Sé fig. 20 T. 1).

Uagtet disse forskjellige Tillæmpninger, hvorved det normale Firtal i Sugekop-Rækkernes Optræden hos Sepierne bliver hos én Art til et Total for en enkelt Arms Vedkommende, eller hos tre andre for en vis Strækning — snart den indre, snart den ydre — af Armen, eller endelig hos atter andre fordobles til otte, vil det dog nok skjonnes, at *Hemisepius*, ved at optræde med to og kun to ligelig udviklede Rækker paa alle fire Armpar, afviger ikke

uvæsenlig fra de talrige *Sepia*-Arter, tagne hver for sig, og alle i Forening. Betydningen af Afvigelsen forstærkes under alle Omstændigheder ikke lidet derved, at Sugekopperne i de to Rækker tillige have en anden Form end hos Sepierne. Ingen kjendt Art af disse har sine Sugekopper saa nedtrykte, at de blive næsten brikformede.

Tentaklerne ere fuldt tilbagetrækkelige i særegne Rum paa Siderne af Hovedet hos alle Arter af Sepier; de ere ogsaa tilbagetrækkelige hos *Hemisepius*, og den ene var helt tilbagetrukket i sit Rum, da Dyret modtoges i Museet; Tentakelkøllen afviger ikke fra Sepiernes ialmindelighed og stemmer navnlig aldeles med visse Sepiers. Det kan ikke være overraskende, at ikke Tentaklerne, ligesaafuldt som Armene, frembyde os større Forskjelligheder fra Sepiernes, thi det er idetmindste hos de littorale Blæksprutter Tilfældet, at Slægtsforskjelligheden er langt mere udtrykt i Armene end i Fangarmene, hvilke sidste i Reglen kun frembyde iøinefaldende Artsmærker.

Nu staaer egentlig kun tilbage at omtale med faa Ord de Uddannelser, som den hele Række af hidtil kjendte *Sepia*-Arter viser os i deres indre Skelet, i Rygskallen. Det kan ikke nægtes, at naar vi tage den hele Række af Rygskaller for os, som tilhøre de kjendte Arter af Blæksprutter, da er der i visse Henseender ikke ringe Forskjel imellem Ydregrændserne i deres Forhold. Naar vi f. Ex. sammenligne Omridsene af slige langstrakte, elegante Former som *Sepia elongata*, *S. rupellaria* o. fl., med dem af de brede ovale hos *S. tuberculata*, *S. officinalis*; eller f. Ex. sammenholde Fastheden af den ydre Kalkskorpe hos *S. tuberculata* og andre med den tyndere hos *S. inermis* og lign., eller Tykkelsen af Underfladens mægtige, cellede Kalkpolstre hos *S. Lefebrei* o. fl. med de tyndere og kun lidet hvælvede Lag hos *S. aculeata* eller *S. rostrata**), eller vi betragte den forskjellige Uddannelse som Skallen frembyder bagtil, om den — hvad de fleste Arter vise — der er udstyret med en kortere eller længere, lige eller skraat udstaaende, eller endog i Halvspiral**) opadbøiet Kalkpig, eller om den mangler aldeles en saadan pigartet Forlængelse (som *S. inermis*, *S. tuberculata* o. fl.); fremdeles om der paa Skalpladens bagerste Begrændsninger afsættes en svagere eller stærkere Randvalk af Kalk, saa at der ligesom dannes en indre dyb Hule i denne Ende af Skallen, f. Ex. hos *S. rostrata*, o. fl., da er alt dette Forskjelligheder i Uddannelsen af dette Hudskelet, som ikke ere ubetydelige, og som ere af allerstørste Vigtighed for os, fordi de ere udprægede i faste eller haarde Dele af Dyret og saa meget mere egne sig til Artskarakterer. Men med alle disse Ændringer i Uddannelsen erkjendes dog let, selv mellem de fjerneste Extremer af en saadan Række af Rygskaller, en langt større indre Forbindelse og Overensstemmelse, end imellem Hemisepiens og samtlige Sepiearters, og dette Gab imellem dem har nok sit Udtryk i den overordenlig tynde og svage Udvikling af Rygskallen hos *Hemisepius* i det Hele, men dog særligst

*) og *Sepia brevimana* Stp. n. sp. **) *Sep. recurvirostra* Stp. n. sp.

i dets triangulære fortil afskaarne cellede Kalkmasse, hvis tynde Kalklameller ikke afsættes parallelt med Hornpladens Rande i den forreste Halvdel.

Der bliver altsaa med Hensyn til Hemisepiens Selvstændighed som Slægt, saa vidt jeg kan skjønne, kun ét Spørgsmaal tilbage, som endnu burde besvares, nemlig om denne lille Form ikke muligvis var et ungt Dyr af en større Art, der senere hen under dets Væxt maaske vilde forandre Sugekoppernes Form og forøge Sugekoprækkernes Antal eller vilde indhente den Uddannelse af Skallens Masse, der manglede den, for at blive mere overensstemmende med de øvrige Sepier? Dette kan imidlertid besvares aldeles benegtende og med allerstørste Sikkerhed.

Vel er mit *Hemisepius*-Individ kun 53mm langt, og der er følgelig kun faa af *Sepia*-Arterne, der i fuld udvoxen eller allerede befrugtningsdygtig Tilstand optræde med saa ringe en Størrelse, men saadanne kjende vi dog, f. Ex. netop vore smaa europæiske Arter fra Middelhavet (*Sep. elegans Blv.* og *Sep. biserialis Mtft.*), og fra Lidenheden kan der altsaa ikke sluttes til Ungdom. Baade af de nævnte smaa Arter og af flere af de store Arter kjendes yngre Tilstande, og vort Museum har ogsaa Rækker af saadanne, og det lige ned til en Størrelse, der kun er en Brokdel af Hemisepiens, og i alle de fremhævede Forhold er der en saadan Overensstemmelse imellem disse mindre Individer og de større, at man ad Analogiens Vei maa paastaae, at en senere Antagelse af andre Forhold, der gik mere over til de egentlige Sepiers, for Hemisepiens Vedkommende vilde føre til de allerstørste Urimeligheder. Ikke at jo Blæksprutte-Klassen frembyder Exempler, og talrige Exempler paa, at Ungerne og de yngre Individer ere afvigende fra de ældre, ja endog saa meget afvigende, at jeg paastaaer, at man baade har opført dem som egne Arter og som egne Slægter, ja endog henført dem til andre Familier, end de udvoxne, ligesom man har henført de mandlige og kvindelige Individer til forskjellige Grupper af Arter; — tværtimod! Klassen frembyder saa mange Exempler herpaa, at man endogsaa rent ud kan sige, at det er just paa Grund af at disse Kjøns- og Udviklingsforhold oversees i Reglen, at endnu i vor Tid Indblikket i Blæksprutteklassens Systematik og Bygning er saa mangelfuldt. Men ligesom Forvandlingen (Metamorphosen) i Insekt- og Krebsdyrklasserne fortrinsvis er stærk i visse af hver Klasses Ordener, svagere og næsten forsvindende i visse andre, saaledes er det ogsaa her; Graden af Omdannelsen under Dyrets Væxt er langt større hos de pelagiske tifoddede Blæksprutter end hos de littorale, og iblandt disse sidste høre ganske vist *Sepia*-Arterne til dem, der fra den alleryngste Alder ere mest conforme i indre og ydre Bygning med de ældre. Det har just været et stort Uheld for vore Studier, at man fra et vist Indtryk, modtaget fra disse Kystformer, var gaaet saa let ind paa Forestillingen om, at Forandringen efter Alderen var i det Hele saa ubetydelig, saa at man ikke engang endnu er paa sin Post ligeoverfor de unge Loliginer, endsige da ligeoverfor de mindre let tilgængelige unge

Ommatostrepher og Onychoteuther. Selv om man vilde forestille sig Ændringen hos Sepierne efter Alderen mange Gange større end den virkelig er, vilde der ikke blive noget at jevnføre med den Omdannelse, som f. Ex. Hemisepiens Sugeskaale eller Rygskal maatte undergaae for at komme nogenlunde nær til Sepiernes; Rygskallen maatte jo endog forandre det hele System i dens nedre Kalklags Afsættelse. Der kan af alle Sammenligligninger imellem Hemisepien og yngre eller mindre Sepier kun drages én naturlig Slutning, og det er denne, at Hemisepien, om den end blev dobbelt saa stor eller flere Gange større, vilde optræde med de samme Forskjelligheder fra Sepierne, som vort lille Individ nu viser.

Men vor *Hemisepius*, det vil sige den nu for os liggende Art af denne Slægt, bliver efter al Sandsynlighed ikke synderlig større end dette vort Individ, maaske ikke engang dobbelt saa stor. Dette viser nemlig selve Individet; thi det er ikke alene, som foran er sagt, en Hun, men tillige en allerede forsaavidt befrugtet Hun, at den har modtaget Hannens Sædmasser (Spermatophorer) paa de bestemte Steder, hvor Sepierne og deres nærmeste Slægtninge modtage dem, og Individet maa altsaa betragtes som kjønsmodent, i hvert Fald som parringsmodent. Til nærmere at oplyse dette faktiske Forhold, henviser jeg for det Første til den Figur, der Pl. II. fig. 1 i forstørret Maalestok fremstiller Mundaabningen og dens Omgivelser hos Hemisepien, paa hvilken Figur man imod Mundlæbernes nedre Rand, navnlig paa den Del, der er lige overfor Bugarmene, vil finde Sædbossernes (Spermatophorernes) Indhold i lange, tynde, pølseformede Skikkelser tilhæftede Læben netop saaledes, som man ellers finder dem anbragte hos denne Gruppe af de littorale Blæksprutter. Dernæst maa jeg henvise til mine almindelige Udtalelser om Sædmassernes Anbringelse hos Blækspruttehunnerne i min ældre Afhandling om Hektokotyler og hektokotyliserede Arme hos de mandlige Blæksprutter.*) Efterat have i denne Afhandling 1856 paavist Hektokotyliseringen af een af Armene i Forplantningens Tjeneste hos de mandlige Blæksprutter som et gjennemgaaende Forhold i Klassen, siges der m. H. t. Hektokotylisationens Betydning og det modsatte Kjøn S. 29:

«Retten til paa denne Maade, som her er skeet, at anvende den hektokotyliserede Arm som en Maalestok for den naturlige Sammenstilling af Formerne, ligger i dennes Betydning for den hele Forplantning. Det vilde være utænkeligt, at den forskjellige Optræden af denne Uddannelse snart paa det ene, snart paa det andet Armpar, snart paa høire og snart paa venstre Side, snart i Spidsen og snart ved Grunden o. s. v., ikke skulde betinge ligesaa mange Forskjelligheder i Stedet og Maaden, paa hvilke Sædmasserne anbragtes paa

*) Hectocotyldannelsen hos Octopodslægterne *Argonauta* og *Tremoctopus*, oplyst ved Iagttagelse af lignende Dannelser hos Blæksprutterne ialmindelighed. Kgl. D. Vidensk. Selsk. Skrifter. 5 Række, naturv. og mathemat. Afdeling. 4. Bind. 1856.

Hunnerne, og forsaavidt som det synes, at Sæden neppe uvilkaarligen eller mechanisk, men med bevidste Bevægelser udstødes eller udgydes paa Æggene, da endogsaa i selve Befrugtningsmaaden. Hvad en simpel Eftertanke i den Henseende giver os, bekræftes ogsaa ved Iagttagelserne. Sædmasserne findes virkeligen anbragte paa meget forskjellige Steder og under meget ulige Forhold, noget, jeg skal kortelig fremstille i en anden Afhandling, af hvilken jeg her kun skal fremstille det almindelige Resultat, at Slægterne *Sepia*, *Sepioteuthis* og *Loligo*, altsaa alle de, der have den venstre Bugarm omdannet, anbringe Sædmasserne paa den indvendige Side af Hunnernes Læber (membrane buccale *D'Orb.*), hvilke derfor ogsaa i dette Øjemed synes særlig udrustede, hvorimod jeg aldrig hos nogen af de andre Decopoder har fundet Sæden heftet til dette Sted, men fundet den paa forskjellige Steder af Kappen eller Indvoldene, hos *Ommatostrephes* f. Ex. dybt inde i Kappehulen i*) Ryggens Midtlinie o. s. v.»

Saavidt Udtalelserne i 1856.

For nu at vise, hvorledes Anbringelsen af disse Legemer paa saa usædvanlige Steder i Virkeligheden tager sig ud hos Sepiernes og Loliginernes Familier, har jeg af de Figurer, der vare bestemte til den ovennævnte Afhandling, som destoværre ved injuria temporum ikke endnu er bleven publiceret, udvalgt nogle enkelte, der tilhøre Typer af forskjellige Hovedgrupper af Sepier og gjengiver dem her paa T. II. — Dennes Figur 2 fremstiller saaledes Mundpartiet af *Sepia hieredda*, en Art, der er nær forbunden med *Sep. officinalis* og saaledes kan repræsentere Sepierne med stærkere udviklet og bagtil i Pig endende Rygskal, og dens Figur 3 det samme Parti af *Sepia inermis*, der er en god Type for hines Modsætninger: Sepier med svagere udviklet Rygskal uden al Forlængelse bagtil. Dens Figurer 7 og 8 endelig ere af *Sepioteuthis sepioidea*, som Repræsentant for Loligernes store Gruppe; hos dem Alle vil det sees, at Sædmasserne staae i deres pølseformede Sække hæftede til den indvendige Side af Læben, og saaledes har jeg ogsaa fundet dem hos talrige andre Arter af de nævnte Slægter, kun med nogen ringe Forskjel i Udbredningen efter de forskjellige Arter, og de forskjellige Individer indenfor Arten.

Jeg har ikke alene gjerne grebet denne Leilighed til at offenliggjøre disse faa Figurer, men endogsaa anseet det for min Pligt at gjøre det til Lettelse og Veiledning for Andre. Thi uagtet disse interessante og vigtige Forhold have været offenlig fremhævede for 18 Aar siden, saa har det dog vist sig, at Andre ikke ere komne til nogen klar Opfattelse af dem, og det uagtet de have den største Betydning for den praktiske Erkjendelse af Cephalopodernes Kjøn og Alder. Da man i senere Aar har nægtet, at de i Aqvarier iagttagne mandlige Sepier havde hektokotyliserede Arme, skjønt det er saa let at paavise dette

---

*) «i» staaer der her af Uagtsomhed istedetfor «imod»; de ere snarest stillede ved Gjellernes Rod, under og indenfor denne.

paa ethvert mandligt Individ, bør man imidlertid ikke undres over, at det har været saalænge, inden det tilsvarende Forhold paa Hunnernes Læber blev anerkjendt, uagtet Sepier nu ere holdte i flere Aqvarier.

Til de ovenfor nævnte Figurer har jeg endnu føiet, i Fig. 5, en Fremstilling af Mundpartiets Omgivelser hos det kvindelige Individ af den foran omtalte kapske *Sepia tuberculata*, fornemlig fordi det viste det Besynderlige, at Hannen havde anbragt den hele Spermatophor-Hær paa den udvendige Side af Læben, hvad jeg ikke har seet hos nogen anden *Sepia*, om jeg endog nu og da har iagttaget, at enkelte Spermatophorer ere blevne hæftede sondrede fra de øvrige og paa den udvendige Side, eller endog nær Armenes Rod. (Smlg. f. Ex. Fig. 8.) Hvorvidt den her iagttagne Stilling muligvis ikke er mere end tilfældig for Arten, tør jeg ikke afgjøre, da jeg kun har havt dette ene Individ til Undersøgelse. Men under alle Omstændigheder er Iagttagelsen af denne Stilling ikke uden Interesse just med Hensyn til Hemisepien. Det vil nemlig af Figur 1 sees, at om end ogsaa denne viser Spermatophorer anbragte paa det Læbeparti, som sædvanlig dertil benyttes hos Sepier og Loliginer, saa ere dog mange hæftede paa Randen af Læben og paa dens udvendige Side.

Det Foranstaaende vil, mener jeg, mere end tilstrækkelig godtgjøre, at vort Individ af Hemisepius, ifølge vore Kundskabers nuværende Standpunkt, **ikke** kan ansees for et yngre og uudviklet, men er et allerede udviklet.

Anmærkning.

Da virkelig brugbare Diagnoser ikke ville kunne gives af de i denne Afhandling nævnte nye, eller formentlig nye Arter, inden Diagnoserne af de tidligere beskrevne Arter af *Sepia* ere blevne gjennemsete efter Originalexemplarerne, eller dog først samtidig med en saadan Revision, maa jeg her indskrænke mig til følgende Oplysninger om dem.

Sepia Andreana er, som Figuren 11, Pl. I, antyder, en langstrakt, zirlig Art, i Kroppens Omrids nærmest at sammenligne med *S. Bertheloti* (Fér. D'Orb. Tab. 11 og 23), men med et saa langstrakt Sepium (fig. 12—14), at det nærmer sig til Skallen af *Sepia elongata* (Fér. D'Orb. Tab. 24), dog uden at have dennes Tykkelse. Ved det i Texten S. 474 omtalte Formforhold i Armene og navnlig andet Armpars Forlængelse og Trindhed fjerner den sig fra alle kjendte Sepier. Kun Hunner kjendes.

Sepia recurvirostra opstilledes i Museet oprindelig paa to Sepieskaller, hjembragte af Hr. Kaptain Strandgaard fra det sydlige Chinahav; flere ere senere hjembragte af andre. I Omrids svare de nærmest til D'Orbignys' Figur af *S. australis* (Fér. D'Orb. Pl. 8, fig. 4, 5), dog lidt mere langstrakte; men fra alle Sepieskaller, der ere mig bekjendte, udmærke de sig derved, at Spidsen (*rostrum*) er bøiet opad i en regelmæssig Halvbue eller Halvspiral, som et liggende ∾.

Sepia brevimana slutter sig under alle Omstændigheder nøie sammen med *S. rostrata*, *indica* og *aculeata*, men synes at have Tentakalkøllen kortere end nogen af disses. Den vil maaskee vise sig at være kun en Varietet eller yngre Form af én af de førstnævnte; men intet sikkert kan antydes, inden en i D'Orbigny's Originalbeskrivelse indtraadt Forvexling imellem Forholdene i disse Arters Sugekopper bliver udredt.

Forklaring af Figurerne paa Tavle I og II.

Tavle I.

Figg. 1—10 fremstille ***Hemisepius typicus*** nov. gen. et spec.

1. Dyret seet fra Rygsiden, i naturlig Størrelse.
2. Samme fra Bugsiden; naturlig Størrelse.
3. Rygskallen (*Sepium*), seet fra Bugsiden; naturlig Størrelse.
4. Samme fra Bugsiden, to Gange forstørret.
5. Samme fra Rygsiden, to Gange forstørret.
6. En Arm, forstørret tre Gange, seet fra den indvendige Side, for at vise Sugekoppernes Stilling i to Rækker langs ad hele Armen, deres Form og relative Størrelse.
7. En Tantakekølle, 7 Gange forstørret.
8. En Sugekop af Armen stærkt forstørret og seet noget fra Siden.
9. En Sugekop af Tentakelkøllen, seet i lignende Stilling som foregaaende, men meget stærkt forstørret.
10. Tre af Kjertelhøiene fra den venstre Side af Kappens Bugflade, med deres Gruber og den disse forenende Fure eller Rille; omtrent tre Gange forstørret.

Figg. 11—19 fremstille ***Sepia Andréana*** nov. spec.

11. Dyret i naturlig Størrelse, seet fra høire Side, for at vise Hovedets og Armenes Forhold til Kroppen samt den store Forskjel i Armenes gjensidige Længde, navnlig andet Armpars betydelige Overvægt over de andre Arme og dets særlige Uddannelse.

Explication des Figures des Planches I et II.

Planche I.

Les Fig. 1—10 représentent l'***Hemisepius typicus*** nov. gen. et spec.

1. L'animal vu de la face dorsale, en grandeur naturelle.
2. Le même vu de la face ventrale, en grandeur naturelle.
3. Le Sepium, vu de la face ventrale, en grandeur naturelle.
4. Le même, vu de la face ventrale avec un grossissement de 2 fois.
5. Le même, vu de la face dorsale, avec un grossissement de 2 fois.
6. Un bras, avec un grossissement de 3 fois, vu de la face interne, pour montrer la disposition des cupules en 2 rangées tout le long du bras, leur forme et leur grandeur relative.
7. Une massue d'un bras tentaculaire, avec un grossissement de 7 fois.
8. Une cupule d'un bras sessile, fortement grossie et vue un peu de côté.
9. Une cupule du tentacule, vue dans la même position que la précédente, mais très-fortement grossie.
10. Trois des petits mamelons porifères de la partie gauche de la face ventrale du manteau, avec la rainure qui réunit les pores; grossissement de 3 fois environ.

Les Fig. 11—19 représentent la ***Sepia Andreana*** nov. spec.

11. L'animal en grandeur naturelle vu du côté droit, pour montrer le rapport de la tête et des bras au corps, ainsi que la grande différence entre la longueur réciproque des bras, notamment le surpoids considérable de la deuxième paire de bras relativement aux autres bras, et la conformation particulière de cette paire.

12. Rygskjoldet (Sepiet) i naturlig Størrelse, seet fra Bugfladen.
13. Sammes nederste Ende, seet fra samme Flade, noget (tre Gange) forstørret.
14. Samme, seet fra Siden, ligeledes forstørret.
15. En af de korte Arme, seet fra den indre Side for at vise Sugekoppernes Størrelse og Ordning udad imod Spidsen. Noget (3 Gange) forstørret.
16. En af de meget forlængede Arme af andet Armpar, seet fra samme Side og i samme Forstørrelse, forat vise Sugekoppernes Stilling i to Rækker i den yderste Trediedel af Armen.
17. En Tentakelkølle i samme Forstørrelse.
18. En af Armenes Sugekopper, seet forfra, og forstørret.
19. Samme, seet fra Siden.

Figg. 20—21 tilhøre ***Sepia tuberculata*** Lmck.

20. En Arm, seet fra den indre Side, for at vise Sugekoppernes Stilling i otte Rækker i den yderste Femtedel af Armen.
21 a. b. c. En af de større Sugekopper paa Armen, seet forfra (a); sammes Hornring ligeledes seet forfra (b), og fra Siden (c).

Tavle II.

Øiemedet med samtlige Figurer paa denne Tavle er at give et Billede af den paafaldende Stilling, hvori Sædbøsserne (Spermatophorerne), mere eller mindre omdannede, findes anbragte hos de qvindelige Individer af Sepiernes og Loliginernes Familie, nemlig i Reglen paa den indvendige Side af den ydre Mundlæbe (membrane buccale). Kun undtagelsesvis, og formodenlig kun tilfældigen, paa sammes ydre Side.

Figg. 1—6 fremtille Munden og dens nærmeste Omgivelser hos forskjellige Arter af Sepiernes Familie:

1. af ***Hemisepius typicus*** Stp. ♀; forstørret $^4/_1$.
2. af ***Sepia hieredda*** Rg. ♀; forstørret $^3/_2$.
3. af ***Sepia inermis*** v. Hass. ♀; forst. $^2/_1$.
4. af ***Sepia aculeata*** v. Hass. ♀; forst. $^3/_1$; foruden den i usædvanlig høi Grad stærke Foldning og Krusning af Indsiden af det Læbeparti, hvori Sædbøsserne anbringes, viser denne Figur tillige det

12. Le Sepium en grandeur naturelle, vu de la face ventrale.
13. Extrémité inférieure du même, vue de la même face avec un grossissement de 3 fois.
14. La même vue de côté, avec le même grossissement.
15. Un des bras sessiles vu de la face interne, pour montrer la grandeur des cupules et leur disposition vers le sommet, avec un grossissement de 3 fois.
16. Un des bras très-allongés de la deuxième paire, vu de la même face et avec le même grossissement, pour montrer la disposition des cupules en deux rangées dans le tiers supérieur du bras.
17. Une massue tentaculaire avec le même grossissement.
18. Une des cupules des bras sessiles, vue de devant et grossie.
19. La même vue du côté.

Les Fig. 20—21 se rapportent à la ***Sepia tuberculata*** Lamarck.

20. Un bras vu de la face interne, pour montrer la disposition des cupules en huit rangées sur le dernier cinquième du bras à partir de la base.
21 a. b. c. Une des grandes cupules du bras vue de devant (a); l'anneau corné du même vu également de devant (b), et de côté (c).

Planche II.

Je me suis proposé, en publiant cette Planche, de donner une image de la situation singulière que les Spermatophores plus ou moins transformés occupent sur les individus femelles des familles des ***Sepias*** et des ***Loligiens***, à savoir sur la face interne de la membrane buccale, par exception et sans doute seulement par hasard sur la face externe de cette membrane.

Les Fig. 1—6 représentent la bouche et les parties buccales de diverses espèces de la famille des Sepias.

1. de l'***Hemisepius typicus*** Stp. ♀; grossissement de 3 fois;
2. de la ***Sepia hieredda*** Rg. ♀; grossissement de $^3/_2$ fois;
3. de la ***Sepia inermis*** v. Hass ♀; grossissement de 2 fois;
4. de la ***Sepia aculeata*** v. Hass ♀; grossissement de $^3/_1$ fois; outre la plissure excessivement prononcée de la face interne de la partie buccale, où les spermatophores sont fixés, cette figure montre en même

hidtil hos Sepia-Arterne ukjendte Forhold, at alle Ydrelæbens Flige ere udstyrede med 2—3 Sugekopper.

5. af samme Sepia et Parti af Sidevæggen af en af Krusningerne med enkelte og spredte Sædbosser.

6. af ***Sepia tuberculata*** Lmk. ♀; forst. $^3/_1$; Sædbosserne af Hannen afsatte udenpaa Ydrelæben eller Mundhuden, men vist kun tilfældigen.

Fig. 7—8 fremstille til Sammenligning med de i Figg. 1—6 givne Forhold hos selve Sepierne Munden og dens Omgivelser hos en enkelt Typ for Loliginernes Familie. Et Exempel paa det hos talrige Arter af Loligo og Sepioteuthis iagttagne Forhold afgiver her den almindelige vestindiske Sepioteuthis.

7. af ***Sepioteuthis sepioidea*** Blv. ♀; forst. $^3/_1$; den nedre Del af Læben er bredt nedad, for bedre at see Læbens Udstyr og de enkelte tilbageblevne, uforbrugte Spermatophorer.

8. af et andet Individ af samme ***Sepioteuthis***, hvis Mundhud samler sig om den nyligen modtagne Spermatophor-Hær; forst. $^2/_1$.

temps cette particularité jusqu'ici inconnue chez les Sépias, que tous les lobes de la membrane buccale sont munis de 2—3 cupules.

5. de la même Sépia, une partie de la paroi latérale d'une des plissures avec quelques spermatophores isolés;

6. de la ***Sepia tuberculata*** Lmk. ♀; grossissement de 3 fois; les spermatophores ont été déposés par le mâle à l'extérieur de la membrane buccale, mais sans doute accidentellement.

Comme comparaison avec les caractères donnés par les Fig. 1—6 pour les ***Sepias***, les Figg. 7—8 représentent la bouche et les parties buccales chez un type de la famille des ***Loligiens***. La ***Sepioteuthis*** commune des Indes Occidentales fournit ici un exemple des caractères observés chez de nombreuses espèces de ***Loligo*** et de ***Sepioteuthis.***

7. Parties buccales de la ***Sepioteuthis sepioidea*** Blv. ♀, avec un grossissement de 3 fois; la partie de la membrane buccale est étalée vers le bas, pour mieux montrer la structure de cette membrane et les spermatophores qui y sont encore restés.

8. Mêmes parties d'un autre individu de la même ***Sepioteuthis,*** dont la bouche se replie sur les spermatophores qu'elle vient de recevoir; grossies 2 fois.

Sur l'Hémisepius
un genre nouveau de la famille des Sépiens
avec quelques remarques sur les espèces du genre *Sépia* en général

par M. **I. Japetus S. Steenstrup.**

Dans le mémoire résumé ici, je donne d'abord un court aperçu de l'histoire du genre *Sépia* depuis le temps de Linné, en rappelant que ce genre, tel qu'il a été limité par Lamark en 1798, a conservé depuis lors la même signification, bien que le nombre de ses espèces ait beaucoup augmenté. Au lieu de deux espèces seulement qu'il comprenait du temps de Lamark, il en compte aujourd'hui plus de trente, dont un tiers, il est vrai, ne sont connues que par leur test (*Sepium*).

Les Sépias sont considérées avec raison comme des animaux littoraux, et on en trouve sur les côtes de presque toutes les mers; toutefois, les deux côtes de l'Amérique n'ont donné jusqu'ici que très-peu d'espèces. Croyant pouvoir établir que les espèces littorales des Céphalopodes n'ont pas en général une distribution géographique étendue, du moins pas aussi étendue que les formes océaniques ou pélagiennes, j'ai naturellement été amené à supposer que le genre Sépia doit renfermer un assez grand nombre d'espèces encore inconnues, et j'en indique aussi quelques nouvelles dans mon mémoire. Mais, en dehors des espèces nouvelles, il doit sans doute y avoir également d'autres formes encore plus modifiées qui pourraient se placer à côté du genre Sépia comme des genres distincts, et j'en donne une preuve dans ce mémoire, dont le but principal est de faire connaître aux zoologistes un petit Sépien que M. le capitaine Andréa m'a rapporté de Tafel-Bay, au cap de Bonne-Espérance, et que je publie ici avec des figures comme un genre à part, sous le nom d'*Hemisepius typicus*. En tenant compte, d'une part, des caractères communs que présentent toutes les espèces de Sépias connues jusqu'ici, ainsi que des modifications que ces caractères subissent souvent selon les espèces, et, d'autre part, des écarts considérables, dus au sexe, à l'âge, à la saison, qu'une longue étude des Céphalopodes[1]) m'a permis de constater chez des individus de la même espèce, j'établis provisoirement,

---

[1]) Ces différences entre des individus de la même espèce ont généralement passé inaperçues, et il en est souvent résulté une confusion déplorable dans la détermination des espèces et des genres, et même des familles.

jusqu'à la découverte de nouvelles formes, les trois caractères suivants pour mon *Hemisepius* considéré comme genre.

L'Hemisepius, qui ressemble du reste complètement à une Sépia, a 1) un manteau qui porte sur la face ventrale des pores profonds, lesquels, chez l'*H. typicus*, sont disposés en deux rangées de 12 pores chacune, une de chaque côté. Ces pores sont situés dans de petits mamelons, et réunis entre eux par une rainure longitudinale (voir la Fig. 10); 2) un test qui n'est qu'à moitié développé (d'où le nom, voir Fig. 3—5), comme les loculaments calcaires très-rudimentaires ne couvrent pas la partie antérieure de la lame dorsale, et que leur bord antérieur n'est pas parallèle au bord correspondant de cette lame excessivement mince, et 3) sur tous les huit bras, seulement deux rangées de cupules, qui diffèrent en outre de celles des vraies Sépias par leur forme très-déprimée et presque en disque plat. Même sans la présence des pores sur la face inférieure du manteau, chacun des deux derniers caractères, si l'on considère l'ensemble des espèces du G. Sépia jusqu'ici connues, eût suffi pour motiver l'établissement d'un nouveau genre; mais comme de pareils pores, que je sache, ne se trouvent que chez le genre *Sepioloidea*, et y sont accompagnés de caractères qui rendent toute naturelle sa séparation d'avec le genre *Sepiola*, j'ai cru devoir attacher d'autant plus d'importance à leur apparition chez l'Hemisepius.

L'individu mis à ma disposition étant de petite taille — il ne mesure que 53 millim. de long — il importait d'écarter toute idée que l'animal, en grandissant, pût perdre les caractères qui le distinguent de toutes les Sépias connues jusqu'ici, quant au faible développement de son test, à la forme particulière de ses cupules etc. Je fais donc voir que cet individu, qui est une femelle, et qui aurait bien pu grandir encore, doit être considéré comme adulte, puisqu'il était non seulement apte à se reproduire, mais avait déjà reçu des spermatophores dans l'endroit très-particulier où ils sont fixés sur toutes les *Sépias*, les *Sepioteuthes* et les *Loligines*, ainsi que je l'ai déjà, pour ces trois genres, établi il y a 18 ans dans mon mémoire sur les bras hectocotylisés chez les Céphalopodes mâles en général. Nous en reproduisons ici le passage suivant relatif à ces remarquables caractères, qui jusqu'à présent ont été beaucoup trop négligés par les naturalistes de certains pays:

«Le droit d'employer, comme nous l'avons fait ici, le bras hectocotylisé comme contrôle d'un groupement naturel des Céphalopodes, réside dans son importance pour la reproduction en général. Il est évident que cette structure particulière, tantôt d'une paire de bras, tantôt d'une autre, tantôt à droite, tantôt à gauche, tantôt au sommet, tantôt à la base etc., doit entraîner beaucoup de différences dans le lieu et le mode de fixation des masses spermatiques ou spermatophores, sur les femelles, et, en tant que le sperme ne semble pas être versé sur les oeufs par des mouvements involontaires ou mécaniques, mais conscients, dans la manière dont se fait la fécondation. Ce qu'une simple réflexion nous dit à cet égard est également confirmé par les observations. Les masses spermatiques sont en réalité fixées sur des endroits très-différents et dans des conditions très-inégales, chose que j'exposerai dans un autre mémoire dont je me borne à donner ici la conclusion générale, á savoir que les genres *Sepia*, *Sepioteuthis* et *Loligo*, par conséquent tous ceux chez lesquels j'ai trouvé le bras ventral gauche hectocotylisé, fixent les masses spermatiques sur la face interne de la membrane buccale des femelles, laquelle est organisée

spécialement dans ce but, tandis que, chez les autres Décapodes, je n'ai jamais trouvé le sperme fixé en cet endroit, mais en divers points du manteau ou des organes intérieurs, chez l'Ommatostrephes, par ex., bien en arrière dans la cavité du manteau, vers la partie médiane du dos». [1])

Après cette citation du mémoire de 1856, je termine comme il suit le mémoire sur l'Hemisepius:

«Maintenant, pour montrer comment l'application de ces corps spermatiques, sur des points si extraordinaires, se fait en réalité chez les familles des Sépiens et des Loligiens, j'ai, parmi les dessins destinés au mémoire mentionné dans celui de 1856, mais qui par *injuria temporum* n'a malheureusement pas encore été publié, choisi quelques figures représentant des types des principaux groupes des Sépias, et les reproduis ici sur la Pl. II. — La Fig. 2 représente ainsi la partie buccale de la *Sepia hieredda*, espèce très-voisine de la *Sep. officinalis*, et qui peut passer pour un type des Sépias à test assez fortement développé, et se terminant en arrière en forme de rostre, et la Fig. 3, la partie correspondante de la *Sepia inermis*, qui, comme contraste, fournit un bon type des Sépias à test plus faiblement développé et sans prolongement en arrière. Enfin la *Sepioteuthis sepioidea* des Fig. 7 et 8 est le représentant du grand groupe des Loligiens. Chez tous ces Céphalopodes, les masses spermatiques sont dans leurs sacs cylindriques toujours fixées à la face interne de la membrane buccale, car j'ai trouvé cette disposition chez beaucoup d'espèces de ces 3 genres, seulement avec de légères modifications suivant les différentes espèces et les différents individus de la même espèce.

Je n'ai pas seulement saisi avec plaisir cette occasion de publier ces quelques figures, mais j'ai même regardé comme mon devoir de le faire, afin qu'elles pussent servir de guide à d'autres et leur faciliter l'observation de ce trait curieux. En effet, bien que ces intéressants caractères aient été exposés publiquement il y a 18 ans, et qu'ils aient une très-grande importance pour une détermination sûre et facile du sexe et de l'âge des Céphalopodes, il n'en est pas moins vrai cependant qu'on ne s'en fait pas généralement une idée bien claire. Comme on a même nié dans ces dernières années que les Sépias mâles observées dans les aquariums eussent des bras hectocotylisés, quoiqu'il soit si facile de constater cette conformation d'un des bras chez tout individu mâle, il n'y a rien d'étonnant qu'on ait attendu si longtemps pour reconnaître le caractère correspondant sur la membrane buccale des femelles, bien qu'il existe à présent des Sépias dans plusieurs aquariums.

Aux figures dont je viens de parler, j'ai encore ajouté, dans la Fig. 6, la représentation des parties buccales de la femelle de la *Sepia tuberculata* du Cap, mentionnée plus haut (p. 472), parce qu'elle présentait cette singularité que le mâle avait fixé toute la masse des Spermatophores sur la face externe de la membrane buccale, chose que je n'ai vue chez aucune autre Sépia, bien que j'aie quelquefois observé que quelques spermatophores

---

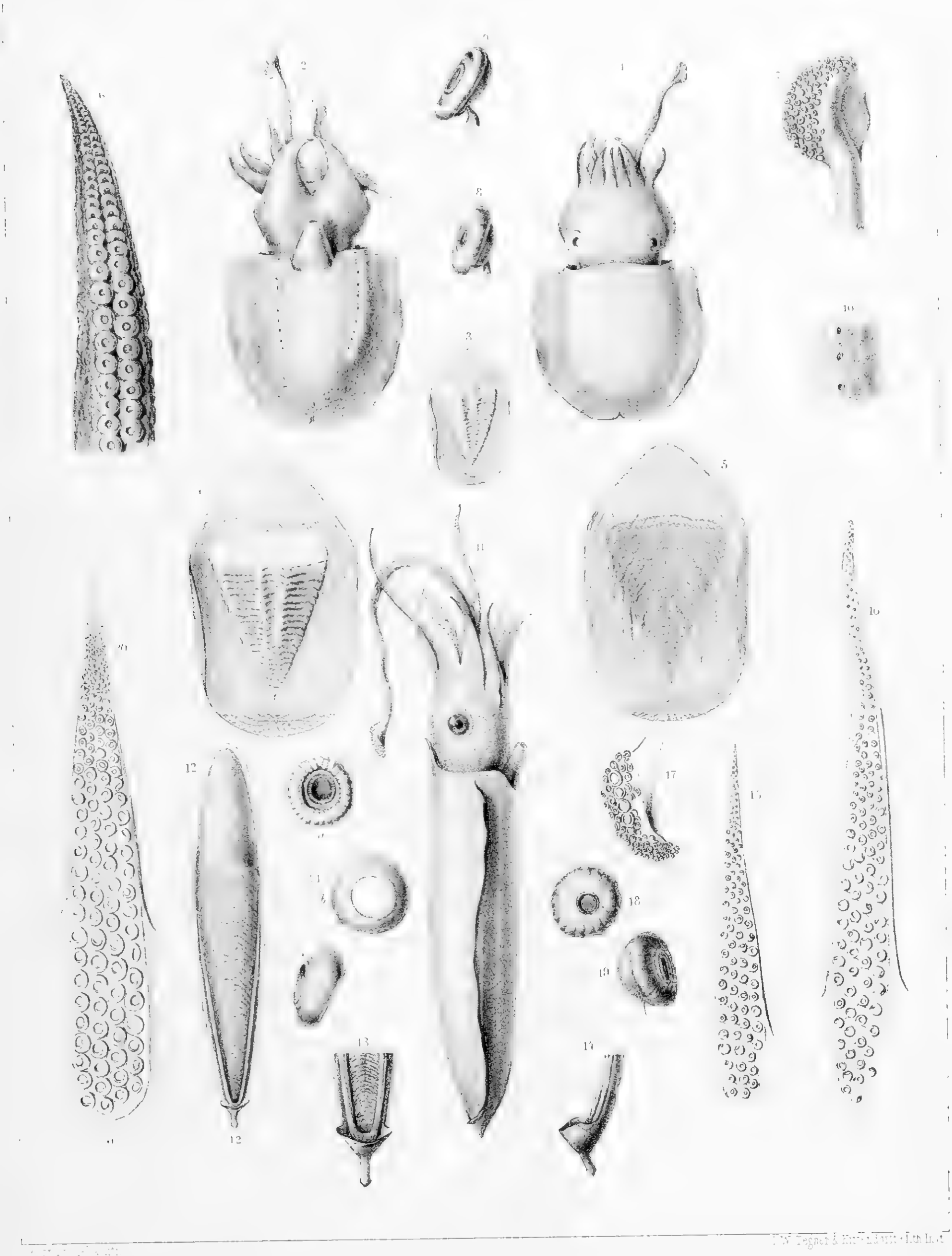
[1]) Mémoires de l'Académie Royale Danoise des Sciences V Série Vol. IV. 1856. p. 213 avec deux planches. [Trad. dans les Archives de Wiegmann, Erichson et Froschel pour 1857. p. 111— avec 2. pl.]

s'étaient séparés des autres et fixés sur la face externe, voire même près de la base des bras (voy. Fig. 8). Jusqu'à quel point cette disposition est tout à fait accidentelle chez la *S. tuberculata*, c'est ce que je ne saurais décider, comme je n'ai examiné qu'un seul individu. En tout cas, l'observation dont il s'agit n'est pas sans intérêt relativement à l'Hemisepius. On voit en effet que si, chez cette espèce, les spermatophores sont fixés sur la même partie de la lèvre qui remplit ordinairement ce rôle chez les Sépias et les Loligiens, il s'en trouve cependant sur le bord de la lèvre et même quelques-uns sur sa face externe.

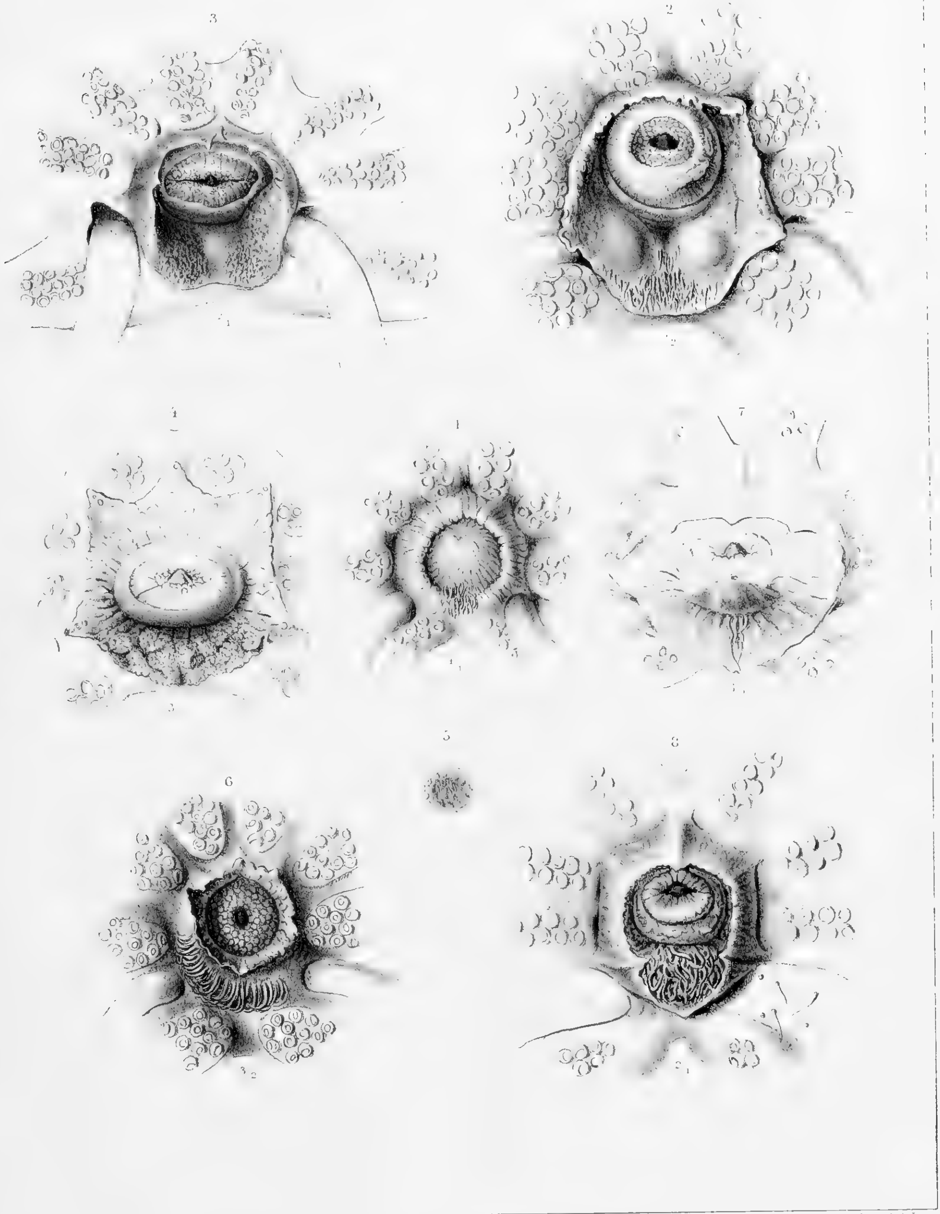
Ce qui précède suffira, je pense, à établir que, dans l'état actuel de nos connaissances, notre exemplaire de l'Hemisepius, quoique petit, ne doit pas être regardé comme un individu tout jeune et non développé, mais comme un adulte.

Nous ajouterons que, pour faciliter la comparaison des caractères de l'Hemisepius et des Sépias, les deux planches qui accompagnent ce mémoire renferment quant aux Sépias plusieurs détails jusqu'ici inconnus, et qui ont de l'importance au point de vue qui nous occupe. On verra, par ex., que, chez l'espèce qui me semble être la *Sepia tuberculata* Lmk., il y a huit rangées de cupules à l'extrémité des huit bras au lieu de quatre ou de deux, qu'une espèce nouvelle du Japon, la *Sep. Andreana*, a les bras de la seconde paire prolongés d'une manière extraordinaire, sans doute pour remplir quelque fonction particulière, et qu'il y a même des Sépias qui ont les lobes de leur membrane buccale pourvus de cupules, comme la plus grande partie des Loligiens, p. ex. la *Sepia aculeata* v. Hass. (voy. f. 4).

On trouvera enfin quelques remarques sur les espèces nouvelles citées dans le mémoire.



Figg. 1-10 Hemisepius typicus Stp. 11-19 Sepia Andreana Stp.; 20-21 Sep. tuberculata Lmk.



1. Hemisepius typicus Stp. ♀. 2. Sepia hieredda Rg. ♀. 3. S. inermis v. Hass. ♀.
4. 5. S. aculeata v. Hass. ♀. 6. S. tuberculata Lmk. ♀. 7. 8. Sepioteuthis sepioidea Blv. ♀

Experimentale og theoretiske Undersøgelser

over

Legemernes Brydningsforhold.

(Anden Afhandling)

Af

L. Lorenz.

Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd., X Bd. 8.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

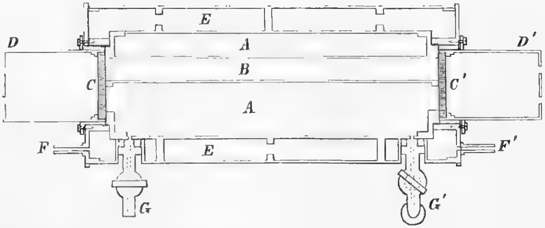
1875.

Det Maal, jeg i mine tidligere Undersøgelser (Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, 8 Bd.) havde sat mig, nemlig gjennem Studiet af Legemernes Lysbrydning og Farvespredning at komme til nærmere Kundskab om Legemernes indre molekulære Tilstande, har jeg ogsaa havt for Øje ved de nærværende Undersøgelser, som navnlig ere gaaede ud paa Bestemmelsen af Varmegradens og Tilstandsformens Indflydelse paa Brydningen og Farvespredningen.

Til Forsøgene over Dampes og Luftarters Brydning og Farvespredning har jeg benyttet Interferensmethoden paa samme Maade som ved mine tidligere Maalinger af Vandets Brydningsforhold ved forskjellige Varmegrader. Lyskilden var ligeledes her en Bunsens Brænder, hvis Flamme farvedes rød og gul ved en Asbestvæge, der stod i en Opløsning af Chlorlithium med lidt Chlornatrium. Som interfererende Spejle benyttedes de samme to Glasterninger og med den samme Opstilling, kun vare de stillede i en større Afstand fra hinanden, nemlig $1\frac{1}{2}$ Meter, medens Afstanden fra Lyskilden til den nærmeste Terning var $\frac{1}{2}$ Meter. Tillige vare Terningerne indhyllede i Bomuldsvat og den forreste spejlende Flade blev beskyttet ved et Stykke Pap, der dækkede Midten af Fladen, alt i den Hensigt at undgaa de Fejl, der vilde hidrøre fra Temperaturforandringer af Glasset under Forsøgene.

De to parallele fra den første Terning tilbagekastede Lysbundter gik, omtrent 28 Millimeter adskilte fra hinanden, igjennem det i omstaaende Figur fremstillede Apparat, som hvilende i et Træstativ var opstillet midt imellem de to Terninger.

Den indre Del af Apparatet bestaar af en cylindrisk Beholder A, hvorigjennem gaar et cylindrisk Rør B. I hvert af Beholderens Endestykker er anbragt to cirkulære Aabninger, hvoraf den ene fører ind til Beholderen, den anden til Røret B. Disse Aabninger ere lukkede med to Spejlglasplader C og C', idet en i et Ottetal udskaaren meget tynd Kautschukplade er lagt imellem ethvert af Glassene og Cylindrens Endeplader. Glaspladerne ere stærkt trykkede imod disse ved Hjælp af Rørene D og D', som have en ydre Krave, der med Skruer kan trykkes ind imod Cylindren. Disse to Rør ere tildels lukkede ved



Enderne med to Papskiver med Udskæringer for de to Lysbundter, der skulle passere dem tilligemed de cirkulære Aabninger, som føre til Beholderen A og Røret B.

Den indre Beholder er omgivet af en anden ydre lukket Cylinder EE', der tjener til at optage en Strøm af Vand eller Vanddampe, som ledes ind ved F og ud ved F'. For at faa denne Strøm til at gaa rundt om hele den indre Cylinders Overflade, er Mellemrummet imellem denne og den ydre Cylinder afdelt ved Tværskillerum med Gjennemboringer afvexlende for neden og for oven (i Figuren, som viser Apparatet set fra oven, ere disse Gjennemboringer lagte hen til Siderne). To med Haner lukkede Rør G og G' føre ud fra den indre Beholder.

Afstanden imellem de to Glasplader var 314,52 Millimeter ved 0° C., og den indre Beholders Rumfang 1823,6 Kubikcentimeter ved 8° C.

De Straaler fra Lysgiveren*), som kastes tilbage fra den første Ternings forreste Flade, gaa igjennem Røret B til den anden Terning, hvor de blive brudte og kastede tilbage fra den bageste, med Sølvspejl belagte Flade, medens de i den første Terning brudte og fra den bageste Spejlflade tilbagekastede Straaler gaa igjennem Beholderen A til den anden Terning. Tilbagekastede fra dennes forreste Flade forene de sig her med det andet Straalebundt, og de ved disse to Straalebundters Interferens fremkomne gule og røde Striber blive da, ligesom i mine tidligere Forsøg, iagttagne gjennem to, med et Traadkors forsynede Samleglas.

Forsøgene med dette Apparat over Luftarternes Brydning bleve enten paabegyndte, efter at den indre Beholder var pumpet lufttom, idet da Luften ledcdes ind i Beholderen, medens Striberne, som under Tilledningen passerede Traadkorset, taltes, indtil Luftens Tryk var bleven lig med den ydre Lufts Tryk, eller ogsaa begyndte Tællingen med Beholderen fyldt med Luft og fortsattes, indtil den var pumpet lufttom. Den indre

*) Foruden *Na-Li*-Flammen prøvede jeg ogsaa som Lyskilde et Geisslers Brintrør, som stilledes vertikalt i Flammens Sted. Jeg fik med dette ret gode røde og blaa Interferensstriber, men de vare dog ikke saa tydelige som de røde og gule Striber fra Flammen, og da Maalingerne med dem meget trættede Øjet, indskrænkede jeg mig til de sidste.

Beholder var ved Røret G forbunden med en Geisslers Luftpumpe og ved Røret G' med den ydre Luft eller med Udviklingsapparatet for den Luftart, som skulde undersøges. Det er en Selvfølge, at jeg ved alle Forsøg overbeviste mig om, at Striberne vare fuldstændig stillestaaende, naar Hanerne til den indre Beholder vare lukkede. I Virkeligheden viste der sig hverken ved Hanerne eller ved Glassene C og C'', naar disse vare omhyggelig paasatte, nogen Vanskelighed for en fuldstændig Afspærring baade af den indre Beholder og af Røret B, som indeholdt afspærret atmosfærisk Luft.

Under Forsøget cirkulerede Vand af den omgivende Lufts Varmegrad igjennem den ydre Beholder E, og Varmegraden af det ind- og udstrømmende Vand maaltes med to Thermometre. Ved næsten alle Forsøgene med Dampe af forskjellige flygtige Vædsker og ved enkelte Forsøg med atmosfærisk Luft blev derimod Apparatet opvarmet ved Tilledning af Vanddampe til den ydre Beholder, og Forsøget blev da først paabegyndt, naar Vanddampene i længere Tid vare strømmede igjennem Ledningen og ud af Afledningsrøret F', hvorfra de ledede ned i koldt Vand for at fortættes.

Vædsken, hvis Dampe skulde undersøges, blev indesluttet i en lille Kolbe, som bestod af en paa et Glasrør med Glashane udblæst Kugle. Kolben indtil Hanen rummede 18,181 Kubikcentimeter. Efter tildels at være fyldt med Vædsken, blev Kolben vejet, hvorpaa den med Hanen lukket sattes i Forbindelse med Apparatets indre Beholder ved en Kautschukprop, som kunde sættes lufttæt ind i Udvidelsen ved G'. Dernæst aabnedes Metalhanen G' til Beholderen, som forud var pumpet lufttom, medens Striberne iagttoges. Havde man saaledes sikret sig, at Forbindelsen med Kolben var lufttæt, idet Striberne maatte vise sig stillestaaende, blev atter Metalhanen lukket, Glashanen aabnet og nu aabnedes igjen Metalhanen forsigtig under samtidig Iagttagelse af Forskydelsen af Striberne, medens Dampene fra Vædsken i Kolben strømmede ind i den indre Beholder. Kolben opvarmedes samtidig mer eller mindre ved Spildedampene, der fra F' ledede ned i et Glas Vand, som omgav Kolben, og saaledes blev Fordåmpningen af Vædsken og dermed Hastigheden af Stribernes Forskydelse reguleret. Efter at dernæst et vist Antal Striber var passeret Traadkorset, og Bevægelsen af dem var bleven kjendelig langsommere, lukkedes Metalhanen ved G' og Hanen G aabnedes, hvorved Dampene fra den indre Beholder gik over i Ledningen til Luftpumpen, i hvilken Ledning de bleve fortættede i en med en Kuldeblanding af Is og Kogsalt omgivet Beholder. Dernæst lukkedes atter Hanen G, Stribernes Stilling iagttoges og Hanen G' aabnedes, hvorpaa Dampene paany fra Kolben strømmede ind i den indre Beholder, medens samtidig Stribernes Forskydelse iagttoges. Saaledes fortsattes flere Gange, indtil et passende Antal Striber vare talte, og sluttelig blev Glashanen for Kolben lukket, denne blev taget fra Apparatet, afkølet og vejet. I Reglen blev før Vejningen Hanen aabnet et Ojeblik, da jeg foretrak ved Beregning at indføre Korrektionen for den tilstedeværende

Luft i Kolben fremfor at stole paa, at Glashanen under Afkølingen skulde vedblive at slutte fuldstændig lufttæt, hvilket ved de første Forsøg viste sig ikke altid at være Tilfældet.

Samtidig med Forskydelsen af de gule Striber iagttoges de røde, hvis Tilstedeværelse meget tjente til Lettelse og Kontrol ved Tællingen. Ved Begyndelsen af denne indstilledes i Reglen Striberne saaledes, at Traadkorset gik igjennem Midten af en rød Stribe, som selv var nøjagtig midt imellem to gule. Naar nogle Striber vare passerede Traadkorset, dækkedes her den røde Stribe af en gul, hvorpaa atter den røde Stribe traadte frem. Til en Forskydelse af 8 gule Striber svarede omtrent 7 røde, og ved at tælle et større Antal og mærke sig, naar en rød Stribe atter nøjagtig viste sig midt imellem to gule, kunde man meget nøje bestemme Forholdet imellem Antallet af de samtidig forskudte røde og gule Striber.

Beregningen af disse Forsøg er følgende. Lad L være af Afstanden imellem de to Glasplader C og C', l_{Na} Bølgelængden af Natriumstriberne for det tomme Rum, S_{Na} Antallet af gule Striber, som passere Traadkorset, medens den i den lufttomme indre Beholder indledede Lufts eller Damps Brydningsforhold stiger til n_{Na}, saa er

$$L\,(n_{Na} - 1) = l_{Na} S_{Na}. \qquad (1)$$

Længden af den indre Cylinder, maalt med Kathetometer, var 313,72^{mm} ved 0° C., hvortil svarer 314,30^{mm} ved 98° C., som kunde antages at være Cylindrens Varmegrad, naar den var opvarmet af Vanddampe. Tykkelsen af begge de tynde, stærkt sammenpressede Kautschukplader imellem Cylindrens Endeflader og Glassene var tilsammen 0,8^{mm} ved sædvanlig Temperatur og 0,4^{mm} ved 98° C. Altsaa er i Millimeter

$$L = 314{,}52 \text{ ved } 0° \quad \text{og} \quad 314{,}70 \text{ ved } 98° \text{C}.$$

Ifølge Ångstrøm er endvidere Bølgelængden for de to Na-Striber i Timilliontedel Millimeter 5889 og 5895, hvoraf Middelværdien er 5892. Reduceret til det tomme Rum er saaledes i Millimeter

$$l_{Na} = 0{,}00058937.$$

Heraf følger for Forsøgene ved de lavere Varmegrader

$$n_{Na} - 1 = \frac{0{,}00058937}{314{,}52}\, S_{Na} = 0{,}0000018739\, S_{Na}. \qquad (2)$$

Denne Formel faar umiddelbar Anvendelse ved Forsøgene over Luftarterne, hvis Brydningsforhold for det gule Lys herved bestemmes, svarende til det Tryk og den Temperatur, som den til den tomme Beholder tilledede Luft har ved Ophør af Tællingen.

Med de tilsvarende Betegnelser for det røde Li-Lys er endvidere

$$\frac{n_{Li} - 1}{n_{Na} - 1} = \frac{l_{Li}}{l_{Na}} \cdot \frac{S_{Li}}{S_{Na}} = 1{,}138953 \cdot \frac{S_{Li}}{S_{Na}}, \qquad (3)$$

hvor Forholdet imellem de to Bølgelængder er det af Dr. Ketteler fundne Tal.

Til Beregning af Forsøgene over Dampes Brydning gives Ligning (1) Formen

$$\frac{L(n_{Na}-1)}{D}=\frac{l_{Na}S_{Na}}{D},$$

idet D er Dampens Vægtfylde, svarende til Brydningsforholdet n_{Na} for det gule Lys. Ved Forsøgene er Antallet S_{Na} af de til en vis Vægt G af Dampe svarende forskudte gule Striber bestemt. Er nu den indre Befolders Rumfang V, og maales dette i Kubikcentimeter, Vægten G i Gram, saa er $D=\frac{G}{V}$. Sættes endvidere $\frac{S_{Na}}{G}=s_{Na}$, idet s_{Na} er Antallet af gule Striber, som forskydes for hvert Gram Dampe, der ledes ind i Beholderen, saa bliver Ligningen

$$\frac{n_{Na}-1}{D}=\frac{l_{Na}}{L}V\,s_{Na}. \qquad (4)$$

Ved Vejning af det Vand, som den indre Beholder kunde rumme, fandtes dens Rumfang at være 1823,6 Kubikcentimeter ved 8° C., hvoraf for 98° C. findes

$$V=1832,8.$$

Indsættes ovenfor tillige den til samme Temperatur svarende Værdi af L, nemlig 314,70, erholdes for nærværende Forsøg

$$\frac{n_{Na}-1}{D}=0,0034325.\,s_{Na}. \qquad (5)$$

Ved altsaa at multiplicere det Antal Striber, som forskydes ved Fordampning af 1 Gram Vædske, med det angivne Tal, erholdes for Dampene Forholdet imellem $n_{Na}-1$ og den til dette Brydningsforhold svarende Vægtfylde. Da dette Forhold uden kjendelig Afvigelse er konstant for alle Værdier af n og D, er det netop den Størrelse, som det er af størst Betydning at kunne bestemme umiddelbart af Iagttagelserne, og det er i denne Hensigt, at Forsøgene ere anordnede og Apparatet konstrueret paa den angivne Maade. For de faa Dampe, hvis Brydning hidtil har været undersøgt, har det altid været det til et bestemt Tryk og en bestemt Varmegrad svarende Brydningsforhold, som man har søgt at bestemme, men det er bekjendt, hvad allerede Dulong har fundet, at Forholdet imellem $n-1$ og Trykket ikke er konstant paa Grund af Damptrykkets Afvigelse fra den Mariotteske Lov. Man maa altsaa for at finde den ovennævnte Brydningskonstant, som er den for den paagjældende Damp karakteristiske Størrelse, gaa til andre Forsøg, nemlig Forsøgene over Forholdet imellem Dampenes Tryk og Vægtfylde ved den givne Varmegrad, og kommer saaledes til at indføre nye Fejlkilder i Resultatet.

Endelig maaltes ogsaa Brydningsforholdet og Vægtfylden ved forskjellige Varmegrader for de Vædsker, hvis Dampes Brydning var bestemt paa den angivne Maade. Hertil benyttedes et hult Prisme af eet Stykke Glas med en cylindrisk Gjennemboring, der kunde lukkes med to planparallele Glas. Disse kunde alene ved Vedhængningen holde sig fast ved Prismet, men bleve dog yderligere fastholdte ved to Kautschukbaand, der vare befæstede til en Metalring om Glassene. Prismets Hulning kunde fyldes fra oven gjennem

en anden Gjennemboring, hvori under Forsøgene blev indsat et lille, i 5te Dels Grader inddelt Thermometer, som lukkede for Aabningen.

Til Maalingerne benyttedes en større, af Prof. Jünger forfærdiget, optisk Theodolith, der ligesom det Meyersteinske Spektrometer var forsynet med Kollimator og Iagttagelseskikkert. Delekredsen var inddelt i 12te Dels Grader, og ved Hjælp af to Aflæsningsmikroskoper kunde hver to Sekunder direkte aflæses. Et lille med Stilleskruer forsynet Bord til Prismet var anbragt midt i Delekredsen og saaledes forbunden med denne, at en Omdrejning af Bordet for sig, uafhængig af Delekredsen, ikke ret vel lod sig udføre. Derimod kunde Kikkerten og Delekredsene omdrejes saavel samlede som hver for sig.

Iagttagelserne med dette Apparat bleve anstillede paa en Maade, som var forskjellig fra den hidtil til nøjagtige Maalinger næsten udelukkende anvendte Methode, der som bekjendt gaar ud paa Bestemmelsen af Minimalafvigningen. Maalingerne gik nemlig ud paa Bestemmelsen af den Vinkel, som Prismet maatte omdrejes for at give den samme Afvigning. Af denne Vinkel i Forbindelse med Prismets brydende Kant og den konstante Afvigning beregnedes da Brydningsforholdet for den iagttagne Bølgelængde. Efter de mange Maalinger, jeg har udført efter denne Methode, som Apparatets Konstruktion, nemlig Prismebordets faste Forbindelse med Delekredsen, ledede mig ind paa, kan jeg anbefale den baade som nøjagtig og som bekvem i Udførelsen.

Er n Prismets Brydningsforhold for en bestemt Bølgelængde, ere i og i_1 Indfalds- og Brydningsvinklen for den indfaldende Straale, i_1' og i' de tilsvarende Vinkler for den udtrædende Straale, saa har man

$$sin\, i = n\, sin\, i_1 \quad \text{og} \quad sin\, i' = n\, sin\, i_1',$$

hvoraf følger

$$sin \frac{i+i'}{2} cos \frac{i-i'}{2} = n\, sin \frac{i_1+i_1'}{2} cos \frac{i_1-i_1'}{2},$$

$$cos \frac{i+i'}{2} sin \frac{i-i'}{2} = n\, cos \frac{i_1+i_1'}{2} sin \frac{i_1-i_1'}{2}.$$

Betegnes endvidere Prismets brydende Kraft ved $2p$, den konstante Vinkel, som den udtrædende Straale danner med den indfaldende, eller Afvigningen ved $2a$, og er endelig den Vinkel, som Prismet maa omdrejes for paa ny at give denne Afvigning, $2b$, saa har man

$$i+i' = 2(a+p), \quad i_1+i_1' = 2p, \quad i-i' = \pm 2b.$$

De to foregaaende Ligninger blive herved

$$sin\,(a+p)\, cos\, b = n\, sin\, p\, cos \frac{i_1-i_1'}{2},$$

$$\pm\, cos\,(a+p)\, sin\, b = n\, cos\, p\, sin \frac{i_1-i_1'}{2}.$$

Elimineres heraf $i_1 - i_1'$ og sættes for Kortheds Skyld

$$\frac{\sin(a+p)}{\sin p} = n_0, \tag{6}$$

saa erholdes

$$n^2 = n_0^2 - \frac{(n_0^2 - 1)\sin^2 b}{\cos^2 p}. \tag{7}$$

Disse to Ligninger tjene til Beregningen af n^2, efter at de tre Vinkler p, a og b ere bestemte ved Forsøg. Det ses af den sidste Ligning, at n_0 er Brydningsforholdet for den Lysbølge, for hvilken man har $b = 0$, og for hvilken altsaa den vilkaarlig valgte konstante Afvigning netop er Minimalafvigningen. Den hertil svarende Stilling af Prismet er dettes Midtstilling i enhver Forsøgsrække over forskjellige Bølgelængder ved samme konstante Afvigning, idet Ligning (7) viser, at $+b$ og $-b$ giver den samme Værdi af n, saaledes at man altsaa, naar Prismet er omdrejet Vinklen $2b$, har drejet det Vinklen b til begge Sider for den ovennævnte Midtstilling. Har man altsaa for en Spektrallinie aflæst paa Delekredsen de to Vinkler α og α_1, som svare til den givne Afvigning, saa er Prismets Omdrejning $2b = \pm(\alpha - \alpha_1)$, medens dets Midtstilling er ved Vinklen $\frac{\alpha + \alpha_1}{2}$ paa Delekredsen. Er endvidere for en anden Linie de aflæste Vinkler β og β_1, saa er Midtstillingen ved $\frac{\beta + \beta_1}{2}$. Heraf følger $\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1$, og saaledes videre for alle de iagttagne Bølgelængder. I disse Relationer imellem de aflæste Vinkler har man en god Kontrol for Maalingerne.

Forsøgslokalet var paa det højtliggende Frederiksberg Slot, og Apparatet var opstillet saaledes, at man igjennem dets Kikkert kunde iagttage Horisonten i flere Miles Afstand. Efter at Apparatet var bleven opstillet med Omdrejningsaxen vertikal, rettedes Kikkerten, som var bevægelig om en horisontal Axe, mod Horisonten og indstilledes skarpt paa de fjerneste Gjenstande. Kikkerten blev dernæst vendt mod Kollimatorrøret, hvis belyste Spaltes øverste Halvdel blev blændet saaledes, at Spalten set i Kikkerten kun naaede op til og netop berørte Traadkorsets horisontale Traad; desuden blev Kollimatorens Udtræk stillet saaledes, at Spalten saas skarpt.

Naar Vædsken, hvis Brydningsforhold skulde bestemmes, var hældet i Prismet, blev hver Gang først dettes brydende Kant maalt. Kikkerten rettedes mod Vinduesprosserne i en fjernt liggende Bygning, Prismet stilledes paa Apparatets Bord, og Kikkerten omdrejedes, indtil Spejlbilledet af Sprossen fra en af Prismefladerne viste sig i Feltet. Dernæst rettedes Prismet ved Bordets Stilleskruer, hvorpaa det omdrejedes tilligemed Delekredsen, medens Kikkerten var gjort fast, indtil Spejlbilledet fra den anden Prismeflade saas i Kikkerten, og Bordet rettedes atter ved Stilleskruerne saa længe, indtil begge Spejlbillederne af

Miren saas nøjagtig i Traadkorset. Prismets brydende Kant var saaledes indstillet vertikalt, og dens Vinkel maaltes nu paa Delekredsen.

Som Lyskilde benyttedes samtidig *Li*-*Na*-Flammen og et Geisslers Brintrør, som var opstillet imellem Flammen og Kollimatorrørets Spalte. Naar Lyset fra denne efter at være brudt i Prismet blev iagttaget i Kikkerten, saas her 5 lyse vertikale Linier, af hvilke dog i Reglen kun de 4 benyttedes, da den violette Brintstribe ofte ikke var tilstrækkelig tydelig. Kikkerten drejedes om sin horisontale Axe saaledes, at Striberne netop naaede op til Traadkorsets horisontale Traad, og indstilledes ved Omdrejning om Apparatets vertikale Axe saaledes, at en Lysstraale med en lidt stærkere Brydning end Brintflammens *F*-Stribe vilde have Minimum af Afvigning i Retning af Kikkertens Axe. Ved Prismets Omdrejning med Delekredsen passerede da efterhaanden alle 4 Striber to Gange forbi Traadkorset.

Efter at Thermometret i Prismet var iagttaget, blev Delekredsen omdrejet saaledes, at Striberne i Reglen i Ordenen Li, $H\alpha$, Na, $H\beta$ — $H\beta$, Na, $H\alpha$, Li passerede Traadkorset, og de tilsvarende 8 Vinkler bleve aflæste, hvorefter Thermometret atter blev iagttaget. Nu fjernedes Prismet, Delekredsen blev gjort fast, Vinklen aflæst og Kikkerten ført tilbage til Kollimatorrørets Retning, saaledes at dets Spalte saas i Kikkertens Traadkors. Ved Aflæsningen af Vinklen fandtes saaledes den under Forsøget konstante Afvigning, og Forsøget var da sluttet.

Den største Fejlkilde i Forsøgene var Temperaturforandringen; naar denne beløb sig til mere end nogle faa Tiendedele af en Grad, bleve derfor Maalingerne forkastede. For at erholde Iagttagelser over Brydningsforholdene ved forskjellige Varmegrader, bleve Forsøgene anstillede til forskjellige Aarstider. Med Hensyn til Bedømmelsen af Resultaternes Nøjagtighed skal jeg særlig henvise til de i det følgende angivne Bestemmelser af Æthyl-Ætherens Brydningsforhold, for hvilke Beregningen, paa Grund af dette Stofs regelmæssige Farvespredning, er udført saaledes, at den tillige kan tjene som Kontrol for Nøjagtigheden.

Endelig er ogsaa for de samme Vædsker, hvis Brydningsforhold blev maalt, Vægtfylden bleven bestemt ved forskjellige Varmegrader, i Reglen ved Vejning af et i en $0{,}06^{mm}$ tyk Platintraad ophængt Legeme (et forgyldt 20 Grams Vægtlod), som holdtes nedsænket i Vædsken. Disse Forsøg bleve ligeledes kun anstillede ved den omgivende Lufts Varmegrad.

Alle de benyttede Stoffer ere leverede mig fra Universitetets kemiske Laboratorium af Dr. phil. H. Topsøe, hvem jeg herved bringer min forbindtlige Tak for den Omhu og Dygtighed, som var anvendt paa Stoffernes Fremstilling i kemisk ren Tilstand.

Forinden jeg gaar over til Angivelsen af de enkelte Forsøgsresultater, maa jeg endnu gjøre Rede for de theoretiske Betragtninger, som have været de ledende for mig. Jeg har i min første Afhandling om dette Æmne theoretisk søgt af Lysets Bølgetheori og navnlig ved at gaa ud fra den af mig i Pogg. Ann. Bd. 118 og 121 fremsatte Lystheori

at udlede Forbindelsen imellem Legemernes Brydningsforhold og deres Vægtfylde ved forskjellige Varmegrader og under forskjellige Tilstandsformer. Jeg havde herved kun taget Hensyn til det absolute, til en uendelig stor Bølgelængde reducerede, Brydningsforhold, og fandt denne ved A betegnede Størrelse tilnærmelsesvis bestemt ved Ligningen

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v = P\left(1-\frac{a^2}{v^2}\right), \tag{8}$$

gjældende for isotrope Legemer, idet v er Rumfanget af Vægtenheden af Legemet, og P og a to Størrelser, som, forudsat at Legemet bestaar af Molekuler, der ere adskilte ved Mellemrum, hvori Lysets Hastighed er den samme som i Verdensrummet, forblive konstante ved Forandring af Varmegrad og Rumfang, hvis Molekulerne selv forblive upaavirkede af disse Forandringer.

Dette Resultat er uafhængigt af Molekulernes Form. Vil man nu gaa et Skridt videre og beregne det til en hvilkensomhelst Bølgelængde svarende Brydningsforhold n, frembyder Beregningen store Vanskeligheder. Jeg har derfor kun gjennemført den for det simple Tilfælde, at Molekulerne ere kugleformede, og idet jeg tillige er gaaet ud fra, at Lysets Hastighed er ens overalt indenfor de kugleformede Molekulers Grænser, har jeg fundet tilnærmelsesvis

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}v = \frac{n'^2-1}{n'^2+2}v'\left(1+\frac{n'^2-1}{n'^2+2}\cdot\frac{16\pi^2}{5}\cdot\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\right). \tag{9}$$

Heri er n' Brydningsforholdet indenfor et Molekul eller Forholdet imellem Lysets Forplantningshastighed i Verdensrummet og i Molekulernes Indre, v' Rumfanget af en Vægtenhed Molekuler, λ Bølgelængden og ε Molekulernes Radius. Det ses af dette Resultat, at man kan forklare sig Legemernes Farvespredning uden at antage nogen for de forskjellige Lysimpulser eller Bølgelængder forskjellig Forplantningshastighed indenfor selve Molekulerne, idet nemlig ovenstaaende Ligning i det væsentlige stemmer overens med Loven for Farvespredningen, naar n' antages uafhængig af λ.

Skjøndt de simple Forudsætninger, under hvilke den sidste Ligning er udledet, selvfølgelig i Virkeligheden ikke kunne antages at være opfyldte, er dog det angivne Resultat ikke uden Anvendelse, idet man kan betragte ε mere almindelig som en lavere Grænse for Radius af Molekulernes Virkningssfære, betragtet som den Kugleflade om et Molekul, indenfor hvilken Molekulets Virkning paa Lysets Forplantningshastighed er kjendelig.

Det sidste Led i Ligning (9), nemlig

$$\frac{n'^2-1}{n'^2+2}\cdot\frac{16\pi^2}{5}\cdot\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2},$$

lader sig numerisk bestemme af Iagttagelserne, og man finder f. Ex. for flere af de i det

følgende undersøgte Stoffer denne Størrelse omtrent lig 0,02 for *Na*-Striben. Heraf findes, da $\frac{n'^2-1}{n'^2+2}$ nødvendigvis maa være mindre end 1,

$$\varepsilon > 15 \text{ Milliontedel Millimeter,}$$

som altsaa her er den af Farvespredningen udledede lavere Grænse for Virkningssfærens Radius. Quincke (Pogg. Ann. Bd. 137) har af sine Forsøg over Vedhængningen fundet denne Radius for forskjellige Stoffer omtrent lig 50 Milliontedel Millimeter, som er i god Overensstemmelse med den ovenfor fundne lavere Grænse.

Som Resultat af alle Forsøgene fremgaar det, at Størrelsen $\frac{n^2-1}{n^2+2}v$ tilnærmelsesvis er konstant selv ved meget store Forandringer af Rumfanget v, hvorfor jeg vil kalde denne Funktion Stoffets Refraktionskonstant. Fuldkommen konstant er denne dog ikke, idet den i Reglen voxer lidt ved en samtidig Forøgelse af Rumfang og Temperatur. Ved nogle Forsøg med atmosfærisk Luft og Ætherdampe har jeg søgt at bestemme den direkte Indflydelse af Temperaturforandringer paa Refraktionskonstanten, og jeg har fundet, at en saadan ikke i nogen kjendelig Grad er til Stede, ligesom ogsaa de samme Forsøg saa vel som Forsøg med Svovlkulstofdampe have vist, at Farvespredningen er nøjagtig den samme ved sædvanlig Temperatur som ved 100° C. Da tillige den omtalte Forøgelse af Refraktionskonstanten ved en Rumfangsforøgelse stemmer overens med det i Ligning (8) angivne theoretiske Resultat og altsaa kan forklares uden at antage nogen Forandring af Molekulerne selv, saa fremgaar det som Resultat af Forsøgene og Theorien, at Molekulernes Forhold til Lyset forbliver i en paafaldende Grad og maaske ofte fuldstændig upaavirket af Forandringer i Varmegrad, Vægtfylde og Tilstandsform.

Det er den samme Slutning, som mere umiddelbart kan udledes af Spektrallinierne, hvis Stilling i Spektret saa godt som fuldstændig er upaavirket af Stoffets Varmegrad og Tæthed, idet man, hvilken Theori man iøvrigt vil følge, maa betragte Spektrallinierne som særlig afhængige af Molekulerne og disses Forhold til Lyset, saa at altsaa Spektralliniernes Uforanderlighed viser tilbage til selve Molekulernes Uforanderlighed.

I Modsætning hertil fremtræder der derimod en ofte stor Forandring af Refraktionskonstanten, af Farvespredningen, saa vel som ogsaa af Spektrallinierne, naar en Blanding af forskjellige Stoffer gaar over til en kemisk Forening af dem, hvorved det altsaa tydelig viser sig, at Forandringen her strækker sig til selve Molekulerne.

Konsekvenserne af de Slutninger, jeg her har draget, træder frem paa andre Punkter i Videnskaben. Man har saaledes, for at bringe de af Stødtheorien afledede Resultater med Hensyn til Luftarternes Diffusjon, indre Gnidning og Varmeledning i Overensstemmelse med Forsøgene, antaget enten med Maxwell, at to Molekuler frastøde hinanden indbyrdes med en Kraft, som forholder sig omvendt som 5te Potens af deres Afstande, eller med Stefan,

at Molekulerne forholde sig som elastiske Kugler, hvis Diametre forandre sig med Temperaturen, idet de skulde forholde sig omvendt som 4de Potens af deres absolute Temperatur. Det forekommer mig, at der allerede paa Forhaand hertil kan gjøres den Indvending, at de Kræfter, som virke imellem Molekulerne, i begge Hypotheser ikke ere af den Beskaffenhed, at de med Nødvendighed medføre en stedse varende Bevægelse af Molekulerne, saaledes som bevislig Tilfældet vilde være, hvis Kræfterne virkede efter de samme Love som de Afstandskræfter, vi hidtil have kjendt. Med de antagne Kræfter vilde derimod en Ligevægt uden Bevægelse meget vel være mulig. Men særlig strider den sidste Hypothese netop mod den Uforanderlighed af Molekulerne, som, efter hvad jeg har søgt at paavise, giver sig tilkjende i deres Forhold til Lyset.

1. Atmosfærisk Luft.

Forsøgene, som paabegyndtes i Vinteren 1870, bleve paa Grund af den fundne Uoverensstemmelse med de dengang bekjendte, indbyrdes fuldkommen overensstemmende Forsøg af Arago og Biot, Jamin og Ketteler gjentagne meget hyppig. Luften ledede_ude fra den meget rene Luft i det frie gjennem et langt Glasrør til to U-formet bøjede Rør med Chlorcalcium og Kali og herfra til Apparatets indre Beholder. Igjennem dettes ydre Beholder strømmede Vand af den omgivende Lufts Varmegrad. Jeg skal særlig anføre de enkelte Maalinger i de sidst (i Juni 1870 og efterfølgende Januar Maaned) anstillede Forsøg, som jeg tillægger størst Vægt.

H	h	t	s'	s
mm	mm	°		
752,18	0,1	15,00	145,8	155,44
752,18	0,1	15,25	145,7	155,49
755,32	1	2,75	152,75	155,45
747,83	1	3,25	151,1	155,58
738,34	1	3,28	151,1	155,50
			Middel	155,49

Heri er H det ydre Lufttryk, som ogsaa var det endelige Tryk paa Luften i Beholderen, h Trykket i Beholderen ved Tællingens Begyndelse, t det omgivende Vands Varmegrad, s' Antallet af forskudte Na-Striber, og s dette Antal reduceret til en Trykforøgelse af 760^{mm} og Vandets Frysepunkt ved Formlen

$$s = s' \frac{760}{H - h}(1 + 0{,}00367\, t).$$

Resultaterne af alle de anstillede Iagttagelser, reducerede paa samme Maade til 0° C. og 760^{mm} Tryk, ere, ordnede efter Størrelsen,

154,4	(1°)	155,45	(2°,75)	155,7	(3°,66)
154,9	(6,9)	155,49	(15,25)	155,8	(9,69)
155,15	(1,25)	155,50	(3,28)	155,85	(16,25)
155,3	(8)	155,5	(3,5)	155,96	(16,85)
155,44	(15)	155,58	(3,25)	156,3	(7,5)

Middel 155,487.

Den i Parenthesen angivne Varmegrad er den, hvorved Forsøget har været anstillet.

Ofte blev ved de lavere Tryk dette noteret for hver Gang en Stribe passerede Traadkorset, hvorved der med kun meget smaa Afvigelser, som laa indenfor Iagttagelsesfejlenes Grænser, altid, selv ved den største Fortynding, viste sig den samme Trykforandring for hver Stribe.

Ved Reduktionen med Hensyn til Temperaturen er forudsat, at Luftens Brydningsforhold kun afhænger af dens Tæthed og ikke forandrer sig med Temperaturen, naar Tætheden forbliver den samme. Rigtigheden af denne Forudsætning er allerede bekræftet ved de anførte Forsøg, men tillige bleve nogle Forsøg anstillede med Apparatet opvarmet ved en Strøm af Vanddampe gjennem den ydre Beholder. Der fandtes i tre Forsøg et Antal af

115,1, 115,0, 115,8, i Middel 115,3

forskudte gule Striber, beregnet til en Trykforandring af 760^{mm}. Temperaturen af den indre Beholder kunde ikke umiddelbart maales, men beregnet ved den ovenfor benyttede Reduktionsformel og det til 0° svarende Stribeantal, nemlig ved Formlen

$$155{,}49 = 115{,}3\,(1 + 0{,}00367\,t),$$

findes Temperaturen $t = 95°$ C. Denne Temperatur maa ogsaa anses for at have været meget nær ved den virkelige, og denne vil i ethvert Tilfælde ikke kunne have afveget 5° fra den beregnede.

I alle Forsøgene bleve tillige de røde *Li*-Striber iagttagne. Bestemmelsen af Forholdet imellem Antallet af de samtidig forskudte gule og røde Striber var her meget let, da der altid, saavel ved Forsøgene ved den omgivende Lufts Varmegrad som naar Apparatet var opvarmet ved Vanddampe, forløb nøjagtig 8 gule mod 7 røde Striber under hele Tællingen, lige fra den største Fortynding indtil sædvanligt Lufttryk.

Brydningsforholdet n_{Na} for *Na*-Striben af tør atmosfærisk Luft ved 760^{mm} Tryk og 0° C. er ifølge Ligning (2) bestemt ved

$$n_{Na} - 1 = 0{,}0000018739 \,.\, 155{,}49, \text{ hvoraf}$$

$$n_{Na} = 1{,}00029137.$$

Ved Reduktion fra Kjøbenhavns Bredegrad til 45 Graders Brede erholdes

$$n_{Na} = 1{,}00029108.$$

Heraf kan endvidere beregnes Refraktionskonstanten $P = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} v$, som for Dampe og Luftarter sættes lig med $\frac{2}{3}(n - 1)v$. Idet den atmosfæriske Luft Vægtfylde $\left(\frac{1}{v}\right)$ er 0,00129267, findes

$$P_{Na} = 0{,}15012.$$

For Li-Striben erholdes ifølge (3),

$$\frac{S_{Li}}{S_{Na}} = \tfrac{7}{8}, \quad n_{Li} = 1{,}00029009, \quad P_{Li} = 0{,}14959.$$

Nøjagtigere findes ligeledes ved Hjælp af Ligning (3) Farvespredningen bestemt ved

$$\frac{n_{Na} - n_{Li}}{n_{Na} - 1} = 0{,}00342.$$

Ved Hjælp af Dispersjonsformlen $n_\lambda = A + \frac{B}{\lambda^2}$ er endvidere følgende Tabel over Brydningsforholdet for de Fraunhoferske Striber beregnet:

$$n_A = 1{,}00028935$$
$$n_B = 1{,}00028993$$
$$n_C = 1{,}00029024$$
$$n_D = 1{,}00029108$$
$$n_E = 1{,}00029217$$
$$n_F = 1{,}00029312$$
$$n_G = 1{,}00029486$$
$$n_H = 1{,}00029631$$

For fugtig Luft er Brydningsforholdet lidt mindre. Af de efterfølgende Forsøg over Vanddampes Brydning vil man for Dampe, hvis Tryk er $\tilde{\omega}$ Millimeter, og som ere langt fra Mætningspunktet, finde $n_{Na} - 1 = 0{,}000250 \cdot \frac{\tilde{\omega}}{760(1 + 0{,}00367\,t)}$, hvoraf ses, at der for fugtig Luft med Damptrykket $\tilde{\omega}$ skal til de ovenfor angivne Brydningsforhold tilføjes Korrektionen

$$- 0{,}000041 \frac{\tilde{\omega}}{760}.$$

Disse Resultater skal jeg sammenholde med de af andre Iagttagere fundne.

Arago og Biot's berømte Forsøg (Mém. de l'Inst., t. VII, 1806 og 1807) med Prisme gave Brydningsforholdet for hvidt Lys, reduceret til 0° C. og 760^{mm} $n = 1{,}00029458$. Dr. Ketteler («Farbenzerstreuung der Gase», Bonn 1865) fandt ved Interferensmethoden $n_{Na} = 1{,}00029470$, og Jamin (Ann. de ch. t. 59) for hvidt Lys $n = 1{,}000294$.

Nyere Forsøg af Mascart (C. R. de l'acad. des sciences, t. 78, S. 617 og 679,

1874) nærme sig mere til den af mig fundne Værdi. M. benyttede ligeledes Interferensmethoden, men i Steden for de Jaminske Spejle har han anvendt Fizeau's Methode, hvorved Straalerne adskilles ved to skraatliggende Planglas og atter forenes ved et lignende modsat System. De to Straaler vare adskilte «flere Millimeter» fra hinanden, hvilket sandsynligvis er meget mindre end i mine Forsøg (c. 28^{mm}). Mascart fandt for 0° C. $n_{Na} = 1{,}0002923$, og for t Grader Reduktionsfaktoren $1 + 0{,}00383\,t$. Her er Koefficienten til t noget større end Luftens Udvidelseskoefficient. Derimod have de ligeledes i det forløbne Aar bekjendtgjorte Forsøg af V. von Lang (Pogg. Ann. Bd. 153, Wiener Sitzungsber. Bd. 69, Abt. 2), som særlig gaa ud paa Bestemmelsen af Varmegradens Indflydelse, givet Resultatet $n_t = n_0 - 0{,}905 \,.\, 10^{-6} t + 0{,}00239 \,.\, 10^{-6} t^2$, gjældende fra 0 til 95° C., hvilket Resultat viser en Afvigelse i modsat Retning af Mascarts, idet det gjør Reduktionsfaktoren meget nær lig $1 + 0{,}00311\,t$. Det ses imidlertid allerede af Mangelen paa Bestemmelse af Farvespredningen, at Langs Methode ikke har været tilstrækkelig nøjagtig, og den bestaar i Virkeligheden heller ikke i andet end en sindrig Anvendelse af Prismemethoden, hvilken Methode imidlertid, saaledes som ogsaa Mascart har erkjendt, ikke i Nøjagtighed kan stilles ved Siden af Interferensmethoden. Jeg havde ovenfor fundet nær Vandets Kogepunkt en Forskydelse af 115,3 Striber, som i Forbindelse med det af Lang fundne Resultat vilde give en Temperatur af omtrent 120° C. i min Beholder, hvilket selvfølgelig var umuligt.

Ved Beregning af Iagttagelserne over den astronomiske Straalebrydning har Delambre (Mém. de l'Inst., t. VII), fundet $n = 1{,}00029407$. Bessel derimod (jvf. Biot C. R. t. 40) beregnede sine Refraktionstabeller med $n - 1$ sat lig Vinklen 57,538″ ved en Varmegrad af 9,305° C. og et Tryk af 751,8^{mm}, hvoraf findes $n = 1{,}000291608$ ved 0° C. og 760^{mm}, hvilken Værdi ogsaa senere blev benyttet af Astronomerne, skjøndt Fysikerne vare enige i at betragte den som for lav.

Gyldén (Mém. de l'acad. de St. Petersbourg t. X, Nr. 1, 1866, og t. XII, Nr. 4, 1868) sætter efter en «foreløbig Diskussjon» af Pulkowaer-Iagttagelserne $\frac{n^2 - 1}{2n^2} = \alpha = 0{,}00027985$, svarende til 7,44° R. og 29,5066 engl. Tommers Barometerstand, hvoraf beregnes for 0° C. og 760^{mm} Tryk $n = 1{,}00029276$. Den benyttede Korrektionsfaktor med Hensyn til Temperaturen er $1 + 0{,}003689\,t$.

V. Fuss (ibid. t. XVIII, Nr. 3, 1872) korrigerer den af den foreløbige Diskussjon fremgaaede Værdi af α, som Gyldén har benyttet, til $\alpha = 0{,}00027837$, hvortil svarer $n = 1{,}00029121$. Det i Kikkerten fixerede Punkt af Stjernebilledernes Spektra angives nærmere (S. 3) som svarende til «Midten af de mest iøjnefaldende Dele» af Spektret og «altsaa omtrent til Egnen ved den gule eller grønne Farve».

Dette endelige Resultat af de astronomiske Iagttagelser stemmer fuldstændig med

den af mig beregnede Tabel, især naar Hensyn tages til, at denne gjælder for tør Luft. Korrektionen for Vanddampene er det ikke lykkedes Astronomerne at bestemme.

Luftens Farvespredning er af Bessel (C. R. t. 15) sat fra B til G lig 0,0126 af Brydningen. Denne Bestemmelse vilde svare til de af mig fundne Resultater, naar man i Bessels Angivelse i Steden for den Fraunhoferske Linie G satte en Linie mellem F og G, dog nærmest F. Nøjagtigere er Farvespredningen bestemt ved Interferensmethoden af Dr. Ketteler («Farbenzerstreuung der Gase», Bonn 1865), som ogsaa først gjorde den i theoretisk Henseende vigtige Iagttagelse, at Forholdet imellem Luftens Farvespredning og Brydning var uafhængigt af Luftens Tryk, som i hans Forsøg laa imellem Grænserne 0,63 og 2,56 Atmosfære. Jeg har fundet dette stadfæstet indtil den største Fortynding, og min Bestemmelse af Farvespredningen stemmer nøjagtig overens med Kettelers. Tillige er det fremgaaet af mine Forsøg, at Farvespredningen er uafhængig af Varmegraden imellem 0 og 100° C.

Af andre Iagttagere kan nævnes Croullebois, hvis Forsøg imidlertid maa betragtes som mislykkede, og Mascart, som ved sine nylig omtalte Forsøg har fundet meget nær den samme (c. 8 Procent større) Farvespredning som Ketteler og jeg.

2. Ilt, *O*.

Ilten udvikledes ved Opvarmning af rødt Kviksølvilte i en Platinretort, hvorfra den gjennem Porcellains- og Glasrør ledcdes til Apparatets indre Beholder. Da der i de foreløbige Forsøg viste sig en kjendelig Forøgelse af Farvespredningen, naar Retorten blev ophedet for stærkt, og da dette maatte tilskrives Spor af Kviksølvdampe, som vare revne med over i Beholderen, blev der i de endelige Forsøg indskudt et Glas med Svovlpulver i Ledningen. Ved Begyndelsen af ethvert Forsøg blev Apparatet tilligemed Retorten pumpet næsten lufttom, hvorpaa Retorten opvarmedes og Striberne taltes, indtil Antallet var blevet lidt større end det, jeg af de foreløbige Forsøg vidste udfordredes, naar Trykket i Beholderen var steget til den omgivende Lufts Tryk. Dernæst afspærredes Beholderen fra Retorten og gjennem den anden Hane ledcdes den overskydende Ilt ud i Luften, medens Antallet af de tilbagegaaende Striber taltes og subtraheredes fra det først fundne Antal. Forsøget sluttede altsaa ved den ydre Lufts Tryk.

Med Undtagelse af de to første orienterende Forsøg ere alle Forsøgene følgende:

H	h	t	s'	s
mm	mm	°		
753,35	0,1	13,94	136,0	145,25
764,54	3,5	15,78	136,7	144,40
757,44	0,3	16,25	136,2	144,85
753,85	0,5	16,38	135,6	145,02
748,36	2,0	4,35	140,8	145,66
748,36	4,0	4,35	140,0	145,18
			Middel	145,06

Betegnelserne ere de samme som de tidligere benyttede. Af det fundne Middel af det til en Trykforøgelse af 1 Atmosfære og Vandets Frysepunkt reducerede Antal Na-Striber findes

$$n_{Na} = 1{,}00027155, \quad P_{Na} = 0{,}12666,$$

hvor Normaltrykket tillige er reduceret til 45 Graders Brede. Iltens Vægtfylde er ved Bestemmelsen af Refraktionskonstanten P_{Na} sat lig 0,0014293.

Forholdet imellem Farvespredningen og Brydningen viste sig her noget større end for atmosfærisk Luft, idet der til en Forskydelse af 135 gule Striber svarede 118 røde. Heraf findes

$$n_{Li} = 1{,}00027034, \quad P_{Li} = 0{,}12609.$$

Farvespredningen er nærmere bestemt ved

$$\frac{n_{Na} - n_{Li}}{n_{Na} - 1} = 0{,}00447.$$

Dulong har endvidere ved sine bekjendte og fortrinlige Undersøgelser over Luftarternes Brydning bestemt denne for en Række Stoffer i Forhold til den atmosfæriske Lufts Brydning. For Ilten fandt D. dette Forhold lig 0,924, som med det af mine Forsøg udledede Brydningsforhold for den atmosfæriske Luft giver for Ilten $n_{Na} = 1{,}0002690$.

3. Kvælstof, N.

Direkte Forsøg over Kvælstoffets Brydning og Farvespredning ere ikke anstillede, derimod findes ved Beregning af de fundne Brydningsforhold for den atmosfæriske Luft og Ilt

$$n_{Na} = 1{,}0002960, \quad P_{Na} = 0{,}15713,$$
$$n_{Li} = 1{,}0002951, \quad P_{Li} = 0{,}15663$$
$$\frac{n_{Na} - n_{Li}}{n_{Na} - 1} = 0{,}00316.$$

Dulong fandt Kvælstoffets Brydning i Forhold til den atmosfæriske Luft lig 1,020, hvoraf $n_{Na} = 1,0002969$.

Mascart har i sine ovenfor nævnte Forsøg fundet $n_{Na} = 1,0002972$. Med Hensyn til Farvespredningen ere Afvigelserne større, idet M. finder en større Farvespredning (defineret ved B i Formlen $n - 1 = A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right)$) for Kvælstof end for atmosfærisk Luft, medens mine Forsøg have givet det modsatte Resultat.

4. Brint, *H.*

Brinten udvikledes i et Glas med Zink, hvortil sattes ren fortyndet Svovlsyre fra en med Glashane forsynet Tragt, og den udviklede Luft rensedes ved at passere et System af 5 U-formet bøjede Glasrør med Kalioplosning, Kviksølvchlorid, Chlorcalcium og Kalihydrat (2 Rør). Den med Udviklingsapparatet forbundne indre Beholder blev først gjort næsten lufttom, hvorpaa Svovlsyren sattes til Zinken og den udviklede Brint ledede til Beholderen og Luftpumpen. Naar Trykket var blevet lig den ydre Lufts, ledede Brinten gjennem Luftpumpen ud i Luften, og Tilledningen fortsattes endnu en Tid under Iagttagelse af Striberne, indtil disse vare blevne fuldkommen stillestaaende. Dernæst afspærredes Beholderen fra Udviklingsapparatet og tømtes ved Luftpumpen, medens Striberne taltes. Alle de udførte Maalinger vare følgende:

H	h	t	s'	s
mm 763,77	mm 15	3°,50	70,5	72,48
767,11	11,5	5,88	73	75,01
767,39	22,75	6,90	71	74,30
767,09	11	4,42	72	73,62
764,84	10,5	6,85	72	74,37
757,33	2	3,75	73	74,46
776,29	2	0	75,5	74,11
776,29	4	0,13	75	73,84
			Middel	74,02

I de to sidste Forsøg blev der efter Ophør af Tællingen atter tilledet Brint, hvorved det viste sig, at Striberne atter nøjagtig kom tilbage til Begyndelsespunktet. Tillægges derfor

disse to Forsøg den dobbelte Vægt og forkastes de to første Forsøg, erholdes som Middel $s = 74,08$. Hertil svarer, idet Vægtfylden er 0,00008957,

$$n_{Na} = 1,0001387, \qquad P_{Na} = 1,0325.$$

Til Forskydelsen af 55,5 gule Striber svarede 48,5 røde. Altsaa er

$$n_{Li} = 1,0001380, \qquad P_{Li} = 1,0277, \qquad \frac{n_{Na} - n_{Li}}{n_{Na} - 1} = 0,00470.$$

Ifølge Dulong er Brintens Brydning i Forhold til den atmosfæriske Lufts 0,470, hvoraf $n_{Na} = 1,0001368$. Ketteler fandt $n_{Na} = 1,00014294$, $n_{Li} = 1,00014228$, altsaa meget nær den samme Farvespredning (71,5 gule mod 62,5 røde Striber, og ved et andet Forsøg 63,5 mod 55,5), men derimod en ikke lidet større Brydning end den af mig fundne. Mascart har $n_{Na} = 1,0001388$, som er meget nær overensstemmende med mit Resultat, hvorimod han finder Brintens Farvespredningskoefficient ikke lidet mindre end den atmosfæriske Lufts, medens Ketteler og jeg have fundet den større.

5. Vand, H_2O.

Forsøgene over Vanddampes Brydning bleve udførte efter den Fremgangsmaade, som jeg benyttede for alle de undersøgte Vædskers Dampe, og som tidligere er beskreven. I den nedenstaaende Tabel er G Vægten i Gram af fordampet Vand, S det hele ved denne Fordampning forskudte Antal Na-Striber og s Kvotienten af S og G, altsaa den til 1 Gram Vanddampe svarende Stribeforskydelse.

G	S	s
1,2252 + 0,0180	112 + 0,41	90,42
1,755 + 0,018	160 + 0,36	90,45
2,8073 + 0,0178	256 + 0,36	90,74
5,3105 + 0,0163	480 + 0,25	90,16
11,1681	1009,38	90,38

Den nederste Række indeholder Summen af alle Vægtene og af de forskudte Striber, hvoraf den endelige Kvotient 90,38 er beregnet. Som Exempel paa Beregningen af de i de to Kolonner tilføjede smaa Korrektioner skal jeg anføre Enkelthederne i det første Forsøg. Den lille Kolbe med Vand vejede 23,4142 Gram før Forsøget og 22,1890 Gr. efter Forsøget, og der taltes 112 Striber, idet nemlig Dampene i den indre Beholder bleve ledede over i Luftpumpen ved alle disse Forsøg, for hver Gang nøjagtig 32 (en enkelt Gang 16) Striber vare

passerede Traadkorset. Kolbens Rumfang var 18,181 Kubikcentimeter og dens Vægt 19,056 Gr. Der var altsaa ved den første Vejning 4,3582 Gr. Vand og 13,823 ^{cc} fugtig Luft tilstede i Kolben. Temperaturen var 9° C. Vægten af tilstedeværende tør Luft findes heraf lig 0,0166 Gr. Et Gram tør Luft ledet ind i Beholderen vilde efter Beregning frembringe en Forskydelse af 65,5 Striber og 1 Gram Vanddampe omtrent 90,4 Striber, som er 24,9 flere. Hvis der altsaa i Kolben i Steden for 0,0166 Gr. tør Luft havde været samme Vægt Vanddampe, saa vilde der være forskudt 0,0166 . 24,9 = 0,41 Stribe mer, hvilken Korrektion derfor tilføjes det talte Antal Striber. Endvidere var der ved den anden Vejning 3,1330 Gr. Vand og 15,048 ^{cc} fugtig Luft tilstede i Kolben. Vægten af tør Luft findes heraf lig 0,0180 Gr. og Vægten af fordampet Vand er altsaa 4,3582 — (3,1330 — 0,0180) = 1,2252 + 0,0180 Gram. Da iøvrigt Indflydelsen af disse Korrektioner paa det endelige Resultat er meget lille, har jeg anset det for ufornødent at angive særskilt for hvert Forsøg alle de Enkeltheder, paa hvilke Beregningen af dem støtter sig.

Af det for 1 Gram Dampe forskudte Antal gule Striber s beregnes ifølge Ligning (5) umiddelbart $\frac{n_{Na}-1}{D}$ ved Multiplikation med 0,003432, og altsaa Refraktionskonstanten P, som for Dampe er $\frac{2}{3}\,\frac{n-1}{D}$, ved Multiplikation med 0,002288. For Vanddampe erholdes saaledes

$$P_{Na} = 0{,}002288 \,.\, 90{,}38 = 0{,}2068.$$

Heraf beregnes endvidere Vanddampenes Brydningsforhold, svarende til Normal-Vægtfylden, som er 9 Gange Brintens eller 0,0008061, idet $n = 1 + \frac{3}{2} PD$. Man vil finde

$$n_{Na} = 1{,}0002500.$$

Jamin har af sine Interferensforsøg med fugtig Luft udledet et ikke lidet høiere Resultat, nemlig 1,000261, gjældende for hvidt Lys.

Farvespredningen fandtes større end den atmosfæriske Lufts, men en nøjagtig Bestemmelse af den lykkedes mig ikke, fordi der, paa Grund af Vandets højtliggende Kogepunkt, kun kunde tælles et temmelig ringe Antal Striber ad Gangen.

Skjøndt Vandets Brydning for den draabeflydende Tilstand er tilstrækkelig godt bekjendt, anstillede jeg dog ogsaa nogle Forsøg herover med Prismet paa den ovenfor angivne Maade for ved Sammenligning at have en Kontrol for mine Maalinger. De to til forskjellige Aarstider anstillede Forsøg vare følgende:

1. Prismets brydende Kant ($2p$) var 59°43′3″, den konstante Afvigning ($2a$) 23°48′36″. I nedenstaaende Tabel er endvidere under $2b$ angivet Prismets Drejning, som i dette Forsøg blev bestemt for hver enkelt af de fire Spektrallinier særskilt, medens samtidig Temperaturen t aflæstes paa Prismets Thermometer.

	$2b$	t	n^2	n
Li	15° 4′12″	16°,55	1,771753	1,331072
Hα	14° 40′51″	16,40	1,772669	1,331416
Na	12° 20′1″	16,46	1,777692	1,333301
Hβ	3° 42′10″	16,36	1,788714	1,337428

2. $2p = 59° 42'32''$, $2a = 23° 51'2''$. Spektrallinierne ere iagttagne efter hinanden, saaledes som tidligere er beskrevet, og t er Middeltallet af de to umiddelbart før og efter aflæste Temperaturer.

	$2b$	t	n^2	n
Li	15° 11′21″	7°,62	1,773020	1,331548
Hα	14° 46′15″	7,62	1,774012	1,331920
Na	12° 26′45″	7,62	1,779035	1,333805
Hβ	4° 4′29″	7,62	1,790067	1,337934

Reduktionen af Brydningsforholdene for *Li*- og *Na*-Linierne til 10° og 20° C. har jeg udført ved de af mig i min første Afhandling fundne Formler, nemlig (se S. 18)

$$n_{Li}(t) = n_{Li}(0) + 10^{-6}[0,952\,t - 2,793\,t^2 + 0,02134\,t^3],$$
$$n_{Na}(t) = n_{Na}(0) + 10^{-6}[0,076\,t - 2,803\,t^2 + 0,02134\,t^3].$$

Ved Hjælp heraf findes af ovenstaaende Forsøg først

$$n_{Li}(0) = 1,331709, \qquad n_{Na}(0) = 1,333961,$$

som for de iagttagne Temperaturer atter give

$$n_{Li}(7,62°) = 1,331564 \text{ (Diff.} - 16), \qquad n_{Na}(7,62°) = 1,333808 \text{ (D.} - 3),$$
$$n_{Li}(16,55°) = 1,331056 \text{ (D.} + 16), \qquad n_{Na}(16,46°) = 1,333298 \text{ (D.} + 3).$$

Dernæst erholdes

$$n_{Li}(10°) = 1,331461, \qquad n_{Na}(10°) = 1,333703,$$
$$n_{Li}(20°) = 1,330782, \qquad n_{Na}(20°) = 1,333012.$$

Med Hensyn til Sammenligningen med andre Iagttageres Resultater kan jeg henvise til min første Afhandling, og jeg skal kun her bemærke, at næsten alle Iagttagere stemme overens i Tallet 1,3330 for $n_{Na}(20°)$.

Med Benyttelse af Matthiesens Vægtfyldebestemmelser, som give $D = 1,000271$ for $t = 10°$ og $D = 1,001814$ for $t = 20°$, findes endvidere for Refraktionskonstanten, bestemt ved $P = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{D}$,

$$P_{Li}(10°) = 0{,}20489, \qquad P_{Na}(10°) = 0{,}20615,$$
$$P_{Li}(20°) = 0{,}20482, \qquad P_{Na}(20°) = 0{,}20608.$$

Refraktionskonstanten synes altsaa at aftage meget svagt ved stigende Varmegrad, hvilket ogsaa bekræftes af Rühlmanns Forsøg (Pogg. Ann. Bd. 132) over Vandets Brydning ved forskjellige Temperaturer, som gaa indtil henimod Vandets Kogepunkt. Af disse findes

$$P_{Li}(0°) = 0{,}20490, \qquad P_{Na}(0°) = 0{,}20614,$$
$$P_{Li}(90°) = 0{,}20468, \qquad P_{Na}(90°) = 0{,}20587.$$

Naar Vandet ved henimod 100° gaar over i Dampform, stiger atter Refraktionskonstanten lidt, idet ovenfor for Dampene fandtes $P_{Na} = 0{,}2068$, men i det væsentlige ses det, at Refraktionskonstanten for Vandet forandrer sig i en paafaldende ringe Grad med Temperaturen og ved Overgangen til Dampformen.

Mascart har (C. R. t. 79, S. 801) ved Interferensmethoden bestemt Forandringen i Vandets Brydning ved Sammentrykning. Hans Forsøg udvise en $12\frac{1}{2}$ Procent mindre Forandring i Brydningen end den, som vilde svare til en uforandret Værdi af Refraktionskonstanten, som derfor maa antages at voxe, naar Rumfanget ved en Formindskelse af det ydre Tryk bliver forøget.

Isens Brydningsforhold er nærmere bestemt af Reusch (Pogg. Ann. Bd. 121), som for den ordinær brudte Straale fandt $n_o = 1{,}30598$, og for den extraordinære $n_e = 1{,}30734$, begge svarende til rødt, af Kobaltglas gjennemladt Lys. Heraf beregnes først $n^2 = \frac{1}{3}(2n_o{}^2 + n_e{}^2)$, og idet Isens Vægtfylde antages lig 0,91674 (Bunsen), erholdes Refraktionskonstanten 0,20804 for rødt Lys. Her er denne altsaa ligeledes blevet forøget ved Udvidelsen.

Farvespredningen af de undersøgte Vædsker for *Na*-*Li*-Linierne bestemmer jeg ved Kvotienten $\alpha = \dfrac{P_{Na} - P_{Li}}{P_{Na}}$ som for Luftarter og Dampe svarer til $\dfrac{n_{Na} - n_{Li}}{n_{Na} - 1}$. For Vand findes

$$\alpha = 0{,}00611,$$

gjældende saavel for 10° som for 20°, hvorimod det af mine tidligere Undersøgelser fremgaar, at Farvespredningen i en paafaldende Grad voxer i Nærheden af Vandets Frysepunkt.

6. Alkohol, C_2H_6O.

Forsøgene med Alkoholdampe gave

G	S	s
3,2850 + 0,0121	407 + 0,42	123,54
2,7461 + 0,0163	340 + 0,70	123,34
6,0595	748,12	123,46

altsaa en Forskydelse af 123,46 gule Striber for hvert Gram Dampe. Heraf findes

$$P_{Na} = 0,002288 . 123,46 = 0,2825.$$

Til en Forskydelse af 79 gule Striber svarede 69 røde, hvoraf

$$P_{Li} = 0,2810, \quad \text{og} \quad \alpha = 0,00522.$$

For Dampenes Brydningsforhold, svarende til Normalvægtfylden, som er 23 Gange Brintens eller 0,002060, findes heraf

$$n_{Na} = 1,0008729, \qquad n_{Li} = 1,0008683.$$

Forsøgene med draabeflydende Alkohol gave følgende Resultalter:

1. $2p = 59°42'12''$, $2a = 26°30'0''$,

	$2b$	t	n^2
Li	19°28'34''	19,28°	1,850806
Hα	19°10'46''	19,28	1,851814
Na	17°41'12''	19,28	1,856656
Hβ	13°27'14''	19,28	1,868312

2. $2p = 59°43'18''$, $2a = 26°17'31''$,

	$2b$	t	n^2
Li	14°52'28''	13,30	1,857198
Hα	14°28'24''	13,30	1,858232
Na	12°24'53''	13,31	1,863100
Hβ	4°25'32''	13,17	1,874991

Til Sammenligning med Wüllners og Landolts Iagttagelser (Pogg. Ann. Bd. 133 og 122) findes heraf

$$n_\alpha\,(19,28°) = 1,360814 \text{ (W. 1,360931, L. 1,36083)},$$
$$n_\beta\,(19,28°) = 1,366862 \text{ (W. 1,367043, L. 1,36695)},$$
$$n_\alpha\,(13,30°) = 1,363170 \text{ (W. 1,363257, L. 1,36328)},$$
$$n_\beta\,(13,17°) = 1,369303 \text{ (W. 1,369438, L. 1,36948)},$$

hvoraf det ses, at det fundne Brydningsforhold er gjennemgaaende lidt lavere end Wüllners og Landolts Bestemmelser.

Ved Reduktion til 10° og 20° erholdes

$$n_{Li}{}^2\,(10°) = 1,860728, \qquad n_{Na}{}^2\,(10°) = 1,866673,$$
$$n_{Li}{}^2\,(20°) = 1,850049, \qquad n_{Na}{}^2\,(20°) = 1,855879.$$

Vægtfylden fandtes ved 10° C. lig 0,7993 (Wülln. 0,8013) og ved 20° C. 0,7909 (Wülln. 0,7958, Land. 0,7996). Ifølge Mendelejeff (Pogg. Ann. Bd. 138) ere Vægtfylderne ved de samme Temperaturer 0,79788 og 0,78945. For den af mig benyttede Alkohol er altsaa

$$P_{Li}(10°) = 0{,}27892, \qquad P_{Na}(10°) = 0{,}28042,$$
$$P_{Li}(20°) = 0{,}27917, \qquad P_{Na}(20°) = 0{,}28066,$$

og Farvespredningskvotienten for de to Temperaturer

$$\alpha(10°) = 0{,}00535, \qquad \alpha(20°) = 0{,}00531.$$

Refraktionskonstanterne forandre sig altsaa meget lidt med stigende Temperatur og ved Vædskens Overgang til Dampformen, dog viser sig en kjendelig Stigning i begge Tilfælde. Farvespredningskvotienten holder sig ligeledes næsten konstant, men synes dog at forandre sig lidt i modsat Retning.

7. Æther, $C_4H_{10}O$.

Forsøgene med Ætherdampe gave

G	S	s
2,3146 + 0,0124	312,25	134,17
3,1298 + 0,0147	420,8 + 0,75	134,06
2,9338 + 0,0150	394,5 + 0,77	134,04
8,4203	1129,07	134,09

Heraf findes

$$P_{Na} = 0{,}002288 \,.\, 134{,}09 = 0{,}3068.$$

Til en Forskydelse af 119 gule Striber svarede 104 røde, og i et andet Forsøg 111 gule mod 97 røde Striber. Altsaa er

$$P_{Li} = 0{,}3054, \qquad \alpha = 0{,}00465.$$

For Dampenes Brydningsforhold, svarende til Normalvægtfylden, som er 37 Gange Brintens eller 0,003314, findes heraf

$$n_{Na} = 1{,}001524, \qquad n_{Li} = 1{,}001517.$$

Dulong fandt Brydningsforholdet for Ætherdampene 5,197 Gange større end for atmosfærisk Luft, hvilket svarer til $n_{Na} = 1{,}001512$, som stemmer ret godt med ovenstaaende.

Jeg anstillede ligeledes nogle Forsøg over Ætherdampenes Brydning ved sædvanlig Temperatur, som var omtrent 20° C. Resultaterne vare

G	S	s
2,233 + 0,014	300 + 0,77	133,85
2,971 + 0,013	399 + 0,63	133,92
5,231	700,40	133,90

Til en Forskydelse af 95 gule Striber svarede 83 røde. Det fremgaar heraf, at Refraktionskonstanten og Farvespredningskvotienten ikke i nogen kjendelig Grad forandre sig ved en Forandring af Ætherdampenes Temperatur fra 100° til 20° C., idet de smaa Afvigelser, som Forsøgene have givet, ganske ligge indenfor Iagttagelsesfejlens Grænser.

For draabeflydende Æther fandtes:

1. $2p = 59°43'1''$, $2a = 25°30'0''$,

	$2b$	t	n^2	n^2 (beregnet)
Li	17°47'38''	21,53°	1,822033	1,822031
»	17°37'59''	21,31	1,822519	1,822501
$H\alpha$	17°29'49''	21,53	1,822919	1,822914
»	15°20'34''	21,31	1,823374	1,823381
Na	15°48'9''	21,53	1,827702	1,827714
»	15°37'25''	21,31	1,828179	1,828185
$H\beta$	10°37'41''	21,53	1,839351	1,839349
»	10°21'51''	21,31	1,839824	1,839826

2. $2p = 59°43'13''$, $2a = 25°52'4''$,

	$2b$	t	n^2	n^2 (beregnet)
Li	14°34'19''	8,00°	1,843435	1,843439
$H\alpha$	14°12'28''	8,00	1,844340	1,844343
Na	12°1'25''	8,00	1,849296	1,849283
$H\beta$	2°39'9''	8,00	1,861252	1,861256

De beregnede Værdier af n^2 ere udledede af Formlen

$$n^2{}_\lambda = 1,813050 - 0,001532\,(t-15) + (0,036935 - 0,000078\,(t-15))\,\frac{\lambda^2{}_\beta}{\lambda^2},$$

hvor λ_β er den til H_β svarende og λ en vilkaarlig Bølgelængde. I Beregningen af den første Forsøgsrække er Temperaturen 21,53 korrigeret til 21,61.

Landolt har

$$n_\alpha = 1{,}35112 - 0{,}00058(t-20),$$
$$n_\beta = 1{,}35720 - 0{,}00059(t-20),$$

medens ovenstaaende Formel giver tilnærmelsesvis

$$n_\alpha = 1{,}351090 - 0{,}000582(t-20),$$
$$n_\beta = 1{,}357182 - 0{,}000592(t-20),$$

som altsaa meget nær stemmer overens med Landolts Forsøg. Af Formlen findes endvidere:

$$n_{Li}^2(10°) = 1{,}840292, \qquad n_{Na}^2(10°) = 1{,}846112,$$
$$n_{Li}^2(20°) = 1{,}824563, \qquad n_{Na}^2(20°) = 1{,}830261.$$

Vægtfylden fandtes ved 10° lig 0,7269, (Kopp 0,7256) og ved 20° 0,7157 (Landolt 0,7153, Kopp 0,7143). Altsaa er

$$P_{Li}(10°) = 0{,}30102, \qquad P_{Na}(10°) = 0{,}30264,$$
$$P_{Li}(20°) = 0{,}30124, \qquad P_{Na}(20°) = 0{,}30287,$$
$$\alpha(10°) = 0{,}00537, \qquad \alpha(20°) = 0{,}00538.$$

Sammenholdes disse Størrelser med de tilsvarende for Dampene, ses det, at Resultaterne med Hensyn til Forandringerne af Refraktionskonstanterne og Farvespredningskvotienten her blive de samme som for Alkoholens Vedkommende.

8. Chloroform, $CHCl_3$.

Forsøgene med Chloroformdampe gave

G	S	s
6,8434 + 0,0190	538 + 0,19	78,43
6,0939 + 0,0186	480 + 0,19	78,56
12,9749	1018,38	78,49

hvoraf findes

$$P_{Na} = 0{,}1796.$$

Til en Forskydelse af 79 gule Striber svarede 69 røde. Altsaa

$$P_{Li} = 0{,}1787, \qquad \alpha = 0{,}00522.$$

Dampenes Brydningsforhold, svarende til en Vægtfylde 59,75 Gange Brintens eller 0,005352, blive

$$n_{Na} = 1{,}001442, \qquad n_{Li} = 1{,}001435.$$

For draabeflydende Chloroform fandtes:

1. $2p = 59°43'0''$, $2a = 33°0'0''$,

	$2b$	t	n^2
Li	16°0'30''	19°,17	2,084171
$H\alpha$	16°37'10''	19,17	2,085544
Na	13°91'55''	19,17	2,092927
$H\beta$	3°58'27''	19,17	2,111085

2. $2p = 59°42'9''$, $2a = 33°30'29''$,

	$2b$	t	n^2
Li	15°49'59''	8°,23	2,102627
$H\alpha$	15°26'30''	8,23	2,104012
Na	13°6'10''	8,23	2,111578
$H\beta$	2°49'9''	8,23	2,130242

Heraf erholdes

$n_\alpha(20°) = 1{,}443657$ (Haagen (Pogg. 131) 1,44403),
$n_\beta(20°) = 1{,}452458$ (H. 1,45294).

og

$n_{Li}{}^2(10°) = 2{,}099641$, $n_{Na}{}^2(10°) = 2{,}108562$,
$n_{Li}{}^2(20°) = 2{,}082771$, $n_{Na}{}^2(20°) = 2{,}091512$.

Vægtfylden var ved 10° 1,5072 (Pierre 1,50786) og ved 20° 1,4896 (Pierre 1,48977, Haagen 1,4904), altsaa

$P_{Li}(10°) = 0{,}17797$, $P_{Na}(10°) = 0{,}17902$,
$P_{Li}(20°) = 0{,}17804$, $P_{Na}(20°) = 0{,}17909$,
$\alpha(10°) = 0{,}00592$, $\alpha(20°) = 0{,}00592$.

For Refraktionskonstanterne og Farvespredningen gjælder saaledes ganske det samme her som for de to foregaaende Stoffer.

9. Jodæthyl, C_2H_5J.

Forsøgene med Jodæthyldampe gave

G	S	s
3,8374 + 0,0156	264	68,52
5,1430 + 0,0182	357	69,17
4,2470 + 0,0180	290,5	68,11
13,2792	911,5	68,66

hvoraf findes

$$P_{Na} = 0,1571.$$

Til en Forskydelse af 85 gule Striber svarede 74 røde, altsaa

$$P_{Li} = 0,1558, \qquad \alpha = 0,00844.$$

Dampenes Brydningsforhold svarende til en Vægtfylde 78 Gange Brintens eller 0,006987, blive

$$n_{Na} = 1,001646, \qquad n_{Li} = 1,001632.$$

For draabeflydende Jodæthyl fandtes

1. $2p = 59°43'5''$, $2a = 38°58'51''$,

	$2b$	t	n^2
Li	19°46'41''	19°,66	2,270410
$H\alpha$	19°17'40''	19,66	2,272891
Na	16°18'0''	19,66	2,286931
$H\beta$	1°27'53''	19,66	2,321976

2. $2p = 59°43'10''$, $2a = 39°38'42''$,

	$2b$	t	n^2
Li	19°59'25''	9°,60	2,291406
»	20°8'30''	9,94	2,290595
$H\alpha$	19°31'30''	9,60	2,293861
»	19°39'38''	9,94	2,293151
Na	16°35'39''	9,60	2,308041
»	16°45'50''	9,94	2,307281
$H\beta$	2°56'35''	9,60	2,344109
»	3°42'6''	9,94	2,343423

Heraf erholdes

$n_\alpha(20°) = 1,50738$ (Vf. 1,9264, Haagen: 1,50812, Vf. 1,9315 og 1,50868, Vf. 1,9345),
$n_\beta(20°) = 1,52356$ (H. 1,5244 og 1,52509)

og

$$n_{Li}^2\,(10^\circ) = 2{,}29052, \qquad n_{Na}^2\,(10^\circ) = 2{,}30718,$$
$$n_{Li}^2\,(20^\circ) = 2{,}26972, \qquad n_{Na}^2\,(20^\circ) = 2{,}28623.$$

Vægtfylden fandtes ved 10° lig 1,9491 (Pierre 1,9528) og ved 20° 1,9264 (P. 1,9298), altsaa er

$$P_{Li}(10^\circ) = 0{,}15432, \qquad P_{Na}(10^\circ) = 0{,}15571,$$
$$P_{Li}(20^\circ) = 0{,}15437, \qquad P_{Na}(20^\circ) = 0{,}15578,$$
$$\alpha\,(10^\circ) = 0{,}00893, \qquad \alpha\,(20^\circ) = 0{,}00905.$$

Her træder saaledes ganske de samme Forhold frem, som ved de foregaaende Stoffer.

10. Svovlkulstof, CS_2.

Forsøgene med Svovlkulstofdampe gave

G	S	s
2,3823 + 0,0150	304 + 0,87	127,17
3,7418 + 0,0137	476 + 0,64	126,92
1,0070 + 0,0121	128 + 0,70	126,3
2,8128 + 0,0148	356 + 0,78	126,18
3,9446 + 0,0144	500 + 0,70	126,47
31,9585	1767,69	126,64

hvoraf findes $P_{Na} = 0{,}2898$.

Til en Forskydelse af 97 gule Striber svarede 84 røde, altsaa

$$P_{Li} = 0{,}2858, \qquad \alpha = 0{,}01369.$$

Ganske samme Farvespredningskvotient fandtes ogsaa ved et Forsøg med Dampe ved omtrent 20° C.

Dampenes Brydningsforhold ved en Vægtfylde 38 Gange Brintens eller 0,003404 blive

$$n_{Na} = 1{,}001480, \qquad n_{Li} = 1{,}001460.$$

Dulong fandt Brydningsforholdet 5,110 Gange større end den atmosfæriske Lufts, altsaa $n_{Na} = 1{,}001487$.

For draabeflydende Svovlkulstof fandtes

1. $2p = 59^\circ 43' 0''$, $\qquad 2b = 51^\circ 29' 52''$,

	$t=20{,}52°$		$t=20{,}34°$		$t=20{,}12°$	
	$2b$	n^2	$2b$	n^2	$2b$	n^2
Li	27° 51′18″	2,612635	27° 46′23″	2,613410	27° 42′19″	2,614050
$H\alpha$	27° 17′11″	2,617971	27° 11′55″	2,618785	27° 8′9″	2,619366
Na_1	23° 49′7″	2,648288	23° 43′50″	2,649008	23° 39′35″	2,649585
Na_2	23° 46′16″	2,648677	23° 41′12″	2,649366	23° 36′56″	2,649944
$H\beta$	9° 53′59″	2,729920	9° 41′5″	2,730662	9° 30′29″	2,731259

2. $2p = 59° 43'13''$, $2b = 51° 52'40''$,

	$t=10{,}63°$		$t=11{,}01°$	
	$2b$	n^2	$2b$	n^2
Li	26° 20′13″	2,638073	26° 26′0″	2,637198
$H\alpha$	25° 43′55″	2,643494	25° 49′42″	2,642638
Na_1	22° 0′19″	2,674274	22° 5′27″ (Na₁ and Na₂)	2,673618
Na_2	21° 57′34″	2,674624		
$H\beta$	3° 21′45″	2,757474	4° 0′32″	2,756625

Heraf erholdes

$n_\alpha\,(10°) = 1{,}626396$ (Wülln. 1,626266, Willigen 1,62657),
$n_\alpha\,(20°) = 1{,}618503$ (Wülln. 1,618166, Willigen 1,61841),
$n_\beta\,(10°) = 1{,}661123$ (Wülln. 1,660876, Willigen 1,66127),
$n_\beta\,(20°) = 1{,}652734$ (Wülln. 1,652676, Willigen 1,65273),

De angivne Bestemmelser af v. d. Willigen findes i Musée Teyler III (1). Endvidere er

$$n_{Li}{}^2\,(10°) = 2{,}639728, \qquad n_{Na}{}^2\,(10°) = 2{,}676180,$$
$$n_{Li}{}^2\,(20°) = 2{,}614208, \qquad n_{Na}{}^2\,(20°) = 2{,}650009.$$

Vægtfylden var ved 10° 1,2778 (Wülln. 1,27860, Pierre 1,27831), og ved 20° 1,2634 (W. 1,26354, P. 1,26344), hvorved erholdes

$$P_{Li}(10°) = 0{,}27658, \qquad P_{Na}(10°) = 0{,}28052,$$
$$P_{Li}(20°) = 0{,}27690, \qquad P_{Na}(20°) = 0{,}28086,$$
$$\alpha(10°) = 0{,}01405, \qquad \alpha(20°) = 0{,}01410.$$

Refraktionskonstanterne og Farvespredningen forandre sig altsaa atter her ganske paa samme Maade som ved de foregaaende Stoffer, dog er Forandringen her større.

11. Eddikesurt Æthylilte, $C_4H_8O_2$.

Forsøgene over Dampene af det eddikesure Æthylilte gave

G	S	s
3,295 + 0,0218	388 + 0,91	117,25
2,971 + 0,0218	350,5 + 0,93	117,43
2,2448 + 0,0218	264,5 + 0,98	117,13
8,5762	1005,82	117,28

hvoraf findes

$$P_{Na} = 0,2683.$$

Til en Forskydelse af $55\frac{1}{2}$ gule Striber svarede $48\frac{1}{2}$ røde, altsaa

$$P_{Li} = 0,2670, \qquad \alpha = 0,00470.$$

Dampenes Brydningsforhold ved en Vægtfylde 44 Gange Brintens eller 0,003941 blive

$$n_{Na} = 1,001586, \qquad n_{Li} = 1,001578.$$

For draabeflydende eddikesurt Æthylilte fandtes

1. $2p = 58°43'14''$, $2a = 26°54'55''$,

	$2b$	t	n^2
Li	15° 24'7''	18°,48	1,877196
»	15° 29'5''	18,60	1,876967
$H\alpha$	14° 57'9''	18,22	1,878423
»	14° 58'58''	18,27	1,878342
Na	12° 58'40''	18,40	1,883392
»	12° 57'21''	18,36	1,883440
$H\beta$	5° 24'37''	18,12	1,895991

2. $2p = 59°43'18''$, $2a = 27°15'31''$,

	$2b$	t	n^2
Li	14° 41'21''	8°,59	1,890809
$H\alpha$	14° 20'44''	8,59	1,891715
Na	12° 0'45''	8,33	1,897309
$H\beta$	3° 32'13''	8,59	1,909356
»	2° 52'23''	8,33	1,909747

Heraf erholdes

$$n_\alpha(20^\circ) = 1{,}369656 \text{ (Landolt } 1{,}37086),$$
$$n_\beta(20^\circ) = 1{,}375991 \text{ (L. } 1{,}37709),$$
$$n_{Li}^2(10^\circ) = 1{,}888863, \qquad n_{Na}^2(10^\circ) = 1{,}895101,$$
$$n_{Li}^2(20^\circ) = 1{,}875070, \qquad n_{Na}^2(20^\circ) = 1{,}881177.$$

Vægtfylden fandtes ved 20° lig 0,8906 (Kopp 0,8870, Land. 0,9005). Da jeg ikke fik udført nogen Vægtfyldebestemmelse ved lavere Varmegrader, har jeg beregnet den med Benyttelse af den af Kopp angivne Udvidelseskoefficient og saaledes fundet den ved 10° lig 0,9024. Hertil svarer

$$P_{Li}(10^\circ) = 0{,}25329, \qquad P_{Na}(10^\circ) = 0{,}25466,$$
$$P_{Li}(20^\circ) = 0{,}25356, \qquad P_{Na}(20^\circ) = 0{,}25493,$$
$$\alpha(10^\circ) = 0{,}00537, \qquad \alpha(20^\circ) = 0{,}00537.$$

Med Hensyn til Refraktionskonstanterne og Farvespredningen gjælder her det samme som ovenfor blev bemærket om Svovlkulstof.

12. Ammoniak, NH_3.

Ammoniakluften blev udviklet af den med stærk Ammoniakvand tildels fyldte lille Kolbe, hvorfra den ledede gjennem et Kalirør til Apparatets indre Beholder. Kolben tilligemed Kalirøret blev vejet før og efter Forsøget; Apparatet havde den omgivende Lufts Varmegrad, omtrent 20° C. Resultaterne vare

G	S	s
0,647	92	142,2
0,594	85	143,1
1,3105	187	142,7
1,049	150	143,0
3,6005	514	142,76

hvoraf findes

$$P_{Na} = 0{,}3266.$$

Til en Forskydelse af 39 gule Striber svarede 34 røde, altsaa

$$P_{Li} = 0{,}3250, \qquad \alpha = 0{,}00478.$$

Til Vægtfylden 8,5 Gange Brintens eller 0,0007613 svare Brydningsforholdene

$$n_{Na} = 1{,}0003730, \qquad n_{Li} = 1{,}0003712.$$

Dulong fandt Ammoniakens Brydningsforhold 1,309 Gange større end den atmosfæriske Lufts, altsaa $n_{Na} = 1,0003810$, som ganske stemmer overens med det af Biot og Arago fundne Resultat. Den mindre Værdi, som fremgaar af mine Forsøg, kan muligvis hidrøre fra en Overføring af Vanddampe, idet det benyttede Kalirør var temmelig lille, men endskjøndt jeg saaledes ikke har fuld Tillid til min egen Bestemmelse af Ammoniakens Brydningsforhold, har jeg dog ikke villet undlade at meddele den, fordi den i ethvert Tilfælde konstaterer en i theoretisk Henseende mærkelig Kjendsgjerning.

Refraktionskonstanten P lader sig nemlig for en Blanding af Vædsker tilnærmelsesvis og for en Blanding af Luftarter med stor Nøjagtighed beregne ved Ligningen

$$(p_1 + p_2 + \dots p_n) P = p_1 P_1 + p_2 P_2 + \dots p_n P_n,$$

idet $p_1, p_2 \dots p_n$ ere Vægtene af Blandingens enkelte Bestanddele og $P_1, P_2, \dots P_n$ disses Refraktionskonstanter. Dette er i det væsentlige den samme Lov for Luftarternes Vedkommende som den, der først blev fremsat af Biot og Arago. Idet nu Dulong beregnede den Forandring af Brydningsforholdet, som fremkom i en Blanding af Luftarter, naar disse gik i kemisk Forbindelse med hinanden, fandt han, at Brydningsforholdet ved denne Overgang ofte blev formindsket, men at det ogsaa i nogle Tilfælde blev forøget, nemlig ved Phosgengas, Vanddampe, Kvælstofforilte, Kvælstoftveilte og Ammoniak. For Vanddampenes Vedkommende støttede Dulong sig paa Biots og Aragos Angivelser, hvorefter deres Brydning skulde være lig med den atmosfæriske Lufts eller kun lidt lavere, men med den betydelige Reduktion, som fremgaar af mine Forsøg, bliver Resultatet et andet. For en Blanding af 1 Vægtdel Brint og 8 Vægtdele Ilt erholdes nemlig Refraktionskonstanten

$$P_{Na} = \tfrac{1}{9} \,.\, 1,0325 + \tfrac{8}{9} \,.\, 0,12666 = 0,2273,$$

medens den for Vanddampe fandtes lig 0,2068, altsaa betydelig mindre.

Med Hensyn til de to Kvælstofforilter er Dulongs Angivelse utvivlsom rigtig, da den støtter sig paa hans egne fortrinlige Forsøg og desuden bekræftes fuldstændig ved de af Mascart fundne Resultater, men det vil bemærkes, at netop disse to Forbindelsers Dannelse af Grundstofferne er ledsaget af en Varmeabsorbtion. Det laa derfor nær at antage, at Brydningen af en Blanding af Luftarter formindskes, naar de indgaa i kemisk Forening under Udvikling af Varme, og forøges, naar der finder en Varmeabsorbtion Sted. Fra denne Regel danner imidlertid Ammoniaken en bestemt Undtagelse. For en Blanding af 14 Vægtdele Kvælstof og 3 Vægtdele Brint er nemlig Refraktionskonstanten

$$P_{Na} = \tfrac{14}{17} \,.\, 0,1571 + \tfrac{3}{17} \,.\, 1,0325 = 0,3116,$$

medens den for Ammoniak er 0,3336 ifølge Dulongs, samt Biot og Aragos Forsøg, og 0,3266 ifølge ovenstaaende. Det er saaledes uomtvisteligt, at Brydningen af den kemiske Forbindelse her er større end af Blandingen, men paa den anden Side er det bekjendt, saavel af

Thomsens som af Favres Forsøg, at Ammoniakens Dannelse af Kvælstof og Brint er ledsaget af en endog betydelig Varmeudvikling.

De faa Forsøg, man hidtil har havt over Dampes og tilsvarende Vædskers Brydning, ere omtalte i det foregaaende med Undtagelse af Kettelers Forsøg over Svovlsyrling. Der er i Beregningen af disse indløbet en Fejltagelse, som fører til urigtige Slutninger, idet nemlig Ketteler angiver Vægtfylden af den draabeflydende Svovlsyrling til 1,4821 «efter Pierre» ved den Temperatur, hvorved Forsøgene have været anstillede, som var 24,1° C. Af Pierres Formel (Ann. de chim. et pharm. t. 21), som kun gjælder for Varmegrader under —8° C., findes for —10° Vægtfylden 1,4889. Benyttes dernæst de af Drion (Ann. de chim. t. 56, Pogg. Ann. Bd. 105) angivne Udvidelseskoefficienter for højere Varmegrader, findes Vægtfylden ved 24,1° lig 1,36726. Efter Andréeff (Liebigs Ann. Bd. 110) er denne 1,36640, og tages Middeltallet af disse to Bestemmelser, erholdes 1,3668, som er meget lavere end det af Ketteler angivne Tal. Ved den nævnte Temperatur fandt K. $n_{Li} = 1{,}33574$ og $n_{Na} = 1{,}33835$, hvoraf erholdes

$$P_{Li} = 0{,}15162, \qquad P_{Na} = 0{,}15268, \qquad \alpha = 0{,}00700.$$

For Svovlsyrlingdampene angives endvidere

$$n_{Li} = 1{,}00068155, \qquad n_{Na} = 1{,}00068601.$$

Mascart fandt for n_{Na} Tallet 1,0006820, medens Dulongs Forsøg give et ikke lidet lavere Resultat, nemlig 1,0006578. Af Kettelers Forsøg findes, idet Svovlsyrlingdampenes Vægtfylde ved Normal-Tryk og Temperatur sættes lig 32 Gange Brintens eller 0,002866,

$$P_{Li} = 0{,}1585, \qquad P_{Na} = 0{,}1596, \qquad \alpha = 0{,}00650,$$

og af Dulongs Forsøg $P_{Na} = 0{,}1530$.

Der gjentager sig saaledes her for Svovlsyrlingen ganske det samme, som jeg har fundet for alle de af mig undersøgte Stoffer, nemlig at Refraktionskonstanten voxer, Farvespredningskvotienten derimod aftager, begge Dele dog kun i ringe Grad, ved en Vædskes Overgang til Dampformen.

Omstaaende Tabel indeholder de af mine Forsøg udledede Refraktionskonstanter for *Na*-Linien og Farvespredningskvotienter for *Na*-*Li*-Linierne, svarende til Vædskerne ved 10° og til 20° og til Dampene ved 100° C.

	$P_{Na} = \frac{n_{Na}^2 - 1}{n_{Na}^2 + 2} \cdot \frac{1}{D}$			$\alpha = \frac{P_{Na} - P_{Li}}{P_{Na}}$		
	10°	20°	100°	10°	20°	100°
Vand	0,20615	0,20608	0,2068	0,00611	0,00611	»
Alkohol . . .	0,28042	0,28066	0,2825	0,00535	0,00531	0,00522
Æther . . .	0,30264	0,30287	0,3068	0,00537	0,00538	0,00465
Chloroform .	0,17902	0,17909	0,1796	0,00592	0,00592	0,00522
Jodæthyl . .	0,15571	0,15578	0,1571	0,00893	0,00905	0,00844
Svovlkulstof.	0,28052	0,28086	0,2898	0,01405	0,01410	0,01369
Eddikeæther	0,25466	0,25493	0,2683	0,00537	0,00537	0,00470

Om

Muligheden af et Par lineære Differentialligningers Integration ved endelige explicite Funktioner.

Af

Adolph Steen.

Vidensk. Selsk. Skr., 5te Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. Bd. X. 9.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1875.

Det er nu fyrgetyve Aar siden Liouville den 8^{de} Juni 1835 forelagde for l'académie des sciences sin Afhandling om Funktionernes Inddeling, trykt i Liouvilles Journal 2. Bind, og lod den følge af Anvendelser, der skabte en Methode til at afgjøre, om et explicit Differential eller en Differentialligning lader sig integrere ved endelige explicite Funktioner, der ikke nødvendigvis alene maa opstaa i Integralregningen, nemlig de, som i videste Forstand ere algebraiske, de logarithmiske og de exponentielle, sammensatte paa en hvilkensomhelst Maade. Saavidt vides har kun Liouville selv i Begyndelsen gjort Brug af Methoden, i lang Tid har den hvilet, og først i den seneste Tid er der her hjemme foretaget Undersøgelser, som bygge videre paa dette vigtige Grundlag. Ingen har senere forsøgt sine Kræfter paa en bedre Fremstilling af denne fortrinlige Methode, der, som et af Liouvilles tidligste Arbeider, ingenlunde er gjennemtrængt af den klassiske Simpelhed, der skal til for at trænge igjennem. Allerede da jeg for nogle Aar siden gjorde den til Gjenstand for en Universitetsforelæsning, trykkede Bevisernes Form mig noget, uden at jeg dog følte mig stærk nok til noget Forsøg paa deres Ændring. Da Hr. Dr. P. C. V. Hansen nylig i sin Disputats (Sætninger om Integration af explicite Differentialer og af Differentialligninger, Kbhvn. 1874) har gjort heldige Anvendelser af Methoden og, iblandt andet, vist, at lineære Differentialligninger af anden Orden med Koefficienter, som ere lineære Funktioner af den uafhængige variable, ikke har endelige explicite Integraler, samt angivet, naar den lineære binomiale Differentialligning af lige Orden kan have saadanne Integraler, og jeg derefter fik bevist, at Dr. Hansens sidstnævnte Resultat lod sig udvide til alle lineære binomiale Differentialligninger (math. Tidsskrift 1874, S. 104), saa følte jeg igjen saavel Savnet af Methodens simple Fremstilling som dennes Vigtighed for dens videre Fremgang. Et Forsøg paa en anden Fremstilling forelægges her, men det væsentlige Indhold er Liouvilles, Formen er min. Det er vistnok ikke lykkedes at opnaa alle de Forbedringer, jeg kunde ønske, men nogle Beviser og Enkeltheder synes mig simplere, og dog ikke mindre exakte, et Resultat i det mindste er fyldigere. Maalet for Methoden er her Undersøgelsen af de lineære Differentialligninger, der følge nærmest efter den af

Liouville behandlede $y''-Py=0$, hvor P er en hel algebraisk rational Funktion. Jeg har nemlig behandlet de to Tilfælde, hvor P har Formerne $\frac{M}{x^m}$ og $\frac{M}{N}$, idet M og N ere hele algebraisk rationale Funktioner, N tillige uden ligestore Faktorer, og i begge Tilfælde fundet, at deres Integration ved endelige explicite Functioner er afhængig af saa mange Betingelser, at den i de fleste Tilfælde er uudførlig, men tillige bestemt Integralets Form, naar det bliver af den anførte Art. Men hver Gang man har foretaget slige Undersøgelser styrkes Overbevisningen om, at de allerfleste Differentialligninger ikke have endelige explicite Integraler, men føre til nye Functionsformer, hvis nærmere Undersøgelse tilhører Integralregningen.

---

1. Har man forelagt

$$y''-Py=0, \tag{1}$$

hvor Lagranges Betegnelse for Differentialkoefficienterne af y med Hensyn til x er benyttet, nemlig y', $y''\ldots y^{(n)}$, og P er en Funktion af x, saa kan man finde en Differentialligning til Bestemmelse af

$$u=y^{\mu}.$$

Man finder heraf

$$u'=\mu y^{\mu-1}y' \tag{2}$$

og med en lille Ændring i Liouvilles Betegnelse (journ. de math. t. IV, S. 429) sættes

$$u_2=\mu(\mu-1)y^{\mu-2}y'^2,$$

samt almindeligt

$$u_i=\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-i+1)y^{\mu-i}y'^i. \tag{3}$$

Heraf følger for positive hele k

$$u_{\mu+k}=0. \tag{4}$$

Af (2) findes nu

$$u''=\mu y^{\mu-1}y''+u_2,$$

altsaa ifølge (1)

$$u''-\mu Pu=u_2.$$

Differentiation heraf giver ligefrem

$$u'''-\mu Pu'-\mu P'u=2\mu(\mu-1)y^{\mu-2}y'y''+u_3,$$

som igjen formedelst (1) frembringer

$$u'''-(3\mu-2)Pu'-\mu P'u=u_3.$$

Fortsættes disse Beregninger ganske paa samme Maade, faas

$$u^{IV}-(6\mu-8)Pu''-(4\mu-2)P'u'-\mu P''u=u_4,$$

$$u^{V}-(10\mu-20)Pu'''-(10\mu-10)P'u''-(5\mu-2)P''u'-\mu P'''u=u_5 \text{ o. s. v.}$$

I Følge Analogi dannes i Almindelighed heraf, idet $C_{i,k}$ betyder Antallet af Kombinationer af k Elementer iblandt i,

$$u^{(i)} - (C_{i,2}\mu - 2C_{i,3})Pu^{(i-2)} \ldots - (C_{i,k+1}\mu - 2C_{i,k+2})P^{(k-1)}u^{(i-k-1)} \ldots - \mu P^{(i-2)}u = u_i \ldots (5)$$

Rigtigheden heraf indses, idet en ny Differentiation giver et Resultat, som afhænger af $i+1$ paa samme Maade som (5) af i. Da Differentiationsindices for P og u ligefrem voxe, behøver kun Regningens Virkning paa Koefficienterne at eftervises. Det andet Led vil indeholde $-Pu^{(i-1)}$, som, idet (3) giver

$$u_i' = i(\mu - i + 1)Pu_{i-1} + u_{i+1}, \qquad (6)$$

faar Faktoren

$$(C_{i,2} + i)\mu - i(i-1) - 2C_3 = C_{i+1,2}\mu - 2C_{i+1,3}.$$

Det almindelige Led, hvori findes $-P^{(k-1)}u^{(i-k)}$, faar til Faktor

$$(C_{i,k} + C_{i,k+1})\mu - 2(C_{i,k+1} + C_{i,k+2}) = C_{i+1,k+1}\mu - 2C_{i+1,k+2}.$$

Det sidste Led giver umiddelbart $-\mu P^{(i-1)}u$. Resultatet faaer netop den angivne Form, saa at (5) er rigtig.

Indføres i (5) $i = \mu + 1$ og sættes

$$C_{\mu+1,k+1}\mu - 2C_{\mu+1,k+2} = E_{k+1}, \text{ altsaa } E_1 = 0, \ E_{\mu+1} = \mu,$$

faas i Følge (4)

$$u^{(\mu+1)} - E_2 Pu^{(\mu-1)} - E_3 P'u^{(\mu-2)} \ldots - E_{k+1}P^{(k-1)}u^{(\mu-k)} \ldots - \mu P^{(\mu-1)}u = 0 \qquad (7)$$

som altsaa er en lineær Differentialligning, hvori y^μ er et partikulært Integral.

Da alle lineære Differentialligninger af anden Orden kunne bringes paa Formen (1), saa er herved bevist

Liouvilles Theorem.

Enhver Potens med positiv hel Exponent af et partikulært Integral af en lineær Differentialligning af anden Orden er partikulært Integral af en lineær Differentialligning, hvis Orden er 1 højere end Potensexponenten, tilmed saaledes sammensat, at Koefficienterne til Differentialkoefficienterne af den højeste og den næsthøjeste Orden ere henholdsvis 1 og 0, medens de andre ere Funktioner af x, afhængige af de Funktioner, der indgaa i den givne Ligning.

Den i (5) fremsatte almindelige Lov for Koefficienterne har Liouville ikke angivet.

2. Ere $y_1, y_2, \ldots y_n$ flere partikulære Integraler af (1), saa gjælder Liouvilles Theorem om Potenser af dem alle med samme positive hele Exponent, altsaa vil ogsaa

$$y_1^\mu + y_2^\mu + \ldots + y_n^\mu = \Sigma y^\mu$$

være et partikulært Integral af (7).

Men forestille y_1 og y_2 to forskjellige partikulære Integraler af (1), saadanne, som ikke have et konstant Forhold, saa er det fuldstændige Integral

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

idet c_1 og c_2 ere arbitrære konstante. Dannes heraf partikulære Integraler ved at der tillægges c_1 og c_2 Værdier, som henholdsvis a_1 og a_2, b_1 og b_2 ...., saa vil man altsaa kunne sætte

$$u = (a_1 y_1 + a_2 y_2)^\mu + (b_1 y_1 + b_2 y_2)^\mu + \ldots\ldots$$

eller

$$u = A_1 y_1^\mu + A_2 y_1^{\mu-1} y_2 + A_3 y_1^{\mu-2} y_2^2 + \ldots + A_{\mu+1} y_2^\mu. \qquad (8)$$

Da nu heri de valgte Værdier for Konstanterne ere ganske vilkaarlige, kan det samme siges om $A_1, A_2, \ldots A_{\mu+1}$, der afhænge deraf, saa at (8) maa være det fuldstændige Integral af (7). De forskjellige partikulære Integraler af (7) ere altsaa y_1^μ, $y_1^{\mu-1} y_2, \ldots y_2^\mu$.

De partikulære Integraler af (7) kunne ogsaa dannes ved Multiplikation af hvilkesomhelst μ af (1). Thi sættes

$$U = y_1 y_2 \ldots . y_\mu,$$

saa faas

$$U' = y_1' y_2 \ldots y_\mu + y_1 y_2' \ldots y_\mu + \ldots\ldots + y_1 y_2 \ldots y_\mu'$$

eller kortere

$$U' = \Sigma y_1' y_2 \ldots . y_\mu.$$

Fremdeles bruges Betegnelsen

$$U_2 = 2 \Sigma y_1' y_2' \ldots . y_\mu$$

og almindeligt

$$U_i = [i] \Sigma y_1' y_2' \ldots y_i' y_{i+1} \ldots y_\mu,$$

hvoraf følger

$$U_\mu = [\mu] y_1' y_2' \ldots . y_\mu',$$

medens derimod

$$U_{\mu+1} = 0,$$

da Index angiver Antallet af Faktorer i Produktet, som skulle være deriverede Funktioner, og det kan ikke overskride Faktorernes hele Antal.

Ved Differentiation af U' dannes nu

$$U'' = \Sigma y_1'' y_2 \ldots y_\mu + U_2 = \mu P U + U_2$$

eller

$$U'' - \mu P U = U_2.$$

Heraf findes igjen

$$U''' - \mu P U' - \mu P' U = 2 \Sigma y_1'' y_2' \ldots y_\mu + U_3,$$

men

$$\begin{aligned}
y_1'' y_2' \ldots \ldots y_\mu &= P y_1 y_2' \ldots\ldots y_\mu \\
y_1'' y_2 y_3' \ldots y_\mu &= P y_1 y_2 y_3' \ldots y_\mu \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_1'' y_2 y_3 \ldots y_\mu' &= P y_1 y_2 y_3 \ldots y_\mu'
\end{aligned}$$

danne en Gruppe af $\mu-1$ Udtryk, og naar man istedenfor y_1'' tager y_2'', $y_3''\ldots$ eller y_μ'', saa danner man hver Gang en ny Gruppe, i alt altsaa μ Grupper, der dog ogsaa kunne betragtes som $\mu-1$ Grupper af Formen $P\Sigma y_1'y_2\ldots y_\mu = U'$. Man faar altsaa

$$U'''-\mu PU'-\mu P'U = 2(\mu-1)U'+U_3,$$

hvoraf

$$U'''-(3\mu-2)PU'-\mu P'U = U_3.$$

Denne Ligning har ganske samme Form, som den i 1 fundne, der er af tredie Orden med Hensyn til u. For at indse, at Overensstemmelsen imellem Ligningerne i U og u maa vedblive, behøver man blot at vise, at

$$U_3' = 3(\mu-2)PU_2+U_4$$

og de analoge med højere Indices. Umiddelbart faar man

$$U_3' = 3.2\Sigma y_1''y_2'y_3'\ldots y_\mu + U_4$$

og heri er

$$y_1''y_2'y_3'y_4\ldots y_\mu = Py_1y_2'y_3'y_4\ldots y_\mu,$$

ligesom alle de analoge Udtryk tilstede lignende Omskrivninger. Af denne Art gives der μ Grupper, indeholdende Py_1, Py_2, $Py_3,\ldots Py_\mu$ og forresten to første deriverede Funktioner, $\mu-2$ primitive, altsaa i hver Gruppe $(\mu-1)(\mu-2)$ Udtryk. Men dette Antal kan ogsaa deles i $\mu-2$ Grupper, indeholdende to Differentialkoefficienter og $\mu-2$ primitive Funktioner, altsaa $\mu(\mu-1)$ i hver. Dermed er Rigtigheden af det angivne Udtryk for U_3' vist og paa denne Maade kan man fortsætte. Størrelser af den for U angivne Form ere altsaa partikulære Integraler af (7). Beviset kan ikke forudsætte, at y_1, $y_2\ldots y_\mu$ ere indbyrdes forskjellige, saa at Produkter af Potenser af y_1, $y_2\ldots y_n$, hvis Exponenters Sum er μ, ligeledes maa være partikulære Integraler af (7).

3. Naar P i (1) har Formen

$$P = A_m x^{-m}+\ldots A_1x^{-1}+B+C_1x+\ldots C_nx^n = \frac{M}{x^m}, \tag{9}$$

saa vil u ikke være algebraisk rational med en Nævner, hvori der kan forekomme Faktorer af Formen $(x-\alpha)\beta$; thi saa vilde der paa venstre Side af (7) ved Brøkernes Dekomposition forekomme et Led og kun et Led med den højeste Exponent $\beta+\mu+1$ ved $x-\alpha$ i Nævneren, saa at (7) ikke kan blive tilfredsstillet.

Derimod ses der ikke umiddelbart at være noget til Hinder for, at u faar Formen

$$u = K_\gamma x^{-\gamma}+\ldots K_1x^{-1}+L+M_1x+\ldots M_\delta x^\delta = \frac{\Gamma}{x^\gamma},$$

hvor Γ er et helt rationalt Polynomium. Betragter man de Exponenter, som x faar ved Indførelse af dette u i (7), saa findes først de laveste Exponenter at være

i første Led: $-(\gamma+\mu+1)$; og i de andre: $-(m+\gamma+\mu-1)$.

Da der ingen andre Led findes, som kunne ophæve det første, maa disse Led alle faa samme Exponent, saa at

$$\gamma+\mu+1 = m+\gamma+\mu-1 ,$$

altsaa

$$m = 2 .$$

Men under denne Forudsætning ville ogsaa i det mindste flere af de følgende Led i (7) faa Exponenter, som ere 1, 2, 3... Enheder mindre, og saaledes kunne hæve hverandre. Det kommer blot an paa, om dette Forhold vil vedblive hele Rækken af Led igjennem op til dem, som have de højeste Exponenter. Men disse ere ganske af samme Form som de laveste, blot indeholnende δ for $-\gamma$ og n for $-m$; man maa altsaa faa

$$\delta-\mu-1 = n+\delta-\mu+1 ,$$

hvoraf

$$n = -2 .$$

Dette viser, at P maa reduceres til et eneste Led, altsaa

$$P = \frac{k}{x^2} , \tag{10}$$

hvis u skal være algebraisk rational, og i saa Tilfælde er det ganske overflødigt at foretage videre Undersøgelse om u, fordi Differentialligningen da har en vel bekjendt integrabel Form.

Man vil nu let kunne vise, at (1) med Formen (9) for P ((10) dog undtagen) ikke kan have noget algebraisk Integral i videste Forstand, det vil sige, som er Rod i en irreductibel algebraisk Ligning i y med Koefficienter, der ere algebraisk rationale Funktioner af x, nemlig

$$V = y^m + X_1 y^{m-1} + X_2 y^{m-2} + \ldots + X_{m-1} y + X_m = 0 . \tag{11}$$

Rødderne af denne Ligning tilfredsstille nemlig ogsaa

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} y' = 0 ,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} + 2\frac{d^2V}{dx\,dy} y' + \frac{d^2V}{dy^2} y'^2 + \frac{dV}{dy} y'' = 0 .$$

Skal nu nogen af dem være partikulært Integral i (1), saa maa ogsaa den algebraiske Ligning, som fremkommer ved Elimination af y' og y'' imellem de to sidste Ligninger og (1), nemlig

$$\frac{d^2V}{dx^2}\frac{dV^2}{dy^2} - 2\frac{d^2V}{dxdy}\frac{dV}{dy}\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dy^2}\frac{dV^2}{dx^2} + Py\frac{dV^3}{dy^3} = 0 ,$$

være tilfredsstillet af en saadan Rod i Ligningen i y. Men to algebraiske Ligninger, som have nogen Rod fælles, maa enten være begge reductible til Ligninger af lavere Grad,

eller den, som er af højest Grad, maa have alle den andens Rødder. Det er det sidste Tilfælde, som foreligger her, saa at ingen Rod i (11) kan være partikulært Integral af (1), uden at de alle ere det. Kaldes Rødderne y_1, $y_2 \ldots y_m$, saa vil ogsaa

$$u = y_1^{\mu} + y_2^{\mu} + \ldots y_m^{\mu}$$

tilfredsstille (7). Men dette er umuligt, fordi u er en symmetrisk Funktion af Rødderne i (11), altsaa en algebraisk rational Funktion af Koefficienterne, tilmed af x, og det er ovenfor vist, at (7) ikke har noget algebraisk rationalt Integral.

4. Hvis det nu skal være muligt at udtrykke y explicite ved x under endelig Form, saa er dertil transcendente Funktioner fornødne. Men hvilke transcendente Integraler man end faar, saa maa dog et af dem have mindre sammensat Form end de andre, det vil sige være transcendent af den laveste Orden. Det maa tilmed indeholde mindst en enkeltleddet transcendent af denne Orden n. Spørgsmaalet bliver da, om denne transcendente Funktion kan være en af de to, $l.v$ eller e^v, idet v er transcendent af $(n-1)^{te}$ Orden; thi dertil kunne henregnes alle transcendente Funktioner, som ikke opstaa alene i Integralregningen.

Man maa nu altsaa først prøve, om (1) har til partikulært Integral

$$y = F(x, l.v), \tag{12}$$

idet F er en algebraisk Funktion af $l.v$, af andre transcendente og algebraiske Funktioner af x. Dertil kræves, idet man sætter $\theta = l.v$, at

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,d\theta}\frac{v'}{v} + \frac{d^2F}{d\theta^2}\frac{v'^2}{v^2} - \frac{dF}{d\theta}\frac{v'^2}{v^2} + \frac{dF}{d\theta}\frac{v''}{v} = PF.$$

Men denne Ligning vil ogsaa tilfredsstilles, naar man sætter μv for v, idet derved ingen af v, v' og v'' afhængig Størrelse udenfor Funktionstegnet F ændres, saa at $l.\mu v$ ligesaa vel maa identisk forsvinde af Ligningen, som $l.v$ gjør det. Man maa altsaa ogsaa have følgende partikulære Integral i (1)

$$y = F(x, l.\mu v).$$

Fremdeles vil Differentiation af (1) med Hensyn til μ, som antages ikke indgaaende i P, give

$$\frac{d^r y''}{d\mu^r} = \frac{d^2 \dfrac{d^r y}{d\mu^r}}{dx^2} = P\frac{d^r y}{d\mu^r},$$

og det viser, at Differentiation af (13) med Hensyn til μ, saa ofte man vil, giver ligesaa mange andre partikulære Integraler af (1), som det skal være. Da tilmed

$$\frac{d.F(x, l.\mu + l.v)}{d.l.\mu} = \frac{d.F(x, l.\mu + l.v)}{d.l.v},$$

saa kunne de partikulære Integraler ogsaa faas ved Differentiation med Hensyn til $l.v$ og Indførelse af $\mu = 1$, $l.\mu = 0$.

Nu kan man indse, at skjønt $y = 0$ er et partikulært Integral i (1), saa kan dette dog ikke være

$$\frac{d.F(x\,,\,l.v)}{d.l.v} = 0\,,$$

da deraf vilde følge

$$F(x\,,\,l.v) = \varphi\,,$$

hvor φ alene afhænger af algebraiske Funktioner af x og andre Transcendenter end v, men saa kom F ikke til at indeholde $l.v$, imod Forudsætningen.

Ikke heller kunne to konsekutive Differentialkoefficienter af (12) med Hensyn til $l.v$ staa i et konstant Forhold, saasom

$$\frac{d.F(x\,,\,l.v)}{d.l.v} = AF(x\,,\,l.v)\,;$$

thi deraf vilde følge

$$F(x\,,\,l.v) = \varphi e^{A.l.v} = \varphi v^A$$

med samme Betydning af φ, som ovenfor, og saa vilde F være en algebraisk Funktion af v, hvis A var rational og en exponentiel Funktion af $l.v$, altsaa transcendent af Ordenen $n+1$, hvis A var irrational (jfr. Liouville journ. de math. II B. S. 94).

Men skulle alle disse partikulære Integraler tilhøre (1), saa maa dog hver tre af dem staa i saadan Relation som

$$\frac{d^2.F(x\,,\,l.v)}{(d.l.v)^2} = A\frac{d.F(x\,,\,l.v)}{d.l.v} + BF(x\,,\,l.v)\,,$$

thi ellers fik (1) flere end to indbyrdes forskjellige partikulære Integraler, hvilket er umuligt. Men deraf udledes da en af de tre Former

$$\begin{aligned} F(x\,,\,l.v) &= \varphi_1 e^{m_1\,l.v} + \varphi_2 e^{m_2\,l.v}\,,\\ F(x\,,\,l.v) &= (\varphi_1 + \varphi_2\,l.v)e^{m\,l.v}\,,\\ F(x\,,\,l.v) &= \varphi_1 + \varphi_2\,l.v\,. \end{aligned}$$

De to første ere ikke algebraiske Funktioner af $l.v$ (jfr. Liouville journ. de math. II. B. S. 69) og den sidste vilde give et nyt partikulært Integral

$$\frac{d.F(x\,,\,l.v)}{d.l.v} = \varphi_2\,,$$

som er uafhængigt af $l.v$, imod Antagelsen.

Differentialligningen (1) kan altsaa for P bestemt ved (9) ikke have noget Integral af Formen (12), hvori en Transcendent som $l.v$ indgaar.

5. Derefter skal det undersøges, om (1) har et partikulært Integral af Formen

$$y = F(x, e^v) \tag{14}$$

med samme Betydning af F og v som forhen. Men saa maa, idet $\theta = e^v$,

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,d\theta}\theta v' + \frac{d^2F}{d\theta^2}\theta^2 v'^2 + \frac{dF}{d\theta}\theta v'^2 + \frac{dF}{d\theta}\theta v'' = PF.$$

Denne Ligning tilfredsstilles, naar $\theta = e^v$ erstattes ved $\mu\theta = \mu e^v$, fordi alle μ udenfor F forsvinde af Ligningen, saa at den nye Ligning blot indeholder μe^v istedenfor e^v. Heraf følger da, at for alle μ er

$$y = F(x, \mu e^v)$$

ogsaa partikulært Integral af (1). Differentierer man den forelagte Ligning med Hensyn til μ, som antages ikke indgaaende i P, saa vil man ogsaa se, at

$$\frac{d^r y}{d\mu^r} = \frac{d.^r F}{(d.\mu\theta)^r}\theta^r$$

for alle μ og r er partikulært Integral, altsaa for $\mu = 1$ vil

$$y = \theta^r \frac{d.^r F}{d\theta^r}$$

give saadanne Integraler, idet $r = 1, 2, 3 \ldots$.

Et saadant Integral kan ikke være nul, skjønt $y = 0$ tilfredsstiller (1), fordi

$$\theta\frac{dF}{d\theta} = 0$$

vilde give

$$F(x, e^v) = \varphi,$$

uafhængig af e^v imod Forudsætningen.

Et konstant Forhold imellem to Integraler, af hvilke det ene er frembragt af det andet ved Differentiation, vilde give

$$\theta\frac{dF}{d\theta} = AF,$$

altsaa

$$F(x, e^v) = \varphi e^{Av}, \tag{15}$$

en Form, som er i god Overensstemmelse med de gjorte Antagelser.

Men endvidere maa man, hvis der ikke skal gives tre indbyrdes ganske forskjellige partikulære Integraler af (1), have

$$\theta^2\frac{d^2F}{d\theta^2} = A\theta\frac{dF}{d\theta} + BF,$$

saa at man faar en af Formerne

$$F(x, e^v) = \varphi_1 e^{m_1 v} + \varphi_2 e^{m_2 v},$$
$$F(x, e^v) = (\varphi_1 + \varphi_2 v)e^{mv},$$
$$F(x, e^v) = \varphi_1 + \varphi_2 v.$$

Af disse forkastes strax den sidste, som ikke indeholdende e^v og derfor ogsaa transcendent af Ordenen $n-1$ istedenfor n. Den næst sidste er ikke nogen algebraisk Funktion af e^v, med mindre $\varphi_2 = 0$, og saa har Funktionen samme Form (15), som ovenfor fandtes og som kan være rigtig. Endelig vil den første Form

$$y_1 = \varphi_1 e^{m_1 v} + \varphi_2 e^{m_2 v}$$

ved Indførelse af μe^v for e^v give et nyt Integral

$$y_2 = \varphi_1 \mu^{m_1} e^{m_1 v} + \varphi_2 \mu^{m_2} e^{m_2 v},$$

og af disse to dannes et tredie

$$y_3 = \varphi_1 (\mu^{m_2} - \mu^{m_1}) e^{m_1 v},$$

hvorved den to Gange før frembragte Form (15) kommer igjen.

Vilde man nu fremdrage en af transcendenterne af n^{te} Orden i Koefficienten φ i (15), maatte denne ogsaa vise sig at have samme Form, saa at, hvis (1) har noget explicit Integral under endelig Form, uafhængigt af Integrationer, maa det have Formen

$$y = \varphi e^v$$

idet φ og v ere transcendente af Ordenen n.

6. Efter Reglen for Behandlingen af homogene Differentialligninger sættes i (1)

$$y = e^{\int t dx},$$

hvorved der opstaar en Differentialligning af første Orden i t

$$t' + t^2 = P, \tag{16}$$

og deri maa t være af lavere Orden end y, altsaa højest transcendent af Ordenen $n-1$.

Beskaffenheden af t maa nu nærmere bestemmes. Betegner v en transcendent af Ordenen $n-2$ i det højeste, saa kan man prøve, om man kan have

$$t = \varphi(x, e^v),$$

altsaa φ transcendent af højest $(n-1)^{te}$ Orden. Af (16) faas da

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{d\theta}\theta v' + \varphi^2 = P,$$

som dog ogsaa gjælder for

$$t = \varphi(x, \mu e^v),$$

saa at (1) har det partikulære Integral

$$y = e^{\int \varphi(x, \mu e^v) dx}.$$

I Følge 5 udledes heraf andre Integraler ved Differentiation med Hensyn til $\theta = e^v$, hvori tilmed kan sættes $\mu = 1$. Man har da

$$y_1 = e^{\int \varphi(x, e^v)dx},$$

$$y_2 = e^{\int \varphi(x, e^v)dx}\int \frac{d\varphi}{d\theta} dx = y_1 z .$$

Disse to partikulære Integraler opfylde Betingelsen

$$y_1 \frac{d^2 y_2}{dx^2} - y_2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = 0,$$

altsaa ogsaa

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C.$$

Indføres heri $y_2 = y_1 z$, faar man

$$y_1^2 \frac{dz}{dx} = y_1^2 \frac{d\varphi}{d\theta} = C.$$

Hvis nu $C = 0$, saa bliver

$$\varphi(x, e^v) = \psi$$

uafhængig af e^v, imod Forudsætningen. Er $C \lessgtr 0$, bliver

$$y_1 = \sqrt{\frac{C}{\frac{d\varphi}{d\theta}}},$$

følgelig y_1 transcendent af ikke höjere Orden end t, tvertimod Antagelsen. t kan altsaa ikke indeholde e^v.

Derefter undersøges om

$$t = \varphi(x, l.v).$$

Med $l.v = \theta$ vilde dette indsat i (16) give

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{v'}{v} + \varphi^2 = P,$$

hvor atter μv kan sættes for v, saa at man ogsaa fik

$$y = e^{\int \varphi(x, l.\mu v)dx}$$

og deraf igjen nye Integraler ved Differentiation med Hensyn til $\theta = l.v$ og $\mu = 1$, altsaa

$$y_1 = e^{\int \varphi(x, l.v)dx},$$

$$y_2 = e^{\int \varphi(x, l.v)dx}\int \frac{d\varphi}{d\theta} dx = y_1 z .$$

Heraf kan atter faas

$$y_1^2 \frac{dz}{dx} = y_1^2 \frac{d\varphi}{d\theta} = C .$$

Enten har man nu $C = 0$, altsaa Funktionen φ uafhængig af $l.v$, som strider imod det antagne, eller man har C forskjellig fra nul, og saa bliver atter

$$y = \sqrt{\frac{C}{\frac{d\varphi}{d\theta}}},$$

altsaa y ikke af höjere Orden end t, hvilket er urimeligt. Da saaledes t heller ikke kan indeholde $l.v$, saa maa den være en algebraisk Funktion af x, hvis den kan fremstilles explicite under endelig Form.

7. Dersom t er en algebraisk Funktion af x i videste Forstand, saa kan den være Rod i en irreduktibel algebraisk Ligning af Graden q, saasom

$$S = t^q + X_1 t^{q-1} + \ldots . X_{q-1} t + X_q = 0, \tag{17}$$

hvori Koefficienterne ere rationale Funktioner af x. Men denne Lignings Rødder tilfredsstille ogsaa

$$\frac{dS}{dx} + \frac{dS}{dt} t' = 0,$$

saa at de Værdier af t, som tillige ere Integraler af (16), maa tilfredsstille den Ligning, der fremkommer ved Elimination af t' imellem denne Ligning og (16), nemlig

$$\frac{dS}{dx} + \frac{dS}{dt}(P - t^2) = 0 .$$

Da denne Ligning altsaa har Rødder tilfælles med den irreduktible algebraiske Ligning i t, saa maa alle dennes Rødder tilfredsstille den sidste. Betegnes de med t_1, t_2, $t_3 \ldots$, saa skal man have de partikulære Integraler af (1)

$$y_1 = e^{\int t_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int t_2 dx}, \quad y_3 = e^{\int t_3 dx} \ldots .$$

Hvilkesomhelst to af disse maa tilfredsstille en Differentialligning som

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C$$

eller

$$y_1 y_2 (t_2 - t_1) = C .$$

Her kan man ikke have $y_2 = c_1 y_1$, da det vilde give $C = 0$, altsaa

$$t_2 = t_1 ,$$

og Ligning (17) var ikke irreduktibel. Men er C forskjellig fra nul, saa bliver $y_1 y_2$ en algebraisk Funktion af x ligesom t_1 og t_2, som i Følge 2 (jfr. (8)) er et partikulært Integral af (7) for $\mu = 2$, og det er forhen vist, at denne Ligning ikke kan have noget algebraisk Integral. Heraf bliver det en nødvendig Følge, at Ligning (17) maa være af

første Grad i t, eller at t maa være en algebraisk rational Funktion af x, hvis (1) har et endeligt explicite ved x udtrykt Integral.

8. Naar t skal være algebraisk rational, saa kan man efter en Dekomposition give den Formen

$$t = H + \Sigma \frac{K}{(x-p)^{\alpha}}, \tag{18}$$

hvor H er et helt rationalt Polynomium af Graden h, K konstant. I (1) er P ligeledes sammensat af en hel og en brudden Del, som her kortere gjengives saaledes

$$P = \frac{M}{x^m} = Q + \frac{R}{x^m},$$

hvor Q og R blive henholdsvis af n og $m-1$ Grad.

Indfører man Udtrykket (18) i (16), findes

$$H' - \Sigma \frac{\alpha K}{(x-p)^{\alpha+1}} + H^2 + 2H\Sigma \frac{K}{(x-p)^{\alpha}} + \left(\Sigma \frac{K}{(x-p)^{\alpha}}\right)^2 = Q + \frac{R}{x^m},$$

som indeholder de hele Led

$$H' + H^2 + H_1 - Q$$

og de brudne,

$$-\Sigma \frac{\alpha K}{(x-p)^{\alpha+1}} + \Sigma \frac{L}{(x-p)^{\alpha}} + \left(\Sigma \frac{K}{(x-p)^{\alpha}}\right)^2 - \frac{R}{x^m},$$

idet

$$+2H\Sigma \frac{K}{(x-p)^{\alpha}} = H_1 + \Sigma \frac{L}{(x-p)^{\alpha}},$$

hvor H_1 er hel i det höjeste af $(h-1)^{\text{te}}$ Grad og L konstant.

De fire hele Led kunne ikke blive identisk lig nul, med mindre Q og H^2 ere af samme Grad, altsaa

$$n = 2h.$$

Heraf følger, at (1) med P af Formen (9) ikke har noget Integral under endelig explicit Form, naar P er af ulige Grad. Fremdeles kræves til et saadant Integral, at H er de hele Led i $\sqrt{Q}$, medens den Rest ϱ, der udkommer efter Roduddragningen og som i det höjeste er af Graden $h-1$, bestemmer

$$H_1 = \varrho - H'.$$

Sætter man

$$H = bx^h + b_1 x^{h-1} + \ldots . b_{h-1}x + b_h$$

og

$$\varrho = gx^{h-1} + g_1 x^{h-2} + \ldots . g_{h-2}x + g_{h-1},$$

vil H_1 være bestemt.

De brudne Led, som indkomme i (16), naar Udtrykket (18) indføres for t, kunne

til Dels være saadanne, hvor Størrelserne p ikke ere nul, men for at de brudne Led i P skulle kunne forsvinde, maa der ogsaa findes andre, som have $p = 0$.

Ere $p_1, p_2 \ldots p_r$ ikke nul, saa bestemmes de tilsvarende Tællere $K_1, K_2 \ldots K_r$ og Exponenter $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r$ deraf, at saadanne Led med samme p maa ophæve hverandre. Men dertil kræves for alle Indices

$$2\alpha = \alpha + 1 \;, \quad K^2 - \alpha K = 0 \;,$$

altsaa

$$\alpha = 1 \quad , \qquad K = 1 \;,$$

idet $K = 0$ maa forkastes.

Men et Led i (18) af Formen $\frac{K}{x^\alpha}$ vil kun forsvinde, naar

$$2\alpha = m \;,$$

altsaa m maa være et lige Tal. En Differentialligning af Formen (1) med en ulige Exponent for Nævneren i P af Formen (9) har altsaa intet endeligt explicite udtrykt Integral.

Men nu kræves der iøvrigt til, at Leddet med x^α skal forsvinde, efterat være indført i (16), at Koefficienterne blive ligestore paa Ligningens to Sider. Dette kan ske paa to Maader. Hvis $2\alpha > \alpha + 1$ eller $\alpha > 1$, saa maa

$$K^2 = A_m \,.$$

Men hvis $\alpha = 1$, saa ville Nævnerne $x^{2\alpha}$ og $x^{\alpha+1}$ begge blive lig x^m, idet

$$m = 2$$

og man faar da

$$K^2 - K = A_2 \,.$$

Derefter har man to forskjellige Former af t; nemlig

$$\text{for } m > 2: \qquad t = H + \frac{1}{x - p_1} + \frac{1}{x - p_2} + \ldots \frac{1}{x - p_r} + \frac{N}{x^{\frac{1}{2}m}} \,, \tag{19}$$

idet N er et Polynomium af Graden $\frac{1}{2}m - 1$ i det höjeste og med det konstante Led $\sqrt{A_m}$; derimod er

$$\text{for } m = 2: \qquad t = H + \frac{1}{x - p_1} + \frac{1}{x - p_2} + \ldots \frac{1}{x - p_r} + \frac{K}{x} \,. \tag{20}$$

9. I det sidste Tilfælde har man

$$P = H^2 + \varrho + \frac{A_2 + A_1 x}{x^2} \tag{21}$$

og da skal (1) have til partikulært Integral

$$y = X x^K e^{\int H dx} , \tag{22}$$

idet K findes af

$$K^2 - K = A_2 \tag{23}$$

og X er et helt rationalt Polynomium

$$X = x^r + c_1 x^{r-1} + \dots + c_{r-1} x + c_r \, , \tag{24}$$

hvis Grad og hvis Koefficienter maa findes ved de ubestemte Koefficienters Methode.

Indføres (21) og (22) i (1), faar man ved Subtraktion fjernet $(K(K-1)+H^2x^2)Xx^{K-2}e^{\int Hdx}$ og efter Division med $x^{K-1}e^{\int Hdx}$

$$xX'' + 2(K+Hx)X' + (2KH+H'x)X - (\varrho x + A_1)X = 0 \, .$$

For at heri Leddene af den højeste Orden $r+h$ skulle forsvinde, maa

$$(2r+2K+h)b - g = 0$$

eller

$$2r = \frac{g}{b} - 2K - h \, . \tag{25}$$

Da nu h er positiv hel og det samme skal gjælde om r, saa maa $\frac{g}{b} - 2K$ være hel ikke mindre end h. Er altsaa K irrational eller brudden, saa maa det samme gjælde om $\frac{g}{b}$. Ligeledes maa $\frac{g}{b} - 2K - h$ være et lige Tal.

Heraf følger, at naar (1) med P af Formen (21) ikke har til Integral (22), idet (23)—(25) gjælde, saa har den intet endeligt explicit Integral.

For at (22) virkelig skal være et saadant Integral, maa $r+h+1$ Relationer finde Sted imellem Koefficienterne i H, ϱ og X, A_1 og K. Heraf maa da kunne findes endelige Værdier for $c_1, c_2 \dots c_r$, foruden det ved (25) bestemte r, hvorefter der vil dannes h Betingelsesligninger imellem de forskjellige b og g, samt A_1 og K; ere disse ikke opfyldte, har Differentialligningen intet endeligt explicit Integral.

10. Det simpleste Tilfælde, som falder ind herunder, synes at være det, hvor

$$\frac{g}{b} - 2K = h \, , \quad r = 0 \, ,$$

idet derved $X = 1$. Med Formen (21) for P faar man da

$$y = x^K e^{\int Hdx}.$$

Indsættes det i (1), faar man efter behørig Reduktion (jfr. 9)

$$2KH + H'x - (\varrho x + A_1) = 0 \, ,$$

hvis Identitet kræver foruden $g = (2k+h)b$, der var givet,

$$A_1 = 2Kb_h \, , \; g_{h-1} = (2K+1)b_{h-1} \, , \; g_{h-2} = (2K+2)b_{h-2} \, , \dots g_1 = (2K+h-1)b_1 \, .$$

Tilmed maa bemærkes, at H, som fremkommer ved en Kvadratrods Uddragning,

kan tages positiv eller negativ, saa at de i disse Formler indgaaende b maa tages henholdsvis positive eller negative. Heraf faas følgende

Theorem.

Differentialligningen

$$y'' - \left(H^2 + \varrho + \frac{A_2 + A_1 x}{x^2}\right) y = 0 ,$$

hvor H og ϱ ere hele algebraisk rationale Funktioner af x, henholdsvis af h og $h-1$ Grad, er kun integrabel ved endelige explicite Funktioner, hvis

$$\begin{aligned} H &= \pm(bx^h + b_1 x^{h-1} + \ldots + b_h) , \\ \varrho &= \pm((2K+h)bx^{h-1} + (2K+h-1)b_1 x^{h-2} + \ldots + (2K+1)b_{h-1}) , \\ A_1 &= 2Kb_h , \\ \text{og } A_2 &= K(K-1) , \end{aligned}$$

og har da det partikulære Integral

$$y = x^K e^{\pm\int H dx}.$$

11. Naar $\alpha > 1$, giver (19)

$$y = X e^{\int (H + Nx^{-\frac{1}{2}m}) dx} \qquad (26)$$

med samme Betydning af X som forhen og

$$P = H^2 + \varrho + \frac{M}{x^m} . \qquad (9)$$

Derved udledes af (1) efter Division med $x^{-m} e^{\int (H + Nx^{-\frac{1}{2}m}) dx}$

$$x^m X'' + 2(Hx^m + Nx^{\frac{1}{2}m}) X' + (2Hx^{\frac{1}{2}m} N + N^2 - M - \varrho x^m + H' x^m + x^{\frac{1}{2}m} N' - \tfrac{1}{2} m N x^{\frac{1}{2}m-1}) X = 0 .$$

Leddene af den höjeste Orden $r + h + m - 1$ forsvinde, naar

$$(2r + 2d + h)b - g = 0 ,$$

idet

$$N = dx^{\frac{1}{2}m-1} + d_1 x^{\frac{1}{2}m-2} + \ldots + d_{\frac{1}{2}m-2} x + \sqrt{A_m} .$$

Heraf findes

$$2r = \frac{g}{b} - 2d - h , \qquad (27)$$

afhængig af d, som ikke er bestemt endnu. Heri maa $\frac{g}{b} - 2d - h$ være et positivt lige helt Tal (hvorunder 0), altsaa ogsaa $\frac{g}{b} - 2d$ større end eller lig med h.

Men hele den ovenstaaende identiske Ligning i x af Graden $r + h + m - 1$, kan ved Division med x blive 1 Grad lavere, fordi $N^2 - M$ er delelig med x, da N indeholder

det konstante Led $\sqrt{A_m}$ og M indeholder A_m (jfr. 8). De $r+h+m-1$ Ligninger, som dannes ved at sætte Koefficienterne lig nul, tjene til Bestemmelse af $r+\frac{1}{2}m$ Størrelser, nemlig foruden Exponenten r ogsaa r Koefficienter i X, $\frac{1}{2}m-1$ i N. Naar disse ere fundne, bliver der dannet $h+\frac{1}{2}m-1$ Betingelser, som Koeficienterne b, c, g og A med forskjellige Indices skulle opfylde. Gjøre de ikke det, har Differentialligningen ingen endelig explicit Funktion til partikulært Integral.

Udbyttet af denne Undersøgelse er, at den her omhandlede Differentialligning kun sjeldent tilsteder et endeligt explicit Integral; det finder sit Udtryk i følgende almindelige

Theorem.

Differentialligningen

$$y'' - \left(H^2 + \varrho + \frac{A_m + A_{m-1}x + \ldots + A_1 x^{m-1}}{x^m}\right) y = 0,$$

hvor H og ϱ ere hele rationale algebraiske Funktioner af x, henholdsvis af Graden h og $h-1$, har intet endeligt explicit Integral, med mindre

m er et lige Tal;

det **kan** da være af Formen

$$y = Xe^{\int (H+Nx^{-\frac{1}{2}m})dx},$$

hvor X og N ere hele rationale algebraiske Funktioner af x, den første af Graden r, den sidste af Graden $\frac{1}{2}m-1$ og med det konstante Led $\sqrt{A_m}$, **saafremt** de ubekjendte Størrelser

r, Koefficienterne i X og N, $\quad r+\frac{1}{2}m$ i Antal,

kunne bestemmes saaledes, at de tilligemed Koefficienterne i H og ϱ samt $A_1, A_2 \ldots . A_m$ tilfredsstille $r+h+m-1$ Ligninger. Ellers har Differentialligningen intet endeligt explicit Integral.

11. Antages i (1)

$$P = \frac{M}{N}, \tag{28}$$

hvor M og N ere hele rationale Funktioner, henholdsvis af m^{te} og n^{te} Grad, saa vil der i (7) indgaa

$$\frac{d.\frac{M}{N}}{dx} = \frac{M_1}{N^2}, \qquad \text{idet } M_1 = NM' - MN',$$

$$\frac{d^2.\frac{M}{N}}{dx^2} = \frac{M_2}{N^3}, \qquad \text{idet } M_2 = NM_1' - 2M_1N' \text{ o. s. v.},$$

almindeligt

$$\frac{d^r \frac{M}{N}}{dx^r} = \frac{M_r}{N^{r+1}}, \quad \text{hvor } M_r = NM'_{r-1} - rM_{r-1}N'.$$

Da M og N kunne antages ingen fælles Faktorer at have, saa ville Størrelserne $M_1, M_2 \ldots$ heller ikke kunne have Faktorer fælles med N, saafremt N ikke indeholder ligestore Faktorer. Da dette Tilfælde faar væsentlig Indflydelse paa Formen af (7) bragt paa hel Form, udelukkes det her. Det er et saadant Tilfælde, som forudsættes ved (9), der svarer til $N = x^m$.

Man maa nu multiplicere (7) med N^μ for at bringe den paa hel Form, hvorved dannes

$$N^\mu u^{(\mu+1)} - E_2 M N^{\mu-1} u^{(\mu-1)} - E_3 M_1 N^{\mu-2} u^{(\mu-2)} - \ldots - \mu M_{\mu-1} u = 0.$$

Denne Ligning kan ikke tilfredsstilles af noget algebraisk rationalt u med Nævneren $(x-\alpha)^\beta$, som ikke findes i N, fordi der vilde fremkomme et og kun et Led med Nævneren $(x-\alpha)^{\beta+\mu+1}$, som ikke kan bringes til at forsvinde. Derimod kunde man tænke sig u indeholde en Faktor X af N i en Potens, saasom X^β. Men det første Led vil da komme til at indeholde $X^{\beta+1}$ i Nævneren, idet N indeholder denne Faktor kun en Gang, medens alle de følgende Led kun faa X^β i Nævneren, hvilket ses af det almindelige Led $-E_{k+1} M_{k-1} N^{\mu-k} u^{(\mu-k)}$. Ved Dekompositionen af disse brudne Funktioner faas atter af første Led Brøker, der ikke kunne forsvinde af Ligningen. u kan altsaa ikke være brudden irrational.

Skulde u være hel rational af Graden γ, saa maatte det første Led være af Graden

$$n\mu + \gamma - \mu - 1 ;$$

det almindelige Led bliver af højere Grad, fordi $M_1, M_2 \ldots$ ere af voxende Grader, M_r nemlig af Graden $m + r(n-1)$, altsaa dets Grad er

$$m + (\mu - 1)n + \gamma - \mu + 1 .$$

Da dette er uafhængigt af k, bestemmes derved Graden af alle Led efter det første. Dette kan derfor ikke forsvinde, med mindre Graderne ere ligestore, altsaa

$$m = n - 2 .$$

I alle andre Tilfælde kan altsaa u ikke være algebraisk rational.

12. Undersøgelsen af Beskaffenheden af y i (1), naar (28) gjælder, kan for den største Del ske ved en Gjentagelse af det i Slutningen af 3 og i 4—6 udviklede, naar deri blot P erstattes ved $\frac{M}{N}$. Alle de Ligninger, hvori P indgaar, blive nemlig af hel

Form ved Multiplikation med N, saa at alle de forhen gjorte Slutninger staa ved Magt, naar blot ikke $m = n - 2$, i hvilket Tilfælde man ikke kan bevise, at (1) ikke kan have noget Integral, som er Rod i en algebraisk Ligning.

Udbyttet heraf bliver da først, at hvis (1) skal have et endeligt explicit Integral, naar P er bestemt af (28), dog ikke saaledes at $m = n - 2$, saa maa det være af Formen

$$y = \varphi e^v ,$$

hvor φ og v ere transcendente af samme Orden. Dernæst, naar man sætter

$$y = e^{\int t dx},$$

saa maa t have algebraisk rational Form som

$$t = H + \Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha} \tag{18}$$

med samme Betydning af Bogstaverne som forhen.

13. Sætter man nu

$$P = \frac{M}{N} = Q + \frac{R}{N} ,$$

saa kan Q antages at være af Graden $m - n$ for $m \geqq n$, men ellers nul, og R höjest af $(n-1)^{\text{te}}$ Grad. Derefter vil Differentialligningen til Bestemmelse af t blive

$$t' + t^2 = Q + \frac{R}{N} \cdot$$

Ved Indsættelse af Udtrykket for t faar man

$$H' - \Sigma \frac{\alpha K}{(x-p)^{\alpha+1}} + H^2 + 2H\Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha} + \left(\Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha}\right)^2 = Q + \frac{R}{N} ,$$

som af hele Led indeholder

$$H' + H^2 + H_1 - Q ,$$

idet H_1 er bestemt ved Dekomposition af

$$2H\Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha} = H_1 + \Sigma \frac{L}{(x-p)^\alpha} ,$$

hvor L er konstant. De hele Led af höjest Orden ere H^2 og Q, og for at disse skulle kunne forsvinde, maa

$$m - n = 2h ,$$

eller P maa være af lige Grad for at (1) skal have et endeligt explicit Integral. Sætter man

$$Q = H^2 + \varrho ,$$

saa er H et helt Polynomium, som faas ved at uddrage Kvadratroden, medens ϱ er den ved Roduddragningen frembragte Rest, höjest af Graden $h-1$.

I de brudne Led

$$-\Sigma\frac{\alpha K}{(x-p)^{\alpha+1}}+\Sigma\frac{L}{(x-p)^{\alpha}}+\left(\Sigma\frac{K}{(x-p)^{\alpha}}\right)^2-\frac{R}{N}$$

kunne Størrelserne $x-p$ enten gaa op i N eller ikke indeholdes deri. Gaa de ikke op i N, saa maa de indbyrdes hæve hverandre og dertil kræves ligesom i 8, at

$$2\alpha=\alpha+1 \quad \text{og} \quad \alpha K-K^2=0,$$

saa $\alpha=1$ og $K=1$ eller $K=0$, hvilken sidste Værdi her ikke tør forkastes, men den kommer rigtignok ikke til praktisk Anvendelse, med mindre alle K ere nul. Er $x-p$ Faktor i N, saa maa den i Følge Forudsætningen kun findes en Gang deri; skulle altsaa alle Led med saadanne $x-p$ falde bort imod $\frac{R}{N}$, saa maa de Brøker med höjere end første Potens hæve hverandre, altsaa atter $\alpha=1$ og $K=1$, hvorimod her $K=0$ maa forkastes. Alle Faktorerne indgaa altsaa i t's Nævnere og man faar

$$t=H+\frac{1}{x-p_1}+\frac{1}{x-p_2}+\ldots.\frac{1}{x-p_{r+n}},$$

hvor dog nogle af Nævnerne kunne være fremmede for N. Derefter bliver

$$y=XNe^{\int H dx}, \tag{29}$$

idet X er en hel algebraisk rational af den ubekjendte Grad r. (29) er under de gjorte Forudsætninger det eneste mulige Integral under endelig explicit Form.

14. Indføres (29) i (1), faar man

$$NX''+2(N'+NH)X'+(N''+2N'H+NH')X=(\varrho N+R)X.$$

Leddene af den höjeste Grad, $n+h+r-1$, bestemme ogsaa her r ved, at deres Koefficienters Sum bliver nul. Sætter man

$$N=ax^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_n,$$
$$R=ex^{n-1}+e_1x^{n-2}+\ldots.+e^{n-1},$$

faas

$$2abr+2nab+hab=ga,$$

altsaa

$$2r=\frac{g}{b}-2n-h,$$

som maa være et positivt lige Tal.

Da Ligningens Grad er $n+h+r-1$, faar man $n+h+r$ Ligninger at tilfredsstille ved de $r+1$ ubekjendte r, c, $c_1 \ldots c_r$, saa at der endda bliver $n+h-1$ Betingelser, som de givne Koefficienter i H, ϱ, R og N skulle tilfredsstille.

Herved er da bevist følgende

Theorem.

Differentialligningen

$$y'' - \left(H^2 + \varrho + \frac{R}{N}\right) y = 0\,,$$

hvor H, ϱ, R og N ere hele rationale algebraiske Funktioner af x, hvis Grader ere for H og N henholdsvis h og n, for ϱ og R i det höjeste $h-1$ og $n-1$ (dog ikke $H = \varrho = 0$ og R af Graden $n-2$), og N ikke indeholder ligestore Faktorer, kan **kun** have endeligt explicit Integral af Formen

$$y = XNe^{\int H dx},$$

hvor X er hel rational af Graden r, **saafremt** de ubekjendte, r og Koefficienterne i X, kunne bestemmes saaledes, at de tilligemed de givne Polynomiers Koefficienter tilfredsstille $n+h-1$ Betingelser.

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]
